УДК 514.112.3

# О некоторых свойствах четырехугольника, вершины которого являются замечательными точками треугольника

*Ю.Н. Мальцев, Е.П. Петров*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

# On Some Properties of a Quadrilateral Whose Vertices are Remarkable Points of the Triangle

*Yu.N. Maltsev, E.P. Petrov*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Данная статья посвящена геометрии треугольника, в частности, изучению взаимного расположения вполне определенных замечательных точек неравнобедренного треугольника *ABC*, где *H, I, G, O, N* — соответственно его ортоцентр, центр вписанной окружности, центр тяжести, центр описанной окружности и точка Нагеля. В работе доказаны следующие основные результаты: четырехугольник *HNOI* является трапецией, диагонали которой пересекаются в точке *G*, *HN* параллельна *IO*, *HI* не параллельна *NO* и угол *HIO*>90°; в трапеции *HNOI* один из углов равен 90° тогда и только тогда, когда $p^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2$, где *p, r, R* — соответственно полупериметр, радиусы вписанной и описанной окружностей. Найдены необходимые и достаточные условия, когда около трапеции *HNOI* можно описать окружность; в трапецию *HNOI* нельзя вписать окружность; трапеция *HNOI* не является ортодиагональной; найдена площадь трапеции *HNOI*, выраженная через параметры *p, r, R* исходного треугольника *ABC*. Полученные в статье результаты могут быть использованы при чтении различных курсов по олимпиадной математике, могут быть полезны учащимся старших классов и учителям гимназий с углубленным изучением математики.

***Ключевые слова:*** треугольник, трапеция, замечательная точка, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности.

This article is devoted to the geometry of a triangle, in particular, to the study of the relative position of well-defined remarkable points of a non-isosceles triangle *ABC*, where *H, I, G, O, N* are the orthocenter of the triangle, the center of the inscribed circle, the center of gravity, the center of the circumscribed circle, respectively, and the Nagel point. We prove the following main results: the quadrilateral *HNOI* is a trapezoid whose diagonals intersect at the point *G*, *HN* is parallel to *IO*, *HI* is not parallel to *NO*, and angle *HIO* > 90°; in the trapezoid *HNOI* one of the angles is equal to 90° if and only if $p^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2$, where *p, r, R* are respectively the semiperimeter, radii of the inscribed and circumscribed circles; necessary and sufficient conditions are found when a circle can be described near the trapezoid HNOI; a circle cannot be inscribed in the trapezoid *HNOI*; the trapezoid *HNOI* is not orthodiagonal; the area of the trapezoid *HNOI* is found, expressed in terms of the parameters *p, r, R* of the original triangle *ABC*. The results obtained in the article can be used when reading various courses in Olympiad mathematics, can be useful for high school students and teachers of gymnasiums with in-depth study of mathematics.

***Key words:*** triangle, trapezoid, remarkable point, radius of the circumscribed circle, radius of the inscribed circle.

**DOI: 10.14258/izvasu(2022)4-19**

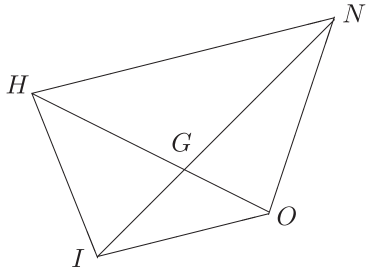
**Введение**

В последние десятилетия, как мы знаем, появилось достаточно много исследовательских работ по геометрии треугольника, в частности по изучению замечательных точек треугольника: описание их свойств, методов нахождения расстояний между замечательными точками треугольника и др. Возникает определенный интерес к конфигурации этих точек (см. [1 – 7]). Именно: какие имеются условия на взаимное расположение некоторых вполне определенных замечательных точек?

Этому вопросу и будет посвящена настоящая работа, в которой мы будем изучать конфигурацию, следующих замечательных точек некоторого треугольника: его ортоцентра, центра описанной окружности, центра тяжести, центра описанной окружности и точки Нагеля.

Итак, пусть $ABC$ – треугольник, $S_{\triangle ABC}$ – его площадь и $H, I, G, O, N$ – соответственно его ортоцентр, центр вписанной окружности, центр тяжести, центр описанной окружности и точка Нагеля [1, 2].

Пусть также $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ и $p, r, R$ – соответственно полупериметр, радиусы вписанной и описанной окружностей. Известно, что точки $H, G, O$ лежат на одной прямой (так называемой первой прямой Эйлера [1, с. 55]) и точки $I, G, N$ тоже лежат на одной прямой (называемой второй прямой Эйлера [1, с. 57]) (см. рис.):




При этом [1, 2]

$$2 \cdot GO = HG,$$

$$GO^2 = \frac{9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2}{9},$$

$$HG^2 = \frac{4}{9}(9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2),$$

$$2 \cdot IG = GN,$$

$$GN^2 = \frac{4}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr),$$

$$IG^2 = \frac{p^2 - 16Rr + 5r^2}{9}.$$

В работе [3] доказывается, что первая и вторая прямые Эйлера совпадают (то есть точки $H, I, G, O, N$ лежат на одной прямой) тогда и только тогда, когда $\triangle ABC$ является равнобедренным. В настоящей работе мы предполагаем, что $\triangle ABC$ не является равнобедренным, и изучаем свойства четырехугольника $HNOI$.

**Основные результаты.** Обратимся теперь к доказательству основных свойств четырехугольника $HNOI$.

**Предложение 1.** *Пусть $\triangle ABC$ не является равнобедренным. Тогда четырехугольник $HNOI$ является трапецией, диагонали которой пересекаются в точке $G$, $HN$ параллельна $IO$, $HI$ не параллельна $NO$ и $\angle HIO > 90°$.*

***Доказательство.*** Рассмотрим рисунок. Согласно [1] $HG = 2 \cdot GO, GN = 2 \cdot GI$ и согласно [2]

$$HN^2 = 4(R^2 - 2Rr) = (2 \cdot IO)^2,$$

то есть $HN = 2 \cdot IO$. $\triangle IGO$ подобен $\triangle HGN$ (с коэффициентом подобия 2). Следовательно,

$$\angle HNI = \angle GIO, \ \angle NHG = \angle GOI$$

и $HN \parallel IO$.

Если $HI$ параллельна $NO$, то

$$\angle IHG = \angle GON, \ \angle HIG = \angle GNO$$

и треугольники $\triangle HIO$, $\triangle GNO$ являются подобными, то есть $\dfrac{IG}{GN} = \dfrac{HG}{GO}$ или $\dfrac{1}{2} = 2$. Противоречие. Следовательно, $HI$ не параллельна $NO$.

Пусть $\lambda = \angle HIO$. Тогда по теореме косинусов имеем, что $HO^2 = HI^2 + IO^2 - 2HI \cdot IO \cos\lambda$ и

$$\begin{aligned} &HO^2 - HI^2 - IO^2 = \\ &= (9R^2+8Rr+2r^2-2p^2)-(4R^2+4Rr+3r^2-p^2)- \\ &- (R^2 - 2Rr) = (4R^2 + 6Rr - r^2) - p^2 \geq \\ &\geq (4R^2 + 6Rr - r^2) - (4R^2 + 4Rr + 3r^2) = \\ &= 2Rr - 4r^2 = 2r(R - 2r) > 0, \end{aligned}$$

так как $\triangle ABC$ не является правильным и $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ (см. [2]). Откуда следует, что $\cos\lambda < 0$ и $\lambda = \angle HIO > 90°$. Предложение доказано.

**Замечание 1.** Пусть $\varphi = \angle HNO$. По теореме косинусов имеем, что

$$\begin{aligned} &HO^2 - HN^2 - ON^2 = -2HN \cdot ON \cdot \cos\varphi = \\ &= (9R^2+8Rr+2r^2-2p^2)-4R^2+8Rr-R^2-4r^2+4Rr = \\ &= 2(2R^2 + 10Rr - r^2 - p^2). \end{aligned}$$

Если $\triangle ABC$ является прямоугольным неравнобедренным треугольником, то $p = 2R + r$ [2] и $(2R^2 + 10Rr - r^2 - p^2) = -2(R - 2r)(R - r) < 0$, то есть $\angle\varphi < 90°$.

Если $\triangle ABC$ является неравнобедренным с углом $60°$, то $\frac{1}{2}$ является корнем многочлена

$$\begin{aligned} &4R^2x^3 - 4R(R + r)x^2 + \\ &+ (p^2 + r^2 - 4R^2)x + (2R + r)^2 - p^2 = 0 \end{aligned}$$

[2, с. 33]. Следовательно, $p^2 = 3(R + r)^2$ и $2R^2 + 10Rr - r^2 - p^2 = -(R - 2r)^2 < 0$ и $\cos\varphi > 0$, то есть $0 < \varphi < 90°$.

Пусть в $\triangle ABC$ $a = 10, b = 6$ и $c = 14$. Тогда $a = \frac{b+c}{2}$ и согласно работе [8] $R = \frac{14}{3}r, p = 5\sqrt{3}r$ и

$$(2R^2 + 10Rr - r^2) - p^2 = \frac{164}{9}r^2 > 0,$$

то есть $\cos\varphi < 0$ и $\varphi > 90°$.

Приведенные примеры показывают, что в трапеции $HNOI$ угол $\angle HNO$ может быть как острым, так и тупым.

**Предложение 2.** *Пусть $\triangle ABC$ не является равнобедренным. Тогда в трапеции $HNOI$ один из углов равен $90^\circ$ тогда и только тогда, когда $p^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2$.*

***Доказательство.*** Рассмотрим рисунок.

Ранее мы заметили, что $\angle HIO > 90^\circ$ и, следовательно, $\angle NHI < 90^\circ$. Поэтому, если в трапеции $HNOI$ один из углов равен $90^\circ$, то

$$\angle HNO = \angle ION = 90^\circ$$

и по теореме Пифагора $HO^2 = HN^2 + ON^2$, то есть $9R^2+8Rr+2r^2-2p^2 = 4(R^2-2Rr)+(R-2r)^2$ или $p^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2$.

Обратно, пусть $p^2 = 2R^2+10Rr-r^2$. По теореме косинусов $HO^2 = HN^2+ON^2-2HN\cdot ON\cos\varphi$, где $\varphi = \angle HNO$. Откуда следует, что $\cos\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$. Предложение доказано.

**Предложение 3.** *Пусть $\triangle ABC$ не является равнобедренным. Тогда около трапеции $HNOI$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда $p^2 = 3R^2 + 8Rr - r^2$ и $R > \frac{8}{3}r$.*

***Доказательство.*** Известно, что около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она является равнобокой. Условие $HI = NO$ равносильно [2]

$$HI^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2 = \\ = ON^2 = (R-2r)^2 = R^2 - 4Rr + 4r^2$$

или равенству $p^2 = 3R^2 + 8Rr - r^2$. Подставим полученные значения для $p^2$ в фундаментальное неравенство треугольника [9, 2] $(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 < 4R(R-2r)^3$. Получим, что $(R-2r)^2[4R(R-2r) - R^2] > 0$ или, учитывая, что $R > 2r, R > \frac{8}{3}r$. Предложение доказано.

Напомним, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ называется ортодиагональным, если его диагонали $AC$ и $BD$ перпендикулярны [10]. Справедливо следующее утверждение.

**Предложение 4.** *Пусть $\triangle ABC$ не является равнобедренным. Тогда трапеция $HNOI$ не является ортодиагональной.*

***Доказательство.*** Рассмотрим рисунок.

Предположим противное. Тогда $\angle NGO = \dfrac{\pi}{2}$ и по теореме Пифагора $ON^2 = OG^2 + GN^2$. Следовательно, согласно [2]

$$ON^2 = (R-2r)^2 = \\ = \frac{4}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr) + \\ + \frac{(9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2)}{9}$$

или $p^2 = 10Rr + 7r^2$. Согласно [2, 9] для любого треугольника справедливо неравенство $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Следовательно, $12Rr \geq 6R^2$ или $2r \geq R$. Так как $R \geq 2r$ согласно [2, 9], то $R = 2r$ и треугольник $ABC$ является правильным [9]. Противоречие. Предложение доказано.

Имеет место следующее утверждение.

**Предложение 5.** *Пусть $\triangle ABC$ не является равнобедренным. Тогда в трапецию $HNOI$ нельзя вписать окружность.*

***Доказательство.*** Предположим противное. Тогда $HN+OI = HI+ON$. Так как $HN = 2\cdot OI$, то $3\cdot OI = HI + ON$ или

$$9\cdot OI^2 = HI^2 + ON^2 + 2\cdot HI\cdot ON.$$

Согласно [2]

$$OI^2 = R^2 - 2Rr, \\ HI^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2, \\ ON = (R-2r).$$

Следовательно,

$$9(R^2 - 2Rr) = (4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2) + \\ + (R^2 - 4Rr + 4r^2) + 2\cdot HI\cdot ON$$

или $4R^2 - 18Rr - 7r^2 + p^2 = 2\cdot HI\cdot ON$. Возводя левую и правую части последнего равенства в квадрат, получаем, что

$$\left(p^2 + (6R^2 - 26Rr + r^2)\right)^2 = \\ = 36(R^4 - 6R^3r - 8Rr^3 + 12R^2r^2) = \\ = 36R(R-2r)^3$$

или $p^2 = -(6R^2-26Rr+r^2)\pm 6(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}$. Так как $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (см. [2], [9]), то

$$p^2 + 6R^2 - 26Rr + r^2 \geq \\ \geq 6R^2 - 10Rr - 4r^2 = \\ = 2(R-2r)(3R+r) > 0.$$

Следовательно,

$$p^2 = -(6R^2 - 26Rr + r^2) + 6(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Согласно фундаментальному неравенству треугольника [2, 9],

$$p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Следовательно, $8(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr} \geq 8R^2 - 16Rr$ или $\sqrt{R^2-2Rr} \geq R$ (так как $R - 2r > 0$). Противоречие. Предложение доказано.

Пусть далее $S_1 = S_{\triangle IOG}$, $S_2 = S_{\triangle IGH}$, $S_3 = S_{\triangle GON}$, $S_4 = S_{\triangle GHN}$ и $S$ – площадь трапеции $HNOI$. Так как $GN = 2\cdot IG$, $HG = 2\cdot GO$, то $S_2 = S_3 = 2S_1$, $S_4 = 4S_1$ и $S = S_{HNOI} = 9S_1$.

**Теорема.** *Пусть треугольник $ABC$ не является равнобедренным. Тогда площадь трапеции $HNOI$ равна*

$$S_{HNOI} = \\ = \frac{3}{4}\sqrt{4R(R-2r)^3 - (p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2} = \\ = \frac{3\sqrt{2}}{2}R^2\Big(\big(1-\cos(\alpha-\beta)\big)\big(1-\cos(\alpha-\gamma)\big)\cdot \\ \cdot\big(1-\cos(\beta-\gamma)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

***Доказательство***. В работе [3] доказано, что

$$S_1 = S_{\triangle IOG} = \\ = \frac{1}{12}\sqrt{4R(R-2r)^3 - (p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}.$$

Следовательно,

$$S = S_{HNOI} = 9 \cdot S_1 = \\ = \frac{3}{4}\sqrt{4R(R-2r)^3 - (p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}.$$

В работе [4] доказано, что

$$\big((1-\cos(\alpha-\beta)\big)\cdot \\ \cdot\big(1-\cos(\alpha-\gamma)\big)\big(1-\cos(\beta-\gamma)\big) = \\ = \frac{4R(R-2r)^3 - (p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}{8R^4}.$$

Откуда следует, что

$$S_{HNOI} = \frac{3}{2}\sqrt{2}R^2\Big(\big(1-\cos(\alpha-\beta)\big)\cdot \\ \cdot\big(1-\cos(\alpha-\gamma)\big)\big(1-\cos(\beta-\gamma)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема доказана.

**Следствие.** *Пусть треугольник $ABC$ не является равнобедренным и около трапеции $HNOI$ можно описать окружность. Тогда ее площадь равна*

$$S_{HNOI} = \frac{3}{4}(R-2r)\sqrt{R(3R-8r)}.$$

***Доказательство***. Согласно предложению 3 $p^2 = 3R^2 + 8Rr - r^2$.

Из теоремы следует, что

$$S_{HNOI} = \frac{3}{4}\Big(4R(R-2r)^3 - \\ - (3R^2 + 8Rr - r^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{3}{4}\sqrt{4R(R-2r)^3 - (R^2 - 2Rr)^2} = \\ = \frac{3}{4}(R-2r)\sqrt{R(3R-8r)}.$$

Следствие доказано.

**Замечание 2.** Пусть $\varphi = \angle HNO$ и $h$ – высота трапеции, опущенная из вершины $O$ на сторону $HN$. Тогда

$$\frac{h}{ON} = \sin\varphi,\ ON = R - 2r, \\ S = S_{HNOI} = \frac{OI + HN}{2}\cdot h = \frac{3\cdot OI}{2}\cdot h,$$

так как $HN = 2\cdot OI$. Следовательно,

$$h = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{OI}\cdot S = \\ = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{4R(R-2r)^3 - (p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}}{\sqrt{R(R-2r)}}\cdot\frac{3}{4} = \\ = \frac{1}{2}(R-2r)\cdot 2\cdot\sqrt{1 - \frac{(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}{4(R-2r)^3\cdot R}} = \\ = (R-2r)\sqrt{1 - \frac{(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}{4R(R-2r)^3}}$$

и

$$\sin\varphi = \frac{h}{ON} = \frac{h}{R-2r} = \\ = \sqrt{1 - \frac{(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}{4R(R-2r)^3}}.$$

В частности, если трапеция $HNOI$ является равнобокой, то согласно предложению 3

$$p^2 = 3R^2 + 8Rr - r^2, \\ \frac{(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}{4R(R-2r)^3} = \frac{(R^2 - 2Rr)^2}{4R(R-2r)^3} = \\ = \frac{R}{4(R-2r)} > \frac{1}{4}$$

и $1 - \frac{(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2}{4R(R-2r)^3} < 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, то есть $\sin\varphi < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varphi < 60^\circ$ или $\varphi > 120^\circ$.

## Библиографический список

1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. М., 1962.

2. Мальцев Ю.Н., Монастырева А.С., Петров Е.П. Замечательные точки и неравенства в треугольнике. Барнаул, 2021.

3. Maltsev Yu.N., Monastyreva A.S. On some properties of triangle OIG // The teaching of Mathematics. 2020. Vol. 23. № 2.

4. Мальцев Ю.Н., Монастырева А.С. О некоторых замечательных точках и отрезках в треугольнике // Известия Алт. гос. ун-та, 2021, № 1(117). DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-18.

5. Andrica D., Barbu C. A geometric proof of Bludon's inequalities // Math.Inequal.Appl. 2012. Vol. 15. № 2.

6. Kimberling C. Central points and central lines in the plane of triangle // Math. Mag. 1994. Vol. 67.

7. Kimberling, C. Triangle centers and Central Triangles // Congr. Numer. 1998. Vol. 129.

8. Maltsev Yu.N., Monastyreva A.S. On triangles with sides that form an arithmetic progression // Известия Алт. гос. ун-та, 2020, № 1(111). DOI: 10.14258/izvasu(2020)1-18.

9. Мейдман С., Солтан В. Тождества и неравенства в треугольнике. Кишинев, 1982.

10. Josefsson M. Characterizations of orthodiagonal quadrilaterals // Forum Geometricorum. 2012. Vol. 12.