

УДК 539.3

Метод локальных аппроксимаций в построении высокоточных МНКЭ малой размерности для расчета композитных тел

А.Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск, Россия)

The Method of Local Approximations in the Construction of High-Precision Small-dimensional MgFE for the Calculation of Composite Bodies

A.D. Matveev

Institute of Computational Modelling SB RAS (Krasnoyarsk, Russia)

Для анализа напряженного состояния композитных тел (КТ) эффективно используется метод многосеточных конечных элементов. При построении по известным процедурам многосеточного конечного элемента (МНКЭ), кратко — стандартного МНКЭ, используются мелкая (базовая) сетка и крупные, вложенные в мелкую. Мелкая сетка порождена базовым разбиением, которое учитывает неоднородную, микронеоднородную структуру МНКЭ, крупные сетки применяются для понижения его размерности. Для стандартного МНКЭ характерно то, что всякая крупная сетка и отвечающие ей аппроксимации перемещений определяются на всей его области. Это приводит к увеличению размерности стандартного МНКЭ при построении на крупных сетках аппроксимаций высокого порядка, которые используются для повышения его порядка точности. Стандартные высокоточные МНКЭ, т.е. высокого порядка точности, имеют большую размерность, что затрудняет их применение.

В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных МНКЭ малой размерности (кратко — малоразмерных МНКЭ), которые используются при расчете упругих КТ и проектируются на базе стандартных. Основная идея МЛА состоит в том, что в центральной части области малоразмерного МНКЭ на крупных сетках определяются локальные аппроксимации перемещений высокого порядка, в окрестности границы области — малого порядка, что позволяет с помощью различных локальных аппроксимаций варьировать размерность и порядок точности малоразмерного МНКЭ. Показаны два подхода построения малоразмерных МНКЭ, в случае их сложной формы применяются образующие конечные элементы. Расчеты показывают, что малоразмерные МНКЭ порождают в КТ максимальные эквивалентные напряжения, погрешности которых в 15÷50 раз меньше погрешностей аналогичных напряжений, отвечающих стандартным МНКЭ, т.е. малоразмерные МНКЭ эффективнее стандартных.

The method of multigrid finite elements is effectively used to analyze the stress state in composite bodies (CB). When constructing a multigrid finite element (MgFE), briefly a standard MgFE, using known procedures, a fine grid, and large ones nested in a fine one are used. The fine grid is generated by partitioning, which takes into account the heterogeneous structure of the MgFE, large grids are used to reduce its dimension. For a standard MgFE, it is characteristic that every large grid and the corresponding approximations of displacements are determined throughout its entire area. This leads to an increase in the dimension of the standard MgFE when constructing high-order approximations on large grids, which are used to increase its order of accuracy. Standard high-precision MgFE, i.e. of high order of accuracy, have a large dimension, which makes their application difficult.

In this paper, a method of local approximations (MLA) for constructing high-precision small-dimensional MgFE (short — small-sized MgFE) is proposed. Such MgFE are used to calculate elastic CB and are designed on the basis of standard. The main idea of the MLA is that local approximations of high-order displacements are determined on large grids in the central part of the region of a small-sized MgFE, and in the vicinity of the boundary of the region — of a small order, which allows using various local approximations to vary the dimension and order of accuracy of a small-sized MgFE. Two approaches to the construction of small-sized MgFE are shown, in the case of their complex shape, forming finite elements are used. Calculations show that small-sized MgFE generate stresses in the CB, the errors of which are 15÷50 smaller than the errors of similar stresses corresponding to standard MgFE, i.e. small-sized MgFE are more effective than standard ones. The use of small-sized MgFE in calculations makes it possible to determine stresses with a small error for large CB partitions.

Применение в расчетах малоразмерных МнКЭ позволяет для крупных разбиений КТ определять напряжения с малой погрешностью.

Ключевые слова: упругость, композиты, стандартные и малоразмерные МнКЭ, локальные аппроксимации, образующие конечные элементы.

DOI: 10.14258/izvasu(2022)4-20

Введение

Расчет на статическую прочность упругой конструкции (тела), как правило, проводится по запасам прочности [1–3] и сводится к определению максимального эквивалентного напряжения конструкции [1, с. 167]. Если напряжения определяются приближенно, то используются скорректированные условия прочности [4], которые учитывают погрешность напряжений. При анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих тел активно используется метод конечных элементов (МКЭ) [5–11]. Базовые дискретные модели (БМ) тел, которые учитывают их неоднородную структуру в рамках микроподхода [12, с. 58] с помощью конечных элементов (КЭ) 1-го порядка, имеют высокую размерность. Для понижения размерностей дискретных моделей результативно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [13–15], который реализуется на основе функционала Лагранжа (в перемещениях) [16, с. 16]. Особенно эффективно ММКЭ используется при решении задач теории упругости [17–21] для композитных тел (КТ). При построении по известным процедурам многосеточного конечного элемента (МнКЭ) [15, 22–24], кратко — стандартного МнКЭ, используются мелкая (базовая) сетка и крупные, вложенные в мелкую. Мелкая сетка порождена базовым разбиением, которое учитывает неоднородную структуру МнКЭ, крупные сетки применяются для понижения его размерности, т.е. неоднородная структура КТ учитывается с помощью базовых разбиений МнКЭ. Поскольку при построении n — сеточного КЭ используется не одна, а n вложенных сеток, где $n \geq 2$, то ММКЭ можно считать обобщением МКЭ, т.е. МКЭ — частный случай ММКЭ. Отсюда следует, что если в расчетах тел по МКЭ применяются МнКЭ, то в этом случае, по сути, реализуется ММКЭ. Существующие методы решения задач упругости для КТ имеют сложные формулировки и трудно реализуемы [25–32], [25, с. 62–66; 26, с. 50–53]. В настоящее время проектируются различного вида КЭ [33–35], но подходы и методы построения высокоточных КЭ малой размерности не рассматриваются. На практике широко применяются тела с неоднородной регулярной структурой, которые с позиций макроподхода рассматриваются как фиктивные изотропные однородные тела. НДС для таких КТ с различными коэф-

Key words: elasticity, composites, standard and small-sized MgFE, local approximations forming finite elements.

фициентами заполнения определяются с помощью фиктивных модулей упругости, процедуры нахождения которых показаны в [36] для двумерных композитов, в [37] — для трехмерных.

Для уменьшения погрешности решений используются высокоточные МнКЭ, т.е. МнКЭ высокого порядка точности, которые имеют большую размерность, что затрудняет их применение. Недостаток ММКЭ состоит в том, что при построении по ММКЭ решений с малой погрешностью для КТ с помощью стандартных МнКЭ используются дискретные модели тел высокой размерности. Для решения данной проблемы здесь предлагаются МнКЭ, которые для крупных дискретных моделей КТ порождают почти точные максимальные эквивалентные напряжения.

В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных МнКЭ малой размерности, кратко — малоразмерных МнКЭ, которые применяются при расчете по ММКЭ упругих однородных и КТ и проектируются на основе стандартных. Следует отметить, что МЛА, по сути, порождает новые подходы построения МнКЭ. Здесь рассмотрены два подхода. Согласно МЛА при построении малоразмерного МнКЭ используются локальные аппроксимации перемещений, которые определяются на крупных сетках его подобластей. При построении малоразмерного МнКЭ в центральной части его области применяются локальные аппроксимации перемещений высокого порядка, в окрестности границы области — малого порядка, что позволяет с помощью различных локальных аппроксимаций варьировать размерность и порядок точности малоразмерного МнКЭ. Показаны две процедуры построения малоразмерных МнКЭ, в случае их сложной формы применяются образующие конечные элементы [24]. Расчеты показывают, что малоразмерные МнКЭ порождают в КТ максимальные эквивалентные напряжения, погрешности которых в 15–50 раз меньше погрешностей аналогичных напряжений, полученных с применением стандартных МнКЭ, на основе которых построены малоразмерные. Применение в расчетах тел по ММКЭ предлагаемых малоразмерных МнКЭ позволяет для крупных разбиений КТ определять максимальные эквивалентные напряжения с малой погрешностью.

1. Процедура построения стандартных МНКЭ

Процедуру построения стандартных МНКЭ на основе функционала Лагранжа, не теряя общности суждений, покажем на примере двухсеточного конечного элемента (2сКЭ) $V_d^{(2)}$ размерами $8h \times 8h \times 8h$, где h зада-

но (рис. 1). Здесь и далее МНКЭ на рисунках показаны в локальной декартовой системе координат $Oxuz$. 2сКЭ $V_d^{(2)}$ армирован волокнами сечением $h \times h$, параллельными оси Oy . На рисунке 2 сечения волокон закрашены, расстояние между волокнами равно h .

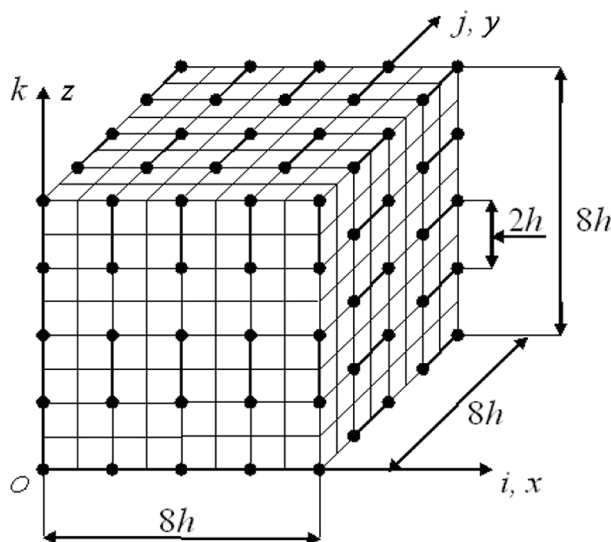


Рис. 1. Сетки 2сКЭ $V_d^{(2)}$

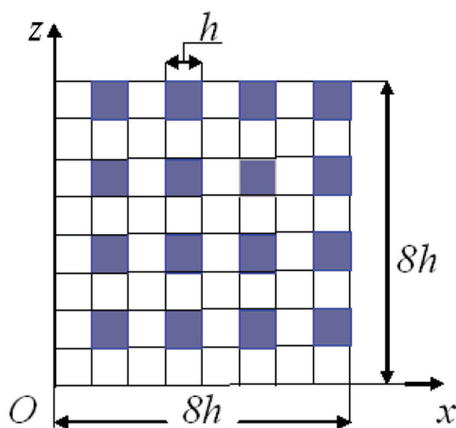


Рис. 2. Сечение 2сКЭ $V_d^{(2)}$

Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ связи идеальны (т.е. на общих границах разномодульных изотропных однородных тел функции перемещений и напряжений непрерывны), а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающим трехмерной задаче линейной теории упругости [17–21]. Итак, во всей об-

ласти 2сКЭ $V_d^{(2)}$ реализуется трехмерное НДС [21, с. 41]. Область 2сКЭ $V_d^{(2)}$ представляем БМ R_d , состоящей из однородных односеточных КЭ (1сКЭ) V_j^h первого порядка формы куба со стороной h [9–11], $j = 1, \dots, M$; M — общее число 1сКЭ V_j^h , $M = 512$. БМ R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$ учитывает его неоднородную структуру и порождает мелкую равномерную сетку h_d размерностью $9 \times 9 \times 9$ с шагом h (рис. 1). На сетке h_d опреде-

ляем крупную равномерную сетку $H_d^{(2)}$ размерностью $5 \times 5 \times 5$ с шагом $2h$, узлы которой на рисунке 1 отмечены точками, 125 узлов. Полную потенциальную энергию Π_d БМ R_d 2сКЭ $V_d^{(2)}$ (т.е. функционал Лагранжа [16, с. 16]) представим в форме [10, 11]:

$$\Pi_d = \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T [K_j^h] \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j \right), \quad (1)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_2 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 N_{ijk} w_{ijk}, \quad (2)$$

где $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$ — значения функций u_2, v_2, w_2 в узле i, j, k сетки $H_d^{(2)}$; i, j, k — координаты целочисленной системы координат ijk , введенной для узлов сетки $H_d^{(2)}$

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^5 \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^5 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}, \quad L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^5 \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}, \quad (3)$$

где x_p, y_p, z_p — координаты узла i, j, k сетки $H_d^{(2)}$ в системе координат $Oxyz$.

Обозначим: $N_\beta = N_{ijk}, u_\beta = u_{ijk}, v_\beta = v_{ijk}, w_\beta = w_{ijk}$, где $i, j, k = 1, \dots, 5$, т.е. $\beta = 1, \dots, 125$.

Тогда выражения (2) принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{125} N_\beta w_\beta. \quad (4)$$

Обозначим: $\mathbf{q}_d = \{u_1, \dots, u_{125}, \dots, v_1, \dots, v_{125}, \dots, w_1, \dots, w_{125}\}^T$ вектор узловых перемещений крупной сетки $H_d^{(2)}$ (вектор неизвестных 2сКЭ $V_d^{(2)}$). Используя (4), компоненты вектора \mathbf{q}_j узловых неизвестных 1сКЭ V_j^h выражаем через компоненты вектора \mathbf{q}_d в результате получим

$$\mathbf{q}_j = [A_j^d] \mathbf{q}_d, \quad (5)$$

где $[A_j^d]$ — прямоугольная матрица, $j = 1, \dots, M$.

Подставляя (5) в (1) из условия $\partial \Pi_d / \partial \mathbf{q}_d = 0$, получаем $[K_d] \mathbf{q}_d = \mathbf{F}_d$, где

$$[K_d] = \sum_{j=1}^M [A_j^d]^T [K_j^h] [A_j^d], \quad \mathbf{F}_d = \sum_{j=1}^M [A_j^d]^T \mathbf{P}_j, \quad (6)$$

где $[K_d], \mathbf{F}_d$ — матрица жесткости (размерности 375×375) и вектор узловых сил (размерности 375) стандартного 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

Особенность стандартных 2сКЭ заключается в том, что всякая крупная сетка стандартного 2сКЭ и отвечающие ей аппроксимации перемещений определяются на всей его области. Пусть стандартный 2сКЭ формы куба имеет равномерную крупную сет-

где $[K_j^h]$ — матрица жесткости, $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$ — векторы узловых сил и неизвестных 1сКЭ V_j^h , T — транспонирование.

С помощью полиномов Лагранжа [10] на сетке $H_d^{(2)}$ определяем аппроксимирующие функции перемещений u_2, v_2, w_2 2сКЭ $V_d^{(2)}$ в виде

(рис. 1); $N_{ijk}(x, y, z)$ — базисная функция узла i, j, k сетки $H_d^{(2)}$, $i, j, k = 1, \dots, 5$, где $N_{ijk} = L_i(x) L_j(y) L_k(z)$,

ку размерностью $(n+1) \times (n+1) \times (n+1)$. Тогда данный 2сКЭ называется 2сКЭ n -го порядка. Поскольку равномерная крупная сетка $H_d^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$ имеет размерность $5 \times 5 \times 5$, то 2сКЭ $V_d^{(2)}$ называется 2сКЭ 4-го порядка.

Замечание 1. Решение, построенное для крупной сетки $H_d^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$, с помощью формулы (5) проецируется на мелкую сетку h_d БМ R_d 2сКЭ, что позволяет вычислять напряжения в любом 1сКЭ V_j^h БМ R_d , следовательно, можно определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры 2сКЭ $V_d^{(2)}$.

Замечание 2. В силу (5) размерность вектора \mathbf{q}_d (размерность 2сКЭ $V_d^{(2)}$) не зависит от числа M , т.е. от размерности БМ R_d . Следовательно, для учета в 2сКЭ $V_d^{(2)}$ неоднородной структуры можно использовать сколь угодно мелкие БМ R_d , состоящие из 1сКЭ V_j^h . В этом случае в 1сКЭ V_j^h сколь угодно точно описывается трехмерное НДС (без упрощающих гипотез).

Замечание 3. Отметим случай, когда 2сКЭ $V_d^{(2)}$ имеет сложную форму и его крупная сетка имеет внешние узлы, которые совпадают с узлами крупных сеток соседних с ним 2сКЭ. В этом случае при построении 2сКЭ $V_d^{(2)}$ во всех узлах его мелкой сетки перемещения u, v, w выражаются через узловые перемещения крупной сетки $H_d^{(2)}$ 2сКЭ $V_d^{(2)}$, кроме тех узлов мелкой сетки, которые совпадают с узлами (со стыковочными узлами) крупных сеток соседних 2сКЭ и сетки $H_d^{(2)}$, что обеспечивает стыковку 2сКЭ $V_d^{(2)}$ с соседними 2сКЭ. Процедура построения (трехсеточных) 3сКЭ изложена в работах [13, 15].

2. Первый подход построения малоразмерных МнКЭ

В МЛА локальные аппроксимации перемещений определяются на подобластях МнКЭ. Суть 1-го под-

хода состоит в следующем. Область V_0 стандартного МнКЭ V_s представляем m внутренними и n граничными областями, $m > n$. Граничная (внутренняя) область имеет общую границу (не имеет общей границы) с границей области V_0 . На граничных (внутренних) областях определяем n (m) крупных сеток, которые вложены в мелкую базовую сетку H МнКЭ V_s и порождают аппроксимации перемещений малого (высокого) порядка. На границе области V_0 число узлов крупных сеток мало. На граничных и внутренних областях, используя их мелкие и крупные сетки, строим n граничных и m внутренних 2сКЭ, которые образуют высокоточный p — сеточный КЭ (рсКЭ), где $p = 1+n+m$. Отметим, что при построении рсКЭ используются одна мелкая сетка H и $n+m$ (в общем случае различных) крупных сеток. Выражая с помощью метода конденсации [10, с. 248] в рсКЭ перемещения внутренних узлов через перемещения его граничных узлов, получаем высокоточный рсКЭ малой размерности, т.е. малоразмерный рсКЭ. Следует отметить, что математические операции метода конденсации являются математическими тождественными преоб-

разованиями, т.е. они не влияют на погрешность решения. Основные положения реализации 1-го подхода показаны в примере 1.

Пример 1. Рассмотрим модельную задачу определения НДС по ММКЭ для тела V_0^1 с неоднородной структурой размерами $16h \times 64h \times 16h$, которое лежит в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 3), где h задано. Тело V_0^1 армировано непрерывными волокнами сечением $h \times h$, параллельными оси Oy , расстояние между волокнами равно h , при $y = 0$: $u, v, w = 0$, т.е. при $y = 0$ КТ V_0^1 жестко закреплено. Имеем следующие исходные данные:

$$h = 0,5; E_c = 1, E_v = 10, \nu_c = \nu_v = 0,3, \quad (7)$$

где E_c, E_v (ν_c, ν_v) — модули Юнга (коэффициенты Пуассона) соответственно связующего материала и волокна; в точках тела V_0^1 с координатами x_i, y_j, z , где $z = 16h, x_i = 16h(i - 1), i = 1, 2, y_j = 8hj, j = 1, \dots, 8$, действует нагрузка $F_z = 0,45$ (рис. 3). Сечение тела V_0^1 в плоскости Oxz показано на рисунке 4, сечения волокон закрашены.

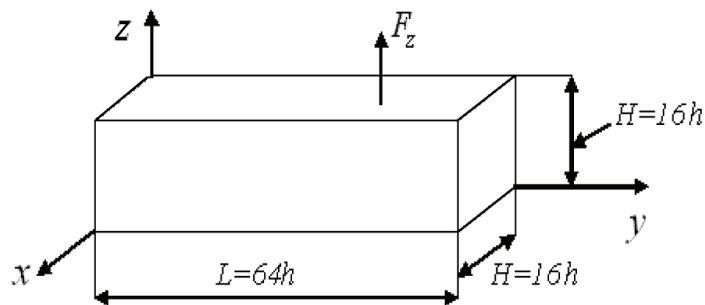


Рис. 3. Размеры КТ V_0^1

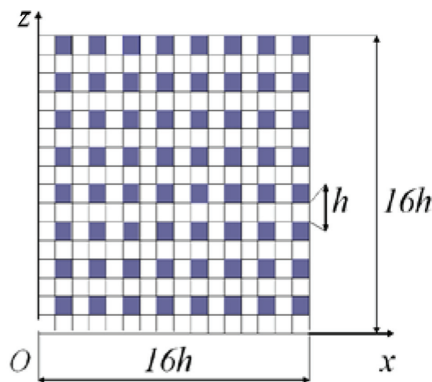


Рис. 4. Сечение КТ V_0^1 (2сКЭ $V_q^{(2)}$)

БМ R_0^1 КТ V_0^1 состоит из 1сКЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в V_j^h реализуется трехмерное НДС [21, с. 41]), которые учитывают неоднородную структуру КТ и порождают сетку с шагом h размерностью $17 \times 65 \times 17$.

Дискретная модель R_1^1 КТ V_0^1 состоит из четырех стандартных 2сКЭ $V_q^{(2)}$ 4-го порядка формы куба, по-

строенных на области V_q размерами $16h \times 16h \times 16h$ (рис. 5). На рисунках 4, 5 показаны сечение 2сКЭ $V_q^{(2)}$ в плоскости Oxz (волокна закрашены) и его крупная равномерная сетка с шагом $4h$ размерностью $5 \times 5 \times 5$, узлы отмечены точками, 125 узлов. Матрицу жесткости (размерности 375×375) и вектор узловых сил (размерности 375) 2сКЭ $V_q^{(2)}$ определяем по процедуре п. 1.

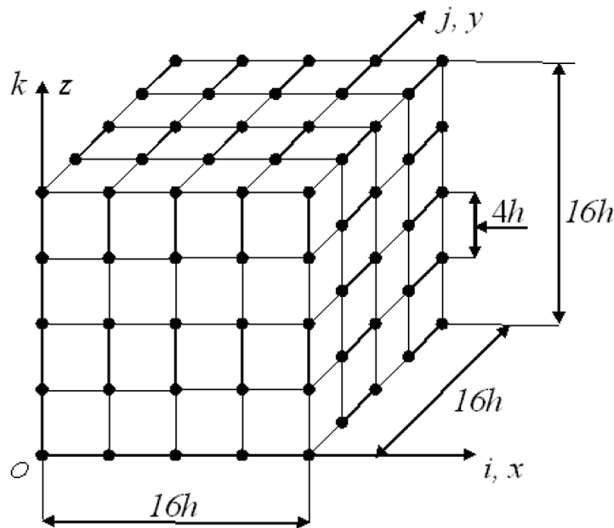


Рис. 5. Область V_q , 2сКЭ $V_q^{(2)}$

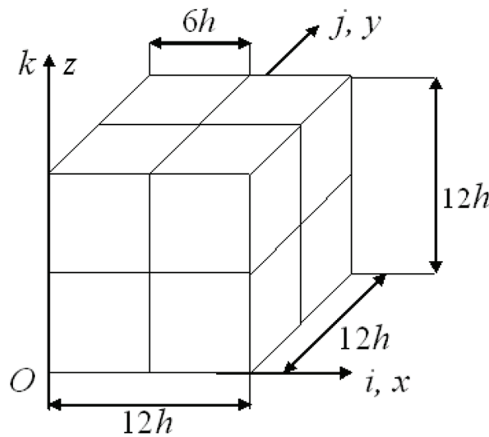


Рис. 6. Область V_0

Дискретная модель R_2^1 КТ V_0^1 состоит из 4-х малоразмерных МнКЭ $V_p^{(1)}$ размерами $16h \times 16h \times 16h$, сечение которых показаны на рисунке 4. Построение малоразмерного МнКЭ $V_p^{(1)}$ на базе стандартного 2сКЭ $V_q^{(2)}$ сводится к следующему. В центральной части стандартного 2сКЭ $V_q^{(2)}$ (рис. 5) выделяем восемь

внутренних одинаковых областей V_1 размерами $6h \times 6h \times 6h$, которые образуют область V_0 размерами $12h \times 12h \times 12h$ (рис. 6), и на которых строим 8 одинаковых внутренних 2сКЭ $V_1^{(2)}$ 3-го порядка размерами $6h \times 6h \times 6h$ (рис. 7).

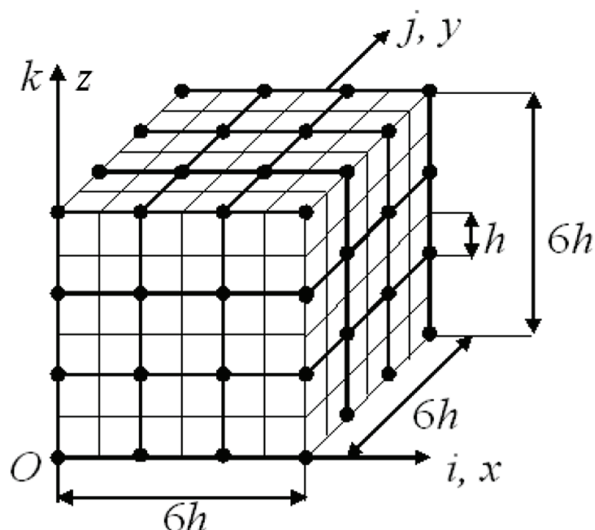


Рис. 7. Сетки 2сКЭ $V_1^{(2)}$

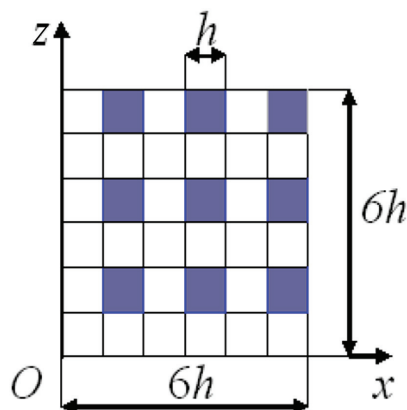


Рис. 8. Сечение 2сКЭ $V_1^{(2)}$

Равномерные (крупная и мелкая) сетки с шагами $2h$ и h 2сКЭ $V_1^{(2)}$ показаны на рисунке 7, где узлы крупной сетки размерности $4 \times 4 \times 4$ отмечены точками, 64 узла, его сечение в плоскости Oxz (рис. 8), где сечения волокон размерами $h \times h$ закрашены. Матрицу жесткости (размером 292×192) и вектор узловых сил (размерности 192) 2сКЭ $V_1^{(2)}$ находим по процедуре п. 1. Внутреннюю область V_0 2сКЭ $V_q^{(2)}$ (рис. 5, 6) окружают восемь одинаковых по форме и с одинаковыми характерными размерами $8h \times 8h \times 8h$ граничных областей V_2 сложной формы толщиной $2h$ (рис. 9). На граничной области V_2 строим 2сКЭ $V_2^{(2)}$, используя мелкую равномерную сетку с шагом h и крупную (равномерную) сетку $H_2^{(2)}$ размерами $8h \times 8h \times 8h$ с шагом $4h$ размерностью $3 \times 3 \times 3$, узлы сетки $H_2^{(2)}$ на ри-

сунке 10 отмечены точками, 27 узлов. На границе области V_q узлы сетки $H_2^{(2)}$ совпадают с узлами крупной сетки 2сКЭ $V_q^{(2)}$ (рис. 5). Восемь узлов сетки $H_2^{(2)}$ лежат вне области V_2 , но совпадают с узлами крупной сетки соседнего 2сКЭ $V_1^{(2)}$.

При построении 2сКЭ $V_2^{(2)}$ во всех узлах его мелкой сетки искомые перемещения u, v, w (используя аппроксимации, построенные на крупной сетке $H_2^{(2)}$) выражаем через узловые перемещения сетки $H_2^{(2)}$, кроме тех узлов мелкой сетки, которые совпадают с узлами сетки $H_2^{(2)}$ (27 узлов) и с граничными узлами крупной сетки 2сКЭ $V_1^{(2)}$ (37 узлов). Эти узлы обеспечивают стыковку 2сКЭ $V_1^{(2)}$ и $V_2^{(2)}$, на рисунке 9 эти (стыковочные) узлы отмечены точками (см. замечание 3 п. 1). Таким образом, 2сКЭ $V_2^{(2)}$ имеет 64

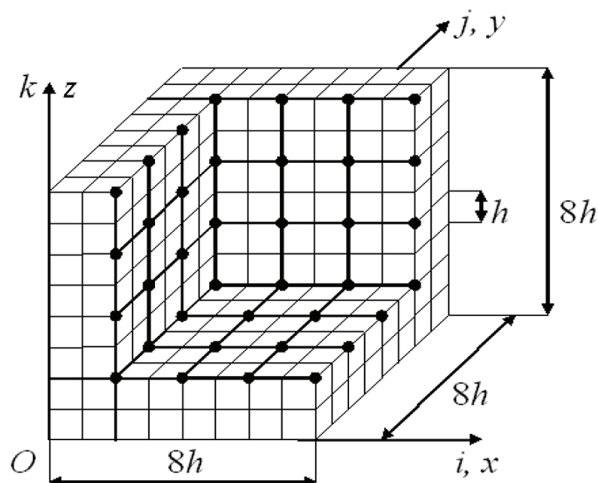


Рис. 9. Область V_2 , 2сКЭ $V_2^{(2)}$

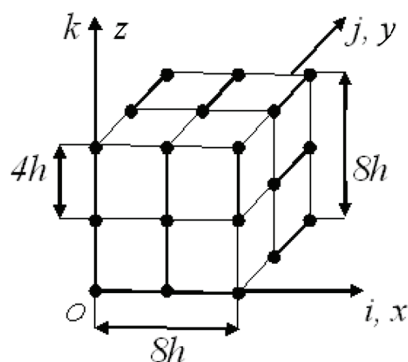


Рис. 10. Сетка $H_2^{(2)}$ 2сКЭ $V_2^{(2)}$

узла, т.е. матрицу жесткости размерности 192×192 и вектор узловых сил размерности 192. Итак, область V_q (рис. 5) представляют восемь внутренних 2сКЭ типа $V_1^{(2)}$ и восемь граничных 2сКЭ типа $V_2^{(2)}$, которые образуют высокоточный МНКЭ R_p^1 . Выражая в МНКЭ R_p^1 перемещения внутренних узлов (с помощью метода конденсации [10]) через перемещения граничных его узлов, получаем малоразмерный МНКЭ $V_p^{(1)}$, имеющий на границе такое же число неизвестных, как стандартный 2сКЭ $V_q^{(2)}$.

Результаты расчетов КТ V_0^1 по ММКЭ с применением дискретных моделей R_0^1 , R_1^1 и R_2^1 даны в таблице 1, где σ_n^1 — максимальное эквивалентное напряжение модели R_n^1 , определяемое по 4-й теории прочности [1, с. 167], N_n^0 и b_n^0 — размерность и ширина ленты системы уравнений (СУ) ММКЭ модели R_n^1 , $n = 0, 1, 2$. Считаем, что БМ R_0^1 порождает точное решение. Тогда погрешность δ_n для напряжения σ_n^1 определяем по формуле $\delta_n(\%) = 100\% \times |\sigma_0^1 - \sigma_n^1| / \sigma_0^1$, где $n = 1, 2$.

Таблица 1

Результаты расчетов моделей R_0^1, R_1^1, R_2^1

n	R_n^1	σ_n^1	$\delta_n(\%)$	N_n^0	b_n^0
0	R_0^1	4,3476	–	55488	924
1	R_1^1	3,691	15,092	1200	375
2	R_2^1	4,306	0,933	1200	375

Анализ результатов таблицы 1 показывает, что погрешность напряжения σ_2^1 , которое отвечает модели R_2^1 , состоящей из малоразмерных МНКЭ $V_p^{(1)}$,

$$\text{в } k_1 = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{15,092}{0,933} = 16,175 \text{ раз меньше погрешности}$$

напряжения σ_1^1 , отвечающего модели R_1^1 , состоящей из стандартных 2СКЭ $V_q^{(2)}$. Дискретная модель R_2^1 тре-

$$\text{бует в } k_2 = \frac{N_0 \times b_0}{N_1^0 \times b_1^0} = \frac{55488 \times 924}{1200 \times 375} = 113,94 \text{ раз мень-$$

ше объема памяти ЭВМ, т.е. почти в 114 раз меньше, чем БМ R_0^1 КТ V_0^1 . Необходимо отметить следующее.

Согласно замечанию 2 (см. п. 1) при построении малоразмерного МНКЭ можно использовать сколь угодно мелкую базовую сетку. Тогда крупные сетки малоразмерного МНКЭ могут иметь сколь угодно высокую размерность и, следовательно, порождают (на внутренних областях МНКЭ) локальные аппроксимации перемещений сколь угодно высокого порядка, и число таких (внутренних областей в МНКЭ) локальных аппроксимаций перемещений возрастает. При этом порядок локальных аппроксимаций перемещений на граничных областях и их число не меняется. Это приводит к увеличению порядка точности малоразмерных МНКЭ при постоянстве их размерности. Поэтому такие высокоточные МНКЭ называем МНКЭ малой размерности, т.е. малоразмерными. Однако порядок точности малоразмерных МНКЭ

не может быть сколь угодно большим, поскольку реализация метода конденсации, связанная с матрицами высокого порядка, требует большого объема памяти ЭВМ, который ограничен.

3. Второй подход построения малоразмерных МНКЭ

Основные идеи 2-го подхода состоят в следующем. Локальные аппроксимации перемещений высокого порядка определяются на подобластях всей области V_α стандартного МНКЭ. В этом случае область V_α представляется стандартными МНКЭ V_e^0 высокого порядка, которые образуют высокоточный МНКЭ V_p^0 . Часть перемещений граничных узлов МНКЭ V_p^0 выражаем через узловые перемещения сеток малой размерности, которые задаются для граничных МНКЭ V_e^0 . Основные положения реализации 2-го подхода показаны в примере 2.

Пример 2. Рассмотрим модельную задачу расчета КТ V_0^2 размерами $H \times L \times H$, расположенного в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 11), где $H = 12h_0$, $L = 48h_0$, h_0 — задано. Тело V_0^2 армировано непрерывными волокнами сечением $h_0 \times h_0$, параллельными оси Oy , расстояние между волокнами равно $2h_0$. При $y = 0$ тело V_0^2 жестко закреплено. Используем исходные данные (7). В точках тела V_0^2 с координатами x_i, y_j, z , где $x_i = 6h_0(i - 1)$, $i = 1, 2, 3$, $y_j = 6h_0 j$, $j = 1, \dots, 8$, $z = 12h_0$, действует нагрузка $F_z = 0,097$ (рис. 11), $1/4$ часть сечения тела V_0^2 размерами $6h_0 \times 6h_0$ в плоскости Oxz показана на рисунке 12, где сечения волокон закрашены.

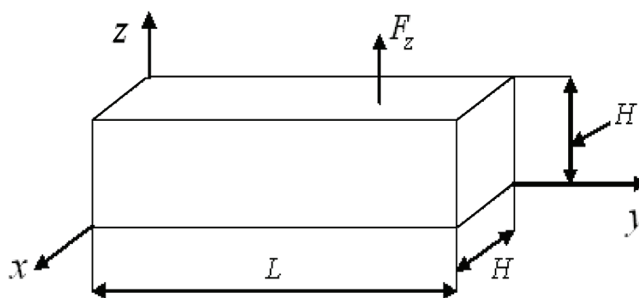


Рис. 11. Размеры тела V_0^2

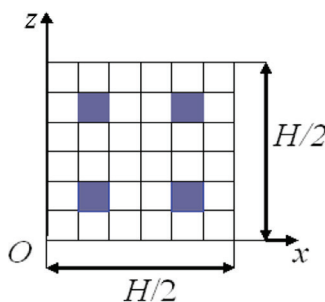


Рис. 12. 1/4 часть сечения КТ V_0^2

Дискретная модель R_1^2 КТ V_0^2 состоит из четырех стандартных 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ 4-го порядка, построенных по процедуре п. 1 на области V_α размерами $12h_0 \times 12h_0 \times 12h_0$.

Область V_α и крупная сетка размерностью $5 \times 5 \times 5$ (с шагом $3h_0$) 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ показаны на рисунке 13, где $H = 12h_0$, $B = 3h_0$. Рассмотрим построение малоразмерного МНКЭ $V_p^{(2)}$ на базе стандартного 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$. Мелкая базовая сетка 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ имеет малую размерность $13 \times 13 \times 13$. В этом случае при построении МНКЭ

$V_p^{(2)}$ для области V_α используем более мелкую сетку h_p с шагом $h = h_0/2$, размерности $25 \times 25 \times 25$, чем базовая сетка, тогда $H = 24h$, $L = 96h$, $B = 6h$.

БМ R_0^2 КТ V_0^2 определяется для мелкой сетки h_p области V_α , т. е. БМ R_0^2 состоит из 1сКЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h (в 1сКЭ V_j^h реализуется трехмерное НДС [20]), которые учитывают неоднородную структуру КТ V_0^2 и образуют равномерную сетку с шагом h размерностью $25 \times 97 \times 25$.

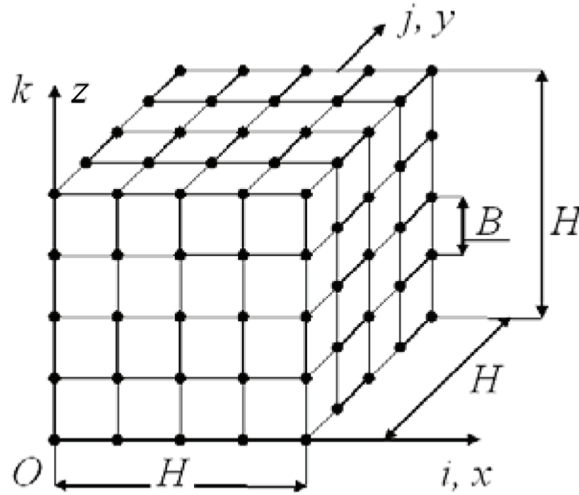


Рис. 13. Область V_α , 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$

Согласно 2-му подходу область стандартного 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ размерами $24h \times 24h \times 24h$ представляем стандартными 2сКЭ $V_3^{(2)}$ 3-го порядка размерами $6h \times 6h \times 6h$, которые образуют высокоточный МНКЭ V_p^0 . На рисунке 14 показана мелкая сетка 2сКЭ $V_3^{(2)}$ с шагом h и равномерная крупная сетка с шагом $2h$ размерностью $4 \times 4 \times 4$, узлы крупной сетки отмечены точками, 64 узла. Матрицу жесткости (размерность 192×192) и вектор узловых сил (размерность 192) 2сКЭ $V_3^{(2)}$

определяем по процедуре п. 1. Для граничных стандартных 2сКЭ $V_3^{(2)}$ (рис. 14), задается сетка H_3 размерами $6h \times 6h \times 6h$ с шагом $6h$ малой размерности. На рисунке 15 узлы сетки H_3 отмечены точками, 8 узлов. Узловые перемещения граничных 2сКЭ $V_3^{(2)}$, лежащих на границе МНКЭ V_p^0 , выражаем (с помощью аппроксимаций, построенных на сетке H_3) через узловые перемещения сетки H_3 и получаем высокоточный МНКЭ V_p .

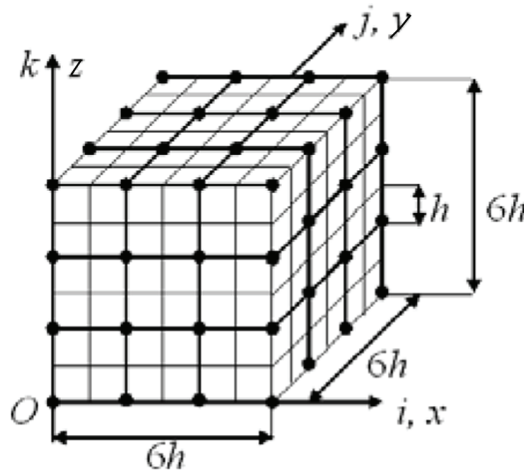


Рис. 14. Сетки 2сКЭ $V_3^{(2)}$

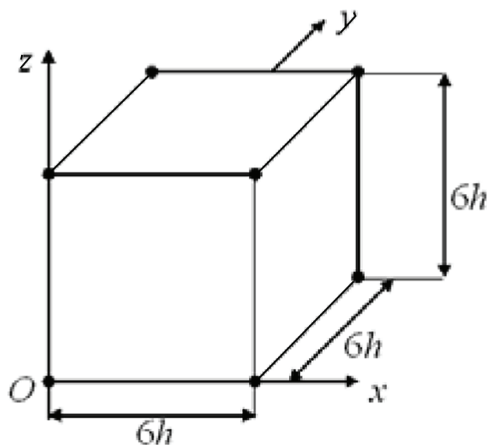


Рис. 15. Сетка H_3

С помощью метода конденсации [10] выражаем перемещения внутренних узлов МнКЭ V_p через перемещения узлов, лежащих на его границе. В результате получаем малоразмерный МнКЭ $V_p^{(2)}$, который на границе имеет такое же число узлов, как стандартный 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$ (рис. 13).

Дискретную модель R_2^2 КТ V_0^1 образуют четыре малоразмерных МнКЭ $V_p^{(2)}$ размерами $24h \times 24h \times 24h$. Результаты расчетов КТ V_0^2 с применением дискрет-

ных моделей R_0^2, R_1^2, R_2^2 представлены в таблице 2, где σ_n^2 — максимальное эквивалентное напряжение дискретной модели R_n^2 , определяемое по 4-й теории прочности, N_n^0 и b_n^0 — размерность и ширина ленты СУ МКЭ модели R_n^2 , $n = 0, 1, 2$. Считаем, что БМ R_0^2 порождает точное решение. Тогда погрешность δ_n для напряжения σ_n^2 находим по формуле $\delta_n(\%) = 100\% \times |\sigma_0^2 - \sigma_n^2| / \sigma_0^2$, где $n = 1, 2$.

Таблица 2

Результаты расчетов моделей R_0^2, R_1^2, R_2^2

n	R_n^2	σ_n^2	$\delta_n(\%)$	N_n^0	b_n^0
0	R_0^2	3,551	-	92200	1031
1	R_1^2	2,951	16,909	1200	375
2	R_2^2	3,595	1,235	1200	375

Анализ результатов таблицы 2 показывает, что погрешность напряжения σ_2^2 , которое отвечает модели R_2^2 , состоящей из малоразмерных МнКЭ $V_p^{(2)}$,

в $k_3 = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{16,909}{1,235} = 13,691$ раз меньше погрешности

напряжения σ_1^2 , отвечающего модели R_1^2 , состоящей из стандартных 2сКЭ $V_\alpha^{(2)}$. Дискретная модель R_2^2 тре-

бует в $k_4 = \frac{N_0 \times b_0}{N_1 \times b_1} = \frac{92200 \times 1031}{1200 \times 375} = 211,24$ раз мень-

ше объема памяти ЭВМ, т.е. почти в 211 раз меньше, чем БМ R_0^2 КТ V_0^2 . В примерах 1, 2 малоразмерные МнКЭ $V_p^{(1)}$ и $V_p^{(2)}$ образуют крупные разбиения R_1^2, R_2^2 для КТ V_0^1 и V_0^2 , меньшей размерности, чем размерности БМ R_0^1, R_0^2 , и порождают напряжения σ_1^2, σ_2^2 с малой погрешностью, с меньшей погрешностью, чем

стандартные 2сКЭ $V_q^{(2)}$ и $V_\alpha^{(2)}$, т.е. малоразмерные МнКЭ $V_p^{(1)}$ и $V_p^{(2)}$ более эффективны, чем стандартные (см. табл. 1, 2).

Заключение

В данной работе предлагается метод локальных аппроксимаций (МЛА) для построения высокоточных многосеточных конечных элементов (МнКЭ) малой размерности, кратко — малоразмерных МнКЭ. В МЛА используются локальные аппроксимации перемещений, определяемые на крупных сетках под областей МнКЭ. В центральной части области малоразмерного МнКЭ на крупных сетках определяются локальные аппроксимации перемещений высокого порядка, в окрестности границы области — малого порядка, что позволяет с помощью различных локальных аппроксимаций варьировать размерность и поряд-

док точности малоразмерного МНКЭ. Подробно изложены два подхода построения малоразмерных МНКЭ. Основное достоинство малоразмерных МНКЭ состо-

ит в том, что они для крупных дискретных моделей КТ порождают максимальные эквивалентные напряжения с малой погрешностью.

Библиографический список

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, 1975.
2. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. М., 1993.
3. Москвичев В.В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. Новосибирск, 2002.
4. Матвеев А.Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия Алт. гос. ун-та. Серия: Математика и механика. 2017. № 4. Doi: 10.14258/izvasu(2017)4-21.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013.
6. Голованов А.И., Тюленева О.И., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М., 2006.
7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., 1982.
8. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М., 1985.
9. Секулович М. Метод конечных элементов. М., 1993.
10. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М., 1981.
11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., 1975.
12. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М., 1982.
13. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 4.
14. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158. № 1. Art. 012067.
15. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестник КрасГАУ. 2016. № 12.
16. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л., 1978.
17. Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. М., 1988.
18. Демидов С.П. Теория упругости. М., 1979.
19. Тимошенко С.П., Дж. Гудбер. Теория упругости. М., 1979.
20. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., 1968.
21. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М., 1982.
22. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Журнал ПМТФ. 2004. № 3.
23. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеднородной структурой // Известия Алт. гос. ун-та. Серия: Математика и механика. 2014. № 1/1. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
24. Матвеев А.Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов. // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 3. DOI: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.
25. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М., 2008.
26. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск, 1984.
27. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. М., 1985.
28. Алфутов Н.А., Зиновьев А.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М., 1984.
29. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М., 1984.
30. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск, 2001.
31. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев, 1985.
32. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М., 1988.
33. Carrera E., Pagani A., Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structure // Composites Part B: Engineering, 2017. Vol. 111.
34. Hasim K.A., Kefal A., Madensi E. Isogeometric plate element for unstiffened and blade stiffened laminates based on refined zigzag theory // Composite Structures. 2019. Vol. 222.
35. Soltani Z., Hosseini Kordkheili S.A. Interlaminar stress analysis of composite shell structures using a geometrically nonlinear layer-wise shell finite element // Composite Structures. 2021. Vol. 257.
36. Матвеев А.Д. Определение фиктивных модулей упругости композитов сложной структуры с отверстиями // Вестник КрасГАУ. 2006. № 12.
37. Матвеев А.Д. Определение фиктивных модулей упругости для трехмерных композитов на основе жесткостных соотношений однородных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2008. № 5.