УДК 519.17

Достаточное условие принадлежности кривой границе своей выпуклой оболочки в A^n

И.В. Поликанова

Алтайский государственный педагогический университет
(Барнаул, Россия)

A Sufficient Condition for a Curve to Belong to Boundary of its Own Convex Hull in A^n

I.V. Polikanova

Altai State Pedagogical University (Barnaul, Russia)

В статье рассматриваются некоторые обобщения выпуклой кривой и соотношения между определяемыми ими классами кривых.

Основной результат относится к кривым в n-мерном аффинном пространстве A^n: *невырожденная кривая в A^n лежит на границе своей выпуклой оболочки, если всякая гиперплоскость пересекает ее не более чем в n точках.* Обосновывается теорией выпуклых множеств. Это утверждение обобщает более ранний (2014 г.) результат автора, относящийся к кривым, представляющим собой компактные множества в A^n. Для евклидова пространства E^n размерности n в 1947 г. В. Густин доказал более сильную теорему: связное множество, пересекаемое всякой гиперплоскостью не более чем в n точках, представляет собой простую непрерывную кривую, лежащую на границе выпуклого множества. Заметим, что в проективном пространстве размерности n требование пересечения кривой со всеми гиперплоскостями не более чем в n точках входит в определение выпуклой кривой. Таким образом, установленный факт вместе с результатом В. Густина показывает близость понятий выпуклости во всех трех пространствах.

Ключевые слова: выпуклая кривая, слабовыпуклая кривая, порядок кривой, эника, кривая моментов.

DOI: 10.14258/izvasu(2022)4-22

The paper discusses some generalizations of the convex curve and the relationship between the classes of curves they define.

The main result concerns the curves in n-dimensional affine space A^n: a non-degenerate curve in A^n lies on the boundary of its convex hull if any hyperplane intersects it in at most n points. It is justified by the theory of convex sets. This statement generalizes an earlier (2014) result of the author concerning the curves that are compact sets in A^n. V. Gustin proved in 1947 a stronger theorem for a Euclidean space E^n of dimension n: a connected set intersected by any hyperplane at no more than n points is a simple continuous curve lying on the boundary of a convex set. Note that in a projective space of dimension n the requirement that the curve intersects all hyperplanes at no more than n points is included in the definition of a convex curve. Thus, the established fact, together with the result of V. Gustin, shows the contiguity of the concepts of convexity in all three spaces.

Key words: convex curve, weakly convex curve, order of curve, enic, moment curve.

Введение. Обозначения: $\mathbb{A}^n$ – n-мерное аффинное пространство, $\mathbb{E}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $R\mathbb{P}^n$ – действительное проективное n-мерное пространство. *Кривая* (*линия*) – одномерное связное многообразие в одном из указанных пространств. *Невырожденная кривая* – кривая, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости. Максимум точек пересечения множества с гиперплоскостями при условии конечности значения называется *порядком множества.* В статье обсуждаются некоторые обобщения понятия выпуклой кривой, связанные с порядком множества, и соотношения между определяемыми ими классами кривых.

Изначально *выпуклая кривая* рассматривалась как связное подмножество границы выпуклого множества в $\mathbb{A}^2$ или $\mathbb{E}^2$. *Строговыпуклая кривая* – выпуклая кривая, не содержащая отрезков.

Существуют различные обобщения понятия выпуклости для кривой, обусловленные: а) расширением класса кривых с сохранением некоторых свойств выпуклых кривых, б) перенесением его в другие пространства, в) увеличением коразмерности.

Естественным обобщением типа а) служит понятие *локально выпуклой кривой*, как кривой, всякая точка которой имеет окрестность (на кривой), являющуюся выпуклой кривой. Тогда всякая выпуклая кривая является локально выпуклой в указанном смысле. Логарифмическая и архимедова спирали представляют собой локально выпуклые, но не выпуклые кривые. Поэтому такое понятие расширяет класс выпуклых кривых. Однако само понятие окрестности точки на кривой с самопересечениями можно трактовать поразному. Пусть кривая $\gamma \in \mathbb{A}^2$ задается погружением $\vec{r} = \vec{r}(t), \ t \in I$, где I числовой промежуток. Если под окрестностью точки $x \in \gamma$ понимать окрестность, индуцированную на кривой объемлющим пространством, т. е. пересечение пространственной окрестности U точки x с кривой γ как образом числового промежутка I при погружении $\vec{r}(t)$, то в этом случае самопересекающиеся кривые следует исключить из класса локально выпуклых кривых. Если точку самопересечения x рассматривать как набор $x = \{\vec{r}(t_\alpha)|\ \alpha \in A\}$ *параметрических точек*, «привязанных» к параметрам, то понятие окрестности можно соотносить с параметрическими точками $\vec{r}(t_\alpha)$, понимая под этим термином образ окрестности J_α точки t_α в I при погружнии $\vec{r}(t)$. В последнем случае мы получим более широкий класс кривых, включающий и самопересекающиеся кривые, такие как декартов лист, улитка Паскаля. Почему же такое, казалось бы, естественное определение локальной выпуклости кривой не фигурирует в научной литературе? Картину «портят» прямолинейные дуги (отрезки), существование которых допускается сформулированным выше, в том числе уточненным определением. Именно благодаря им в данный класс попадают кривые с различными направлениями выпуклости вдоль кривой, например, кривая

$$y = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{при} \quad x \in (-\infty, -1) \\ 0 & \text{при} \quad x \in (-1, 1) \\ (x-1)^3 & \text{при} \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

В частности, в этот класс включаются абсолютно все ломаные. Из ломаных легко получить и гладкие линии, подпадающие под это определение, «сглаживая» окружностями углы так, чтобы оставались прямолинейные отрезки – «участки перегиба». Если же потребовать, чтобы кривые не содержали прямолинейных отрезков, то, наоборот, класс кривых неоправданно сузится, так что не будет содержать ломаных вообще, даже выпуклых.

В научной литературе мы нашли понятия локальной выпуклости, сформулированные отдельно для регулярных (класса гладкости C^1) кривых и отдельно для ломаных.

Регулярная кривая в $\mathbb{E}^2$ называется *локально выпуклой*, если соответствующая ей угловая функция (угол касательной к кривой по отношению к оси как функция параметра, т. е. угол между единичным вектором $\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ и первым базисным ортом $\vec{i}$ ортонормированного правого базиса $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$) строго монотонна, что равносильно условию знакопостоянства кривизны [1, с. 567]. По определению замкнутая строго выпуклая регулярная кривая локально выпукла. Установлено [2, с. 163 – 165], что замкнутая регулярная плоская кривая без самопересечений выпукла тогда и только тогда, когда ее угловая функция является слабо монотонной функцией параметризации кривой. Отсюда следует, что замкнутая без самопересечений локально выпуклая кривая выпукла.

Замкнутая ломаная, заданная упорядоченным набором вершин x_0, x_1, ..., x_k, называется *локально-выпуклой*, если ориентированный угол между всеми парами векторов $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$, $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$, $i = 1, ..., k$, при условии $x_k = x_0$, $x_{k+1} = x_1$, принадлежит промежутку $(0, \pi)$ (или $(-\pi, 0)$ при другой ориентации ломаной) [3, с. 142].

Единого понятия локально выпуклой кривой, охватывающего как регулярные, так и негладкие кривые, нам не известно даже в случае евклидовой плоскости.

В.С. Климов установил в [1] для локально выпуклой замкнутой кривой γ, а также для локально выпуклой замкнутой ломаной γ неравенство:

$$N(\gamma) \leq 2|deg\gamma|, \qquad (1)$$

где $N(\gamma)$ – максимальное число точек пересечения, а в случае ломаной – максимальное число связных компонент пересечения γ со всевозможными прямыми, $deg\gamma$ – степень кривой γ (в случае ломаной Е.С. Запутряева называет эту характеристику индексом ломаной [3]).

Тут уместно вспомнить предложение, которое, на наш взгляд, послужило источником важных обобщений.

Предложение 0 [4, с. 49]. *Кривая строго выпукла тогда и только тогда, когда пересекает любую прямую не более чем в двух точках.*

Так как степень гладкой замкнутой несамопересекающейся кривой равна ± 1 [5, теор. 5.5, с. 75], то из неравенства (1) также вытекает, что замкнутая несамопересекающаяся локально выпуклая кривая пересекается с прямыми не более чем в двух точках. Тогда из предложения 0 вытекает

Теорема 0. *Регулярная замкнутая несамопересекающаяся локально выпуклая кривая является строго выпуклой.*

В терминах «порядка множества» строгая выпуклость кривой равносильна тому, что ее порядок равен двум.

Обобщениями по размерности понятия выпуклой кривой занимались И. Шоенберг, В. Седых и автор данной статьи. В.Д. Седых предложил термин «*слабовыпуклая кривая*» для кривой, лежащей на границе своей выпуклой оболочки. Таковой является всякая кривая на выпуклой гиперповерхности. Слабо выпуклые кривые интересовали его в связи с изучением точек уплощения [6, 7]. Нами в качестве выпуклых рассматривались кривые в $\mathbb{E}^n$, в каждой точке которых существует $(n-1)$-гранный угол раствора не меньше некоторого фиксированного значения, а также более узкие классы *строго и сильновыпуклых кривых* [8]. Определенные таким образом выпуклые кривые оказываются слабо выпуклыми. Обратное неверно, что демонстрирует локсодрома на сфере: она слабо выпукла, однако при приближении точек кривой к полюсам содержащие их двугранные углы «разворачиваются» в полупространство, и их растворы стремятся к нулю. И. Шоенберг определил выпуклую ломаную в $\mathbb{E}^n$ как ломаную, не содержащуюся ни в какой гиперплоскости и пересекаемую всякой гиперплоскостью не более чем в n точках. Невырожденную замкнутую (являющуюся гомеоморфным образом окружности) в $\mathbb{E}^{2n}$ кривую он назвал *выпуклой*, если все вписанные в нее замкнутые ломаные выпуклы в $\mathbb{E}^{2n}$ (рассмотрение кривых в четномерном пространстве обусловлено тем, что таких замкнутых кривых в $\mathbb{E}^{2n+1}$ не существует). Для нее И. Шоенберг установил изопериметрическое неравенство, оценивающее длину через объем выпуклой оболочки [9], и показал, что выпуклые кривые в $\mathbb{E}^{2n}$ лежат на границе своей выпуклой оболочки. Если принять во внимание, что выпуклые по Шоенбергу кривые в $\mathbb{E}^{2n}$ имеют порядок $2n$, то последний факт также следует и из теоремы В. Густина [10], доказавшего, что связное множество в $\mathbb{E}^n$, имеющее порядок n, представляет собой простую непрерывную кривую, лежащую на границе выпуклого множества.

Поскольку в проективном пространстве отсутствует понятие выпуклой оболочки, то идея Шоенберга определения выпуклости через порядок множества оказалась востребованной и породила ряд обобщений, возвратившихся в евклидову геометрию под теми же названиями [11-13]. Именно, замкнутая кривая называется *выпуклой в* $R\mathbb{P}^n$, (или $\mathbb{E}^n$), если всякая гиперплоскость пересекает её не более, чем в n точках с учётом кратности пересечения. Заметим, что сильно выпуклые кривые по определению Поликановой могут не быть выпуклыми в указанном смысле. Например, гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{E}^3$, представляющая собой объединение четырех полуокружностей, вписанных в боковые грани куба, является сильно выпуклой и пересекается плоскостями, параллельными основаниям и расположенными между ними, в четырёх точках. Более того, эта кривая даже не имеет конечный порядок: боковые грани куба пересекают кривую по бесконечному множеству точек – полуокружности. Исследованием проективных выпуклых кривых занимались С. Анисов [11,12], Б. Шапиро [13] и другие.

Главный результат статьи (теорема 1) устанавливает, что класс кривых порядка n в $\mathbb{A}^n$ включается в класс слабо выпуклых кривых. Так как в свободном доступе имеется только 1-ая страница статьи В. Густина с анонсом его открытий, нам трудно судить о том, насколько существенна метрика пространства для обоснования утверждения и различаются ли доказательства для $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{E}^n$.

1. Необходимые факты из теории выпуклых множеств. Границу и внутренность множества X в $\mathbb{A}^n$ будем обозначать ∂X и $intX$ соответственно, а относительно содержащей его m-мерной плоскости через $\partial_m X$ и $int_m X$.

Множество называется *выпуклым*, если вместе с каждой своей парой точек оно содержит и прямолинейный отрезок с концами в этих точках.

Выпуклой оболочкой множества X называется минимальное выпуклое множество, содержащее X; минимальность понимается в том смысле, что всякое выпуклое множество, содержащее X, содержит и его выпуклую оболочку. Обозначается $conv\ X$.

Выпуклая оболочка $k+1$ точек общего положения называется *k-мерным симплексом* с вершинами в данных точках.

Экстремальной точкой множества X, иначе *крайней*, называется точка, не являющаяся внутренней ни для какого отрезка с концами в X. Множество экстремальных точек множества X будем обозначать $ext\ X$.

Сформулируем ряд фактов относительно выпуклых оболочек и экстремальных точек.

Предложение 1.
a) $K_1 \subset K_2 \quad \Rightarrow \quad convK_1 \subset convK_2.$
b) $convK_1 \cup convK_2 \ \subset \ conv(K_1 \cup K_2).$
c) $conv(convK) = convK.$

Предложение 2 [14, теор. 2.6, с. 20].
Выпуклая оболочка компактного множества компактна.

Предложение 3 (теор. Каратеодори) [14, теор. 2.4, с. 18].
Выпуклая оболочка множества X есть объединение всех m-мерных симплексов ($m \le n$) с вершинами в X.

Предложение 4 [14, пример 2.2, с. 18].
Пусть X, Y – непустые выпуклые множества. Тогда

$$conv(X \cup Y) = \bigcup_{A \in X,\ B \in Y} [AB]$$

Предложение 5 [14, замечание 4.1, с. 31].

Крайние точки выпуклого множества принадлежат его границе относительно содержащей его аффинной плоскости.

Предложение 6 (теор. Крейна-Мильмана) [14, теор. 4.2, с. 32].
Если выпуклое множество X компактно, то

$$X = conv(extX)\ .$$

Предложение 7 [14, теор. 4.1, с. 31].

$$ext(convX) \subset X.$$

Предложение 8 [14, пример 1.4, с. 10].
Граница n-мерного симплекса S есть объединение $(n-1)$-мерных симплексов S_j (его граней), натянутых на все вершины симплекса S, кроме j-ой.

2. Вспомогательные утверждения. Вывод основного результата опирается на леммы.

Лемма 1. *Если точка $C \in X$ не является крайней точкой множества $conv\ X$, то существует симплекс размерности ≥ 1 с вершинами в X, содержащий точку X в качестве своей внутренней точки.*

Доказательство. Если $C \in X$ не является крайней точкой множества $conv\ X$, то существуют точки $A, B \in conv\ X$, такие, что $C \in [AB]$ и $C \neq A$, $C \neq B$. По теор. Каратеодори (предл. 3) существуют симплексы S_A и S_B с вершинами в X, такие, что $A \in S_A$ и $B \in S_B$ (не исключено, что S_A и S_B – нульмерные симплексы, совпадающие с точками A и B соответственно). Пусть T – множество вершин обоих симплексов. Тогда $T \subset X$. По предл. 4

$$C \in conv(S_A \cup S_B).$$

Учитывая, что симплекс является выпуклой оболочкой своих вершин, на основании свойств выпуклых оболочек (предл. 1) выводим:

$$S_A \cup S_B \subset conv\ T \quad \Rightarrow$$

$$conv(S_A \cup S_B) \subset conv(conv\ T) = convT$$

и, следовательно,

$$C \in conv\ T.$$

Так как конечное множество T компактно, то по предл. 2 компактна и его выпуклая оболочка $conv\ T$. По теореме Крейна-Мильмана (предл. 6)

$$conv\ T = conv(ext(conv\ T)).$$

Значит,

$$C \in conv(ext(conv\ T)).$$

По предл. 3 найдется симплекс с вершинами в $ext(conv\ T)$, содержащий точку C. Пусть S – симплекс минимальной размерности m из всех таких симплексов, $m \leq n$. Заметим, что $C \notin ext(conv\ T)$, поскольку C внутренняя точка отрезка $[AB]$, причем, $A, B \in Conv\ T$. Поэтому $1 \leq m \leq n$. Если бы $C \in \partial_m S$, то точка C по предл. 8 принадлежала бы $(m-1)$-мерной грани симплекса S, что противоречило бы минимальности размерности m содержащего точку C симплекса. Значит, $C \in int_m S$. По предл. 7

$$ext(conv\ T) \subset T.$$

Вспоминая, что $T \subset X$, заключаем, что вершины симплекса S принадлежат множеству X. Симплекс S – требуемый.

Лемма 2. *Пусть C – внутренняя точка k-мерной грани*

$$S_0 = conv\{A_0, A_1, ..., A_k\}$$

n-мерного симплекса

$$S = conv\{A_0, A_1, ..., A_n\}$$

в $\mathbb{A}^n$, $1 \leq k \leq n$. Тогда гиперплоскость σ, проходящая через точки

$$A_2, \ldots, A_n, C,$$

разделяет точки A_0 и A_1.

Доказательство. Поскольку векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ линейно независимы, то их можно принять за базис векторного пространства $\mathbb{V}^n$, присоединенного к аффинному пространству $\mathbb{A}^n$. Рассмотрим аффинную систему координат $A_0\vec{e}_i$ с базисом $\vec{e}_i = \overrightarrow{A_0A_i}$, $i = 1, \ldots, n$. В ней вершины симплекса S имеют координаты:

$$A_0(0, 0, \ldots, 0), \quad A_i(0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0),$$

а точка C имеет координаты $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0)$, где

$$\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_k > 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i < 1$$

(это следует из предл. 8, если начало координат перенести в точку A_0).

Подставляя в уравнение гиперплоскости

$$\sigma:\ b_1x_1 + ... + b_nx_n + b_0 = 0 \qquad (2)$$

(здесь $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$) координаты точек $A_2, \ldots, A_n$, C, найдем коэффициенты уравнения гиперплоскости σ из системы

$$\begin{cases} b_2 + b_0 = 0 \\ b_3 + b_0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n + b_0 = 0 \\ b_1\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_k + b_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_2 = -b_0 \\ b_3 = -b_0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n = -b_0 \\ b_1 = \frac{(\alpha_2 + \cdots + \alpha_k - 1)b_0}{\alpha_1} \end{cases}.$$

Подставляя их в (2) и деля обе части равенства на b_0, получим уравнение гиперплоскости σ :

$$\frac{1-(\alpha_2+\cdots+\alpha_k)}{\alpha_1}\,x_1+x_2+\cdots+x_n-1=0.$$

Обозначим левую часть равенства через $f(M)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Тогда

$$f(A_0)=-1,\quad f(A_1)=\frac{1-(\alpha_2+\cdots+\alpha_k)}{\alpha_1}-1.$$

Учитывая, что $\alpha_2+\cdots+\alpha_k<1-\alpha_1$, оценим 2-е значение:

$$\frac{1-(\alpha_2+\cdots+\alpha_k)}{\alpha_1}-1>\frac{1+(\alpha_1-1)}{\alpha_1}-1=0\ \Rightarrow$$
$$f(A_1)>0.$$

Значит, точки A_0 и A_1 принадлежат разным открытым полупространствам, ограниченным гиперплоскостью σ, что и требовалось установить.

3. Основной результат. Доказанное ниже достаточное условие слабой выпуклости кривой усиливает более ранний результат автора [15], относящийся к кривым, являющимся компактными множествами.

Теорема. *Невырожденная кривая в $\mathbb{A}^n$ лежит на границе своей выпуклой оболочки, если всякая гиперплоскость пересекает ее не более чем в n точках.*

Доказательство. Пусть всякая гиперплоскость пересекает линию γ не более чем в n точках. Так как крайние точки выпуклого множества являются граничными для него (предл. 5), то достаточно доказать, что все точки линии γ – крайние для ее выпуклой оболочки. Допустим, что это не так: существует точка $C\in\gamma$, не являющаяся крайней для $conv\,\gamma$. По лемме 1 существует симплекс S размерности m, $1\le m\le n$ с вершинами на γ и содержащий точку C в качестве внутренней точки.

Если $m<n-1$, то, поскольку линия не содержится ни в какой гиперплоскости, можно указать еще $n-m-1$ точек линии γ, отличных от C, и таких, что вместе с вершинами симплекса S они образуют $(n-1)$-мерный симплекс $\bar{S}$. Тогда гиперплоскость, содержащая $(n-1)$-мерный симплекс $\bar{S}$, если $m<n-1$, или S, если $m=n-1$, будет иметь $n+1$ точек пересечения с γ, именно: вершины симплекса и точку C. А это противоречит определению γ. Следовательно, $m=n$.

Пусть $S=conv\{A_0,A_1,...,A_n\}$ – n-мерный симплекс, содержащий точку C в качестве внутренней. Вершины симплекса можно считать занумерованными в соответствии с одним из двух естественных порядков точек на γ (возрастания или убывания ответствующих им параметров). Более того, можно считать, что точка C не принадлежит дуге A_0A_1, в противном случае обратный порядок точек приведет нас к требуемой ситуации, поскольку дуги A_0A_1 и $A_{n-1}A_n$ не имеют общих внутренних точек. По лемме 2 гиперплоскость σ, проходящая через n точек $A_2,...,A_n,C$ общего положения, разделяет точки A_0 и A_1. Если бы дуга A_0A_1 не пересекала гиперплоскость σ, то она содержалась бы в объединении двух непересекающихся открытых полупространств, ограниченных гиперплоскостью σ и представляющих собой открытые множества в $\mathbb{A}^n$. Но связное множество, содержащееся в объединении двух непересекающихся открытых множеств пространств, целиком содержится в одном из них [16, теор. 7_G, с. 120]. Поэтому дуга A_0A_1, представляющая собой связное множество, должна целиком содержаться в одном из открытых полупространств, ограниченных σ. А это не так. Значит, дуга A_0A_1 пересекает гиперплоскость σ в некоторой точке D, отличной от A_0 и A_1. Точка D должна совпадать с одной из точек набора $A_2,\ldots,A_n,C$, так как иначе гиперплоскость σ пересекала бы линию γ в $n+1$ точках, что противоречило бы определению γ. Но $C\notin A_0A_1$. Поэтому D совпадает с одной из точек $A_2,\ldots,A_n$. Получили, что линия γ имеет точку самопересечения, что противоречит определению линии как одномерного многообразия. Полученное противоречие доказывает, что все точки линии γ суть крайние для ее выпуклой оболочки, а, значит, $\gamma\in\partial(conv\,\gamma)$, т. е. линия γ слабо выпукла в смысле Седых. Теорема доказана.

Эникой называется кривая в $\mathbb{A}^n$, задаваемая в некоторой аффинной системе координат параметризацией

$$\vec{r}(t)=(t;t^2;t^3;\cdots;t^n)$$

(здесь верхние индексы обозначают степени). В $\mathbb{E}^n$ она называется кривой моментов. Учитывая, что эника пересекается с каждой гиперплоскостью не более чем в n точках [17, следствие 8], выводим

Следствие. *Эника в $\mathbb{A}^n$ лежит на границе своей выпуклой оболочки.*

Заключение. Таким образом, класс слабо выпуклых кривых в аффинном и евклидовом пространствах является самым широким из рассмотренных выше обобщений выпуклой кривой и совпадает в размерности 2 с классом обычных выпуклых кривых, а класс выпуклых кривых, определяемых через порядок, совпадает в размерности 2 с классом строго выпуклых замкнутых кривых. Неизученным остается вопрос о соотношении классов выпуклых кривых в смысле Поликановой и выпуклых кривых, определяемых через порядок множества. Приведенный во введении пример сильно выпуклой кривой показывает, что они не совпадают.

Библиографический список

1. Климов В.С. О локально выпуклых кривых //Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 5. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-567-577.

2. Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. New York, 1997.

3. Запутряева Е.С. Изгибания равносторонних многоугольников с сохранением индекса // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-567-577.

4. Christian Bar. Elementary Differential Geometry. Cambridge, 2010.

5. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М., 2004.

6. Седых В.Д. Теорема о четырех вершинах пространственной кривой // Функцион. анализ и его прил. 1992. Т. 26, вып. 1.

7. Седых В.Д. Теорема о четырех вершинах плоской кривой и ее обобщения // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 9.

8. Поликанова И.В. Выпуклые кривые в $\mathbb{E}^n$. Новосибирск, 1984.

9. Schoenberg I.J. An isoperimetric inequality for closed curves convex in even-dimensonal euclidean spaces // Acta mathematica. 1954. T. 91.

10. Gustin W. Sets of finite planar order. //Duke Math. Journal. 1947. T. 14.

11. Анисов С.С. Выпуклые кривые в RP^n // Локальные и глобальные задачи теории особенностей: сб. ст. к 60-летию академика Владимира Игоревича Арнольда (Россия, Москва). Тр. МИАН. 1998. Т. 221.

12. Anisov S.S. Projective convex curves //The Arnold-Gelfand mathematical seminars: geometry and singularity theory. Boston, MA. 1997.

13. Shapiro B. Discriminants of convex curves are homeomorphic //Proceedings of the American Math. Soc. 1998. Vol. 126, № 7.

14. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М., 1985.

15. Поликанова И.В. О линиях с фиксированным максимумом точек пересечения с гиперплоскостями: сб. трудов XVII региональной конф. по математике «МАК-2014», посвящ. 40-летию факультета математики и информ. техн. Барнаул, 2014.

16. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

17. Поликанова И.В. Пересечения полиномиальных линий с плоскостями // Известия Алт. гос. ун-та. 2017. Т. 96, № 4. DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-26.