МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 532.511

Локальная разрешимость задачи протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих жидкостей

И.Г. Ахмерова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Local Solvability of the Flow Problem for the Equations of Motion of Two Interpenetrating Fluids

I.G. Akhmerova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается одномерная задача о неизотермическом движении двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей с неоднородными граничными условиями. В основе математической модели, описывающей движение смеси, состоящей из двух вязких жидкостей, лежат уравнения сохранения массы, импульса каждой фазы и уравнения сохранения энергии в целом. Доказана локальная по времени разрешимость начально-краевой задачи в пространствах С.Л. Соболева и Гельдера. В пункте 1 постановка задачи, краткий обзор литературы по близким к данной теме работам и сформулирован основной результат. В пункте 2 проводится преобразование исходной системы уравнений. Существование сильного и классического решений на достаточно малом промежутке времени, когда истинная плотность постоянна, доказывается с помощью метода Бубнова-Галеркина в пунктах 3 и 4. Доказательство теоремы в идейном плане следует доказательству аналогичного результата для вязкого теплопроводного газа (Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей). Особенностью рассматриваемой задачи является наличие неоднородных граничных условий.

Ключевые слова: локальная разрешимость, вязкая несжимаемая жидкость, неоднородные граничные условия.

The paper is dedicated to the one-dimensional problem of the nonisothermal flow of a two-phase mixture of viscous incompressible fluids with inhomogeneous boundary conditions. The mathematical model describing the two viscous fluids mixture flow is based on the equations of mass conservation, momentum conservation for each phase, and on the energy conservation equation, in the large. Local in time solvability of the initial boundary value problem in S.L.Sobolev and Helder spaces is proved. Section 1 sets the problem set up and provides the short literature review on the topic close papers and the main result formulation. Section 2 explains the transformation of the original system of equations. Sections 3, 4 prove the existence of the strong and classic solutions on a small time interval with constant true density using the Bubnov-Galerkin method. Notionally, the proof of the theorem is based on the similar result proof for viscous heat-conducting gas (Antonsev S.N., Kazhihov A.V., Monahov V.N. Boundary value problems of heterogeneous fluid mechanic). The particularity of the considered problem is the presence of inhomogeneous boundary conditions.

Keywords: local solvability, viscous incompressible fluid, inhomogeneous boundary conditions.

DOI: 10.14258/izvasu(2022)1-11

Введение. Рассматривается одномерное неизотермическое движение двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей с неоднородными граничными условиями (гипотеза Х.А. Рахматулина [1, 2]). Уравнения неразрывности и импульса для каждой из фаз ($i = 1,2$) имеют вид $[1, 2]$

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i v_i) = 0, \quad \rho_i(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}) = \frac{\partial\sigma_i}{\partial x} + F_i,$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i\rho_i^0 s_i(\frac{\partial\theta}{\partial t} + v_i\frac{\partial\theta}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi\frac{\partial\theta}{\partial x}).$$

Здесь v_i — скорость соответствующей фазы; ρ_i — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией s_i соотношением $\rho_i = s_i\rho_i^0$; θ – абсолютная температура среды ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$). Условие $s_1 + s_2 = 1$ является следствием определения ρ_i. Для тензора напряжений фазы σ_i принимается аналог гипотезы Стокса [3]: $\sigma_i = -s_i p_i + s_i \mu_i \frac{\partial v_i}{\partial x}$, где p_i — давление i-ой фазы, μ_i — коэффициент динамической вязкости фазы, c_i — теплоемкость i-ой фазы при постоянном объеме. Постулируется, что силы F_i имеют вид [1,3]: $F_i = p_i \frac{\partial s_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i g$, где $\varphi_1 = K(v_2 - v_1), \varphi_2 = -\varphi_1$, K — коэффициент взаимодействия фаз, g — ускорение силы тяжести, χ — коэффициент теплопроводности смеси. Условие $\rho_i^0 = const$ приводит к замкнутой системе уравнений для $s_i(x,t)$, $v_i(x,t)$, $\theta(x,t)$ и $p_i(x,t)$ в области $Q_T = \{x \mid 0 < x < 1\} \times (0,T)$.

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i v_i) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$\rho_i^0 s_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_i\ s_i \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) = = -s_i \frac{\partial p_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i^0 s_i g, \tag{2}$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1), \quad \varphi_2 = -\varphi_1, \quad p_1 - p_2 = p_c(s_1, \theta), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \rho_i^0 s_i \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(s_1) \frac{\partial \theta}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Здесь ρ_i^0, μ_i, c_i — заданные положительные постоянные, $K(s_1)$, $\chi(s_1)$, $p_c(s_1,\theta)$ — заданные функции [1].

Система (1)–(4) дополняется начально-краевыми условиями:

$$v_i\mid_{x=0} = a_i(t), \quad v_i\mid_{x=1} = b_i(t),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\mid_{x=0} = \theta_1(t), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}\mid_{x=1} = \theta_2(t), \tag{5}$$

$$\theta\mid_{t=0} = \theta^0(x), \ v_i\mid_{t=0} = v_i^0(x)\ s_1\mid_{t=0} = s_1^0(x).$$

Для данной системы рассматривается два варианта граничных условий: $a_i(t) = b_i(t) = a(t)$ и $v_1\mid_{x=0} = a_1(t)$, $v_1\mid_{x=1} = b_1(t)$, $v_2\mid_{x=0,x=1} = 0$. Заметим, что из уравнений (1) с учетом равенства $s_1 + s_2 = 1$ вытекает соотношение $s_1 v_1 + s_2 v_2 = h(t)$, справедливое для произвольной функции $h(t), t \in [0,T]$. В первом варианте граничных условий функция $h(t) = a(t)$, т.е. предполагается известной, а во втором варианте — $h(t) = s(0,t)a_1(t)$ и является неизвестной функцией.

Дополнительное условие для однозначного определения $p_1(x,t)$ берется в виде

$$\int_0^1 p_1(x,t)dx = 0. \tag{6}$$

Относительно функций $s^0(x)$, $\theta^0(x)$ предполагается выполнение неравенств следующего вида:

$$0 < m_0 \le s^0(x) \le M_0 < 1, \quad 0 < k_1^{-1} \le \theta^0(x) \le k_1 < \infty \tag{7}$$

для всех $x \in [0,1]$ и при фиксированных постоянных m_0, M_0, k_1.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)–(6) называется совокупность функций $(s_i(x,t), v_i(x,t), p_i(x,t), \theta(x,t))$, $i = 1,2$ из пространств:
$s_i \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $\frac{\partial s_i}{\partial t} \in L_2(Q_T)$,
$(v_i,\theta) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$,
$(\frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial p_i}{\partial x}) \in L_2(Q_T)$, $p_i \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$,
$\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, удовлетворяющих уравнениям (1)–(4) и неравенствам $0 < s(x,t) < 1$, $0 < \theta(x,t) < \infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Определение 2. Классическим решением задачи (1)–(6) называется совокупность функций $(v_i(x,t), s_i(x,t), p_i(x,t), \theta(x,t))$, $i = 1,2$, если они обладают непрерывными производными, входящими в уравнения (1)–(4), и удовлетворяют уравнениям, начальным и граничным условиям и неравенствам $0 < s(x,t) < 1$, $0 < \theta(x,t) < \infty$ как непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции.

Теорема 1. Пусть данные задачи (1)–(6) удовлетворяют условиям (7), а также следующим условиям гладкости: $(v_i^0, \theta^0) \in W_2^1(\Omega)$, $s^0 \in W_2^2(\Omega)$, $(\theta_i, a_i, b_i) \in W_2^1(0,T)$, $g \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ и условиям согласования:
$v_i^0(0) = a_i(0), \quad v_i^0(1) = b_i(1), \quad i = 1,2,$
$\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\mid_{x=0} = \theta_1(0), \quad \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\mid_{x=1} = \theta_2(1).$
Пусть $K(s_1)$, $p_c(s_1,\theta)$, $\chi(s_1)$ — достаточно гладкие функции своих аргументов, удовлетворяющие следующим условиям:
$K(s_1) = K_0(s_1)(s_1 s_2)^q$, $0 < k_0^{-1} \le K_0(s_1) \le k_0 = const$,
$k_1^{-1}(s_1 s_2)^{q_1} \le \chi(s_1) \le k_1(s_1 s_2)^{q_1}$,
$k_1^{-1}(s_1 s_2)^{q_1 - 1} \le \frac{d\chi(s_1)}{ds_1} \le k_1(s_1 s_2)^{q_1 - 1}$,
$\left|\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1}\right| \le k_1(s_1 s_2)^{q_2}|\theta|^{q_3}, \left|\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial \theta}\right| \le k_1(s_1 s_2)^{q_4}|\theta|^{q_5}$,
$\left|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1^2}\right| \le k_1(s_1 s_2)^{q_6}|\theta|^{q_7}$,
$\left|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial \theta^2}\right| \le k_1(s_1 s_2)^{q_8}|\theta|^{q_9}$,
$\left|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1 \partial \theta}\right| \le k_1(s_1 s_2)^{q_{10}}|\theta|^{q_{11}}$, где $k_1 = const > 0$, $q, q_1, ..., q_{11}$ — фиксированные вещественные параметры, причем $q_3 \ge 0, q_5 \ge 0, q_7 \ge 0, q_9 \ge 0, q_{11} \ge 0$.

Если выполнены условия (7), то существует достаточно малое значение $t_0 > 0$, $t_0 \in (0,T)$ такое, что для всех $t \in (0,t_0)$ существует единственное обобщенное решение (s_i, v_i, p_i, θ) задачи (1)–(6).

Если дополнительно:
$g \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T), \quad (s^0, v_i^0, \theta^0) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$,
$v_i^0(0) = a_i(0), \quad v_i^0(1) = b_i(1), \quad i = 1,2,$
$\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\mid_{x=0} = \theta_1(0), \quad \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\mid_{x=1} = \theta_2(1)$, коэффициенты $K(s_1)$ и $\chi(s_1)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, то в Q_{t_0} существует единственное классическое решение задачи, удовлетворяющее условиям:
$s_i \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})$, $(v_i,\theta) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})$,
$\frac{\partial p_i}{\partial x} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})$, причем найдутся числа

$0 < m^{(2)} < M^{(2)} < 1, \qquad 0 < m^{(3)} < M^{(3)} < \infty,$ такие, что $\quad 0 < m^{(2)} \le s_1(x,t) \le M^{(2)} < 1,$ $0 < m^{(3)} \le \theta(x,t) \le M^{(3)} < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}.$

Система уравнений (1)–(4) близка по структуре системе уравнений вязкого газа [4], является обобщением модели фильтрации Маскета-Леверетта для вязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей, некоторых моделей движения сыпучих сред [5]. Если вязкость и ускорение второй фазы пренебрежимо малы (в уравнении (2) для второй фазы соответствующие слагаемые отбрасываются), получаем фильтрационное приближение для двухфазной смеси (газ — твердые частицы) [6,7]. Для системы уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной двухфазной смеси (газа и твердых частиц) доказана локальная разрешимость начально-краевой задачи [8]. Для задачи о неизотермическом движении двухфазной смеси твердых частиц и несжимаемого газа с непостоянной вязкостью фаз получена разрешимость в «целом» по времени [9].

1. Преобразование уравнений. Системе уравнений (1)–(4) можно придать следующий вид $(s \equiv s_1, \quad (1-s) \equiv s_2)$ [10]

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(s)u + \frac{\beta_2 s h}{a_\mu}\right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a_\rho}{a_\mu}u\right) + a_1(s)u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}a_1'(s)u^2\frac{\partial s}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} -$$
$$-\nu\frac{a'(s)}{a(s)}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} - \nu\frac{a''(s)}{2a(s)}u\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \frac{K}{\rho^0 a(s)a_\mu^2}u -$$
$$-\frac{1}{\rho^0}\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial x} - g_0 - G_1(s,u,s_x,u_x,s_t,u_t) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1 s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-s}{a_\mu(s)}u\right) - \mu_2(1-s)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{s}{a_\mu(s)}u\right) -\right.$$
$$-\rho^0\frac{a_\rho(s)}{a_\mu(s)}a(s)u^2\Big) - (\rho_1^0 - \rho_2^0)\frac{\partial}{\partial t}(a(s)u) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1 s\beta_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{a_\mu(s)}\right) + \mu_2(1-s)\beta_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{a_\mu(s)}\right) -\right.$$
$$-\frac{2\rho_1^0 a(s)\beta_2 h u}{a_\mu} + \frac{2\rho_2^0 a(s)\beta_1 h u}{a_\mu} - \rho_1^0 s\left(\frac{\beta_2 h}{a_\mu}\right)^2 -$$
$$-\rho_2^0(1-s)\left(\frac{\beta_1 h}{a_\mu}\right)^2\Big) - -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_1^0 s\beta_2 h}{a_\mu} + \frac{\rho_2^0(1-s)\beta_1 h}{a_\mu}\right) +$$
$$+\rho^0 a_\rho(s)g + (1-s)\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\chi_0(s)\frac{\partial\theta}{\partial t} + c_0 a(s)u\frac{\partial\theta}{\partial x} +$$
$$+\chi_0(s)(\beta_1+\beta_2)\frac{h}{a_\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(s)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right), \tag{11}$$

в котором учтено, что $u(x,t) = \beta_1 v_1(x,t) - \beta_2 v_2(x,t)$, $\beta_i = \mu_i/\mu$, $i = 1,2$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $a_\mu(s) = \beta_1(1-s) + \beta_2 s$, $a(s) = \frac{s(1-s)}{a_\mu}$, $a'(s) = \frac{\beta_1(1-s)^2 - \beta_2 s^2}{a_\mu^2}$, $a''(s) = -2\frac{\beta_1\beta_2}{a_\mu^3}$, $\nu = \mu/\rho^0$, $\rho^0 = \rho_1^0 + \rho_2^0$, $\alpha_i = \frac{\rho_i^0}{\rho^0}$, $a_\rho(s) = \alpha_1(1-s) + \alpha_2 s$, $a_1(s) = \frac{\alpha_1(1-s)^2 - \alpha_2 s^2}{a_\mu^2}$, $a_1'(s) \equiv \frac{da_1}{ds}$, $g_0 \equiv (\alpha_1 - \alpha_2)g$, $\chi_0(s) = c_1\rho_1^0 s + c_2\rho_2^0(1-s)$, $c_0 = c_1\rho_1^0 - c_2\rho_2^0$. Таким образом, искомые $s(x,t), u(x,t), p_1(x,t), \theta(x,t)$ удовлетворяют системе уравнений (8)–(11), условию (6) и начально-краевым условиям:

$$u\,|_{x=0} = u_1(t) = \beta_1 a_1(t) - \beta_2 a_2(t),\ \frac{\partial\theta}{\partial x}\,|_{x=0} = \theta_1(t),$$
$$u\,|_{x=1} = u_2(t) = \beta_1 b_1(t) - \beta_2 b_2(t),\ \frac{\partial\theta}{\partial x}\,|_{x=1} = \theta_2(t),$$
$$u\,|_{t=0} = u^0(x),\ s\,|_{t=0} = s^0(x),\ \theta\,|_{t=0} = \theta^0(x). \tag{12}$$

В равенстве (9) главными членами являются вторые производные по x от $u(x,t)$ и $s(x,t)$. Если последние находить из уравнения (8), то возникнут производные третьего порядка от $u(x,t)$. Укажем другой способ вычисления $\frac{\partial s}{\partial x}$. Положим $R_i = \rho_i^0 v_i + \frac{\mu_i}{s_i}\frac{\partial s_i}{\partial x}$, $i = 1,2$, введем функцию $R(x,t) = R_1(x,t) - R_2(x,t)$ и придем к уравнениям для $s_x(x,t)$ и $R(x,t)$ [10]:$(\delta = \mu_2\rho_1^0 - \mu_1\rho_2^0)$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{a(s)}{\mu}\left(R - b(s)u\right) - \frac{a(s)h\delta}{a_\mu\mu^2}, b(s) \equiv \rho^0\frac{a_\rho}{a_\mu}; \tag{13}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + U(s,u)\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{2\mu}a''(s)a(s)uR\left(R - b(s)u\right) -$$
$$-\frac{K}{a(s)a_\mu^2}u - \frac{\delta}{\mu}\frac{a(s)}{a_\mu^2}u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta_1(1-s) - \beta_2 s}{\mu a_\mu^2}u\cdot\right.$$
$$\cdot(R - b(s)u)\Big) + \rho^0 g_0 - \frac{\partial p_c}{\partial x} + hG_2 \equiv f_1(s,u,R), \tag{14}$$

где $U(s,u) \equiv a'(s)u - \frac{\beta_1\beta_2 h}{a_\mu}$, а $G_2 = G_2(s,u,s_x,u_x)$. Из (12) имеем $R\,|_{t=0} = R^0(x)$ [10].

Давление $p_1(x,t)$ определяется из уравнения (10) и условия (6). При исследовании дифференциальных свойств $p_1(x,t)$ удобно использовать другое представление [10].

Пусть $P(x,t) = p_1(x,t) + \varphi(x,t)$, $\varphi(x,t) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu a_\mu^2(s)}u(x,t)\frac{\partial s}{\partial x}(x,t)$. Положим $\Phi(x,t) = \int\limits_{x_0}^{x}[(\rho_1^0 - \rho_2^0)(\varphi\frac{\partial s}{\partial \xi} + \varphi_2) + \rho_1^0\rho_2^0 g + (1-s)\rho_1^0\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial x}]d\xi - \rho_1^0\rho_2^0(sv_1^2 + (1-s)v_2^2) - \mu_1 s\beta_2 h\frac{(\beta_1-\beta_2)}{a_\mu^2}\frac{\partial s}{\partial x} - \mu_2(1-s)\beta_1 h\frac{(\beta_1-\beta_2)}{a_\mu^2}\frac{\partial s}{\partial x} - \delta a(s)\frac{\partial u}{\partial x} - \rho_1^0\rho_2^0 x h'(t)$, где $x_0 \in [0,1]$ — произвольная точка, тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho^0 a_\rho}\Phi + \frac{\rho_1^0 - \rho_2^0}{\rho^0}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{1}{a_\rho^2}\Phi(\xi,t)\frac{\partial s}{\partial \xi}(\xi,t)d\xi\right)$$

и, следовательно,

$$P(x,t) = Q_0(t) + \frac{1}{\rho^0 a_\rho}\Phi(x,t) +$$
$$+\frac{\rho_1^0 - \rho_2^0}{\rho^0}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{1}{a_\rho^2}\Phi(\xi,t)\frac{\partial s}{\partial x}(\xi,t)d\xi,$$

где $Q_0(t)$ — произвольная функция времени. Используя условие (6), получим

$$Q_0(t) = \int_0^1 [\varphi - \frac{1}{\rho^0 a_\rho}\Phi(x,t) -$$

$$\frac{\rho_1^0 - \rho_2^0}{\rho^0}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{a_\rho^2}\Phi(\xi,t)\frac{\partial s}{\partial x}(\xi,t)d\xi]dx.$$

2. Построение галеркинских приближений. Уравнения (8), (9) и (11) представим, используя (13), в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -a'(s)u((R - b(s)u)\tfrac{a(s)}{\mu} - \tfrac{a(s)h\delta}{a_\mu \mu^2}) -$$
$$-\tfrac{\beta_1\beta_2 h}{a_\mu^2}((R - b(s)u)\tfrac{a(s)}{a_\mu} - \tfrac{a(s)h\delta}{a_\mu\mu^2}) - \quad (15)$$
$$-a(s)\tfrac{\partial u}{\partial x} \equiv f_2(u,s,R),$$

$$L_1(s,u,R,\theta) \equiv \tfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\tfrac{\partial}{\partial x}\left(b_0(s)\tfrac{\partial u}{\partial x}\right) +$$
$$+b_1(s)u\left(R - b(s)u\right)^2 + b_2(s)u\tfrac{\partial u}{\partial x} + b_3(s)\cdot$$
$$\cdot u^2\left(R - b(s)u\right) + b_4(s)\tfrac{\partial u}{\partial x}\left(R - b(s)u\right) + \quad (16)$$
$$+b_5(s)u - b_6(s,\theta)(R - b(s)u) - \tfrac{\partial\theta}{\partial x} -$$
$$-b_7(s,\theta) - b_0(s)g_0 - hG_3(R,s,u,h) = 0,$$

$$L_2(s,u,R,\theta) \equiv \tfrac{\partial\theta}{\partial t} - \tfrac{\partial}{\partial x}\left(b_9(s)\tfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) +$$
$$+b_8(s)u\tfrac{\partial\theta}{\partial x} - b_{10}(s)\left(R - b(s)u\right)\tfrac{\partial\theta}{\partial x} + \quad (17)$$
$$+(b_{11}(s) + b_{12}(s))\tfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + U(s,u)\frac{\partial R}{\partial x} = f_1(s,u,R). \quad (18)$$

Здесь введены следующие обозначения [10]: $a_2(s) = b_0(s)a_1(s) + a(s)\frac{b_0'(s)}{b_0(s)}$, $b_0(s) = \frac{a_\mu(s)}{a_\rho(s)}$, $b_1(s) = \frac{\beta_1\beta_2}{\rho^0\mu}\frac{a(s)}{a_\rho a_\mu^2(s)}$, $b_2(s) = a_2(s)$, $a_3(s) = \frac{1}{2}a_1'(s)b_0(s) + a'(s)\frac{b_0'(s)}{b_0(s)}$, $b_3(s) = a_3(s)\frac{a(s)}{\mu}$, $b_4(s) = -\frac{a(s)}{\mu}(b_0(s)\frac{a'(s)}{a(s)} - b_0'(s))$, $b_5(s) = \frac{Kb_0(s)}{\rho^0 a(s)a_\mu^2(s)}$, $b_6(s,\theta) = \frac{b_0(s)}{\rho^0}\frac{a(s)}{\mu}\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial s}$, $b_7(s,\theta) = \frac{b_0(s)}{\rho^0}\frac{a(s)}{\mu}\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial\theta}$, $b_8(s) = c_0\frac{a(s)}{\chi_0(s)}$, $b_9(s) = \frac{\chi(s)}{\chi_0(s)}$, $b_{10}(s) = -c_0\frac{\chi(s)}{\chi_0^2(s)}\frac{a(s)}{\mu}$, $b_{11}(s) = \chi_0(s)(\beta_1+\beta_2)\frac{h}{a_\mu(s)}$, $b_{12}(s) = \frac{a(s)h\delta}{a_\mu(s)\mu^2}$.

При $0 \le s(x,t) \le 1$ коэффициенты $a_\rho(s), a_\mu(s), b_0(s), \chi_0(s)$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \min(\alpha_1,\alpha_2) \le a_\rho(s) \le \max(\alpha_1,\alpha_2) < 1,$$

$$0 < \min(\beta_1,\beta_2) \le a_\mu(s) \le \max(\beta_1,\beta_2) < 1,$$

$$0 < \frac{\min(\beta_1,\beta_2)}{\max(\alpha_1,\alpha_2)} \le b_0(s) \le \frac{\max(\beta_1,\beta_2)}{\min(\alpha_1,\alpha_2)} < \infty,$$

$$0 < \min(c_1\rho_1^0, c_2\rho_2^0) \le \chi_0(s) \le \max(c_1\rho_1^0, c_2\rho_2^0) < \infty.$$

Коэффициенты $b_j(s), j = 0,..,12$ удовлетворяют условиям

$$C^{-1} \le (\frac{b_1(s)}{a(s)}, \frac{b_5(s)}{a^{q-1}(s)}, \frac{b_8(s)}{a(s)}, \frac{b_9(s)}{\chi(s)}, \frac{|b_{10}(s)|}{\chi(s)a(s)}) \le C,$$

$$C^{-1} \le (a_\mu(s)b_{11}(s), \frac{a_\mu(s)}{a(s)}b_{12}(s)) \le C,$$

$$|b_2(s)| + |b_3(s)| + |b_4(s)| \le C,$$

$$|b_6(s,\theta)| \le C(s(1-s))^{q_2+1}|\theta|^{q_3},$$

$$|b_7(s,\theta)| \le C(s(1-s))^{q_4+1}|\theta|^{q_5},$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от данных задачи.

Положим $u(x,t) = \omega(x,t) + \psi(x,t)$, $\theta(x,t) = \hat\theta(x,t) + \phi(x,t)$, $\psi(x,t) = (1-x)u_1(t) + xu_2(t)$, $\phi(x,t) = -\frac{(1-x)^2}{2}\theta_1(t) + \frac{x^2}{2}\theta_2(t)$, тогда $\omega\ |_{x=0} = \omega\ |_{x=1} = 0$, $\omega\ |_{t=0} = \omega^0(x) = u^0(x) - \psi(x,0)$, $\frac{\partial\hat\theta}{\partial x}\ |_{x=0} = \frac{\partial\hat\theta}{\partial x}\ |_{x=1} = 0$. Заменяем в (15)–(18) $u(x,t)$ через $\omega(x,t)$, а $\theta(x,t)$ через $\hat\theta(x,t)$. Будем строить локальное обобщенное решение $(s,\omega,\hat\theta,R)$ уравнений (15)–(18) с соответствующими начальными и граничными условиями как предел приближенных решений $(s^n,\omega^n,\hat\theta^n,R^n)$, где $\omega^n(x,t)$ и $\hat\theta^n(x,t)$ представляется в виде конечных сумм: $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i^n(t)\sin(\pi ix)$, $\sum\limits_{j=0}^{n}\hat\theta_j^n(t)\cos(\pi jx)$, $n = 1,2,...$ с неизвестными коэффициентами $\omega_i^n(t)$, $i = 1,2,...,n$, $\hat\theta_j^n(t)$, $j = 0,1,2,...,n$. Для определения последних предполагается, что уравнения (16),(17) выполняются приближенно:

$$\int_0^1 L_1(s^n,\omega^n,\hat\theta^n,R^n)\sin(\pi ix)dx = 0, i = \overline{1,n}, \quad (19)$$

$$\int_0^1 L_2(s^n,\omega^n,\hat\theta^n,R^n)\cos(\pi jx)dx = 0, j = \overline{0,n}. \quad (20)$$

Тогда $\omega_i^n(t)$, $\hat\theta_j^n(t)$ находятся из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \tfrac{d\omega_i^n}{dt} &= \Phi_i^n(\omega_1^n,...,\omega_n^n;\hat\theta_0^n,...,\hat\theta_n^n;s^n,R^n), \\ \tfrac{d\hat\theta_j^n}{dt} &= \lambda_j\Psi_j^n(\omega_1^n,...,\omega_n^n;\hat\theta_0^n,...,\hat\theta_n^n;s^n,R^n), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\omega_i^n(0) = 2\int_0^1 \omega^0(x)\sin(\pi ix)dx,\ \ \hat\theta_0^n(0) = 2\int_0^1 \hat\theta^0(x)dx,$$

$$\hat\theta_j^n(0) = 2\int_0^1 \hat\theta^0(x)\cos(\pi jx)dx, \quad j = 1,2,...,n.$$

Здесь $\lambda_0 = 1$, $\lambda_j = 2$, $j = 1, 2, ..., n$,

$$\Phi_i^n(t) = 2\int_0^1 [-(\frac{\partial\psi}{\partial t}) - \nu\frac{\partial}{\partial x}(b_0(s^n)\frac{\partial(\omega^n+\psi)}{\partial x}) -$$

$$-b_1(s^n)(\omega^n+\psi)(R^n - b(s^n)(\omega^n+\psi))^2 - b_2(s^n)\cdot$$

$$\cdot(\omega^n+\psi)\frac{\partial(\omega^n+\psi)}{\partial x} - b_3(s^n)(\omega^n+\psi)^2(R^n - b(s^n)\cdot$$

$$\cdot(\omega^n+\psi)) - b_4(s^n)\frac{\partial(\omega^n+\psi)}{\partial x}(R^n - b(s^n)(\omega^n+\psi)) -$$

$$-b_5(s^n)(\omega^n+\psi) - b_6(s,\hat\theta^n+\phi)(R - b(s)(\omega^n+\psi)) -$$

$$-b_7(s^n,(\hat\theta^n+\phi))\frac{\partial(\hat\theta^n+\phi)}{\partial x} - b_0(s)g_0]\sin(\pi i x)dx,$$

$$\Psi_j^n(t) = \int_0^1 [\frac{\partial}{\partial x}(b_9(s^n)\frac{\partial(\hat\theta^n+\phi)}{\partial x}) - b_8(s^n)(\omega^n+\psi)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial(\hat\theta^n+\phi)}{\partial x} + b_{10}(s^n)(R^n - b(s^n)(\omega^n+\psi))\frac{\partial(\hat\theta^n+\phi)}{\partial x} +$$

$$+(b_{11}(s^n)+b_{12}(s^n))\frac{\partial(\hat\theta^n+\phi)}{\partial x}]\cos(\pi j x)dx.$$

Функции $s^n(x,t)$, $R^n(x,t)$ определим из решения задач:

$$\frac{\partial s^n}{\partial t} = f_2(\omega^n, s^n, R^n) \equiv f_2^n, \quad s^n\,|_{t=0} = s^0(x). \quad (22)$$

$$\frac{\partial R^n}{\partial t} + U^n\frac{\partial R^n}{\partial x} = f_1(\omega^n, s^n, R^n, \hat\theta^n) \equiv f_1^n, \qquad R^n\,|_{t=0} = R^0(x), \quad (23)$$

где $U^n \equiv U(s^n,\omega^n) = a'(s^n)\omega^n$ и в силу (20): $\partial s^n/\partial x = a(s^n)(R^n - b(s^n)(\omega^n+\psi))/\mu - \frac{a(s^n)\delta h}{a_\mu(s^n)\mu^2}$. Соответствующая (23) характеристическая система имеет вид [11]:

$$\frac{dy(t,\xi)}{dt} = U^n(y(t,\xi),t), \quad y\,|_{t=0} = \xi, \qquad \frac{d\overline{R}^n}{dt} = f_1^n(y(t,\xi),t,\overline{R}^n), \quad \overline{R}^n\,|_{t=0} = R^0(\xi), \quad (24)$$

где $y(t,\xi) = x$, $\overline{R}^n(t,\xi) = R^n(y,t)$ и для $I \equiv \frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}$ имеем $I = \exp\int_0^t \Phi_1(y(\tau,\xi),\tau)d\tau$, $\Phi_1 = a'(s^n)\frac{\partial(\omega^n+\psi)}{\partial x} + a''(s^n)(\omega^n+\psi)\frac{\partial s^n}{\partial x}$.

Кроме того, необходимо задавать $R^n(x,t)$ на границе $x = 0$ в случае $U^n(0,t) > 0$ (на правой границе $x = 1$ в случае $U^n(1,t) < 0$). Неизвестную функцию $h(t)$ в задаче Коши (21)–(23) заменим на $h^n(t) = s^n(0,t)a_1(t)$ (в дальнейшем индекс n у h опускаем).

Таким образом, приближенное решение $(\omega^n, s^n, \hat\theta^n, R^n)$ удовлетворяет задаче Коши (21)–(23). Локальная разрешимость этой задачи при каждом фиксированном n следует из теоремы Коши-Пикара для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [12].

3. Оценки галеркинских приближений. Укажем такое значение t_0, для которого данная задача на интервале $[0,t_0]$ разрешима для всех n. Для этого достаточно получить равномерные по n оценки для $\omega^n, s^n, R^n, \hat\theta^n$ в том числе и оценки снизу и сверху для s^n, $\hat\theta^n$. Положим $z_n(t) = \|\omega^n(t)\|^2 + \|R^n(t)\|^2 + \|\omega_x^n(t)\|^2 + \|R_x^n(t)\|^2 + \|\hat\theta^n(t)\|^2 + \|\hat\theta_x^n(t)\|^2 + \kappa\int_0^t \|\omega_{xx}^n(\tau)\|^2 d\tau$, где $\|\omega(t)\|^2 = \int_0^1 \omega^2(x,t)dx$, $\omega_x = \frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\omega_{xx} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, $\kappa\in(0,1)$ — вещественный параметр. Пусть $0 < t \le T$, тогда из (22) получим [10]

$$\frac{1}{s^n(x,t)(1-s^n(x,t))} \le$$

$$\le C\exp(\frac{C}{\kappa}z_n(t) + |h|^2 + \|\psi_x(t)\| + \|\psi(t)\|^2). \quad (25)$$

Из (19), (20) и (23) с учетом оценки (25) выводим неравенство

$$\frac{dz_n(t)}{dt} \le C(\|g_0(t)\|^2 + \|g_{0x}(t)\|^2 + \exp Cz_n(t) +$$

$$+\|\psi_t(t)\|^2 + \|\psi_x(t)\|^2 + \|\psi_{xx}(t)\|^2 + \|\psi(t)\|^6 +$$

$$+\|\phi_t(t)\|^2 + \|\phi_x(t)\|^2 + |h(t)|^6), \quad (26)$$

где постоянная C не зависит от n. Если $h(t)$ — задана, то оценка (26) является искомой. Если же $h(t)$ неизвестна и $h^n(t) = s^n(0,t)a_1(t)$, то нетрудно заметить из уравнения для p_x при $x = 0$ и элементарных оценок $(|h(t)|^6, \|h_t\|^2) \le C\exp Cz_n(t)$, т.е. приходим к неравенству (26), не содержащему $h(t)$. Из (26) следует равномерная по n ограниченность $z_n(t)$ при всех $t \le t_0$, где

$$t_0 < C^{-2}\exp(-C\{z_n(0) + C\int_0^T (\|g_0(\tau)\|^2 + \|g_{0x}(\tau)\|^2 +$$

$$+\|\psi_t(t)\|^2 + \|\psi_x(t)\|^2 + \|\psi_{xx}(t)\|^2 + \|\psi(t)\|^6 +$$

$$+\|\phi_t(t)\|^2 + \|\phi_x(t)\|^2)d\tau).$$

При таком выборе t_0 следует, что для всех n справедливы неравенства:

$$0 < m \le s^n(x,t) \le M < 1, \ (x,t) \in \Omega\times(0,t_0),$$

$$\max_{0\le t\le t_0}\|\omega_x^n(t)\|^2 + \max_{0\le t\le t_0}\|\hat\theta_x^n(t)\|^2 +$$

$$+\max_{0\le t\le t_0}\|R^n(t)\|^2 + \max_{0\le t\le t_0}\|R_x^n(t)\|^2 +$$

$$+\int_0^{t_0}\int_0^1 (\|\omega_{xx}^n(t)\|^2 + \|\hat\theta_{xx}^n(t)\|^2)dt \le C \quad (27)$$

с постоянной C, не зависящей от n. Для этого решения также имеет место принцип максимума для температуры в следующей форме: $0 < \min_{0\le x\le 1}\theta^0(x) \le \theta(x,t) \le \max_{0\le x\le 1}\theta^0(x)$ почти всюду в Q_{t_0} [4].

Предельный переход. Оценки (27) позволяют выделить из последовательностей $\{s^n, \omega^n, R^n \hat{\theta}^n\}$ сходящиеся подпоследовательности. Полученные равномерные оценки по n позволяют выделить слабо сходящиеся подпоследовательности: $\omega_{xx}^n, \omega_t^n \rightharpoonup \omega_{xx}, \omega_t$ слабо в $L_2(Q_{t_0}), Q_{t_0} = (0, t_0) \times (0, 1)$; $\omega^n, R^n, \hat{\theta}^n, \omega_x^n, R_x^n \rightharpoonup \omega, R, \hat{\theta}, \omega_x, R_x$ слабо в $L_2(0, t_0; L_2(\Omega))$.

Из равномерных оценок ω^n в $L_2(0, t_0; L_2(\Omega))$, $W_2^1(Q_T)$ и ω_t^n в $L_2(Q_{t_0})$ возможно выделить подпоследовательность ω^n, сильно сходящуюся к ω в $L_2(0, t_0; L_2(\Omega))$. Из (27) очевидно вытекает сильная сходимость s^n к s в $L_2(Q_{t_0})$. Предельным переходом в равенствах (19), (20), (22), (23) показывается, что предельные функции $\{s(x,t), \omega(x,t), R(x,t), \theta(x,t)\}$ дают обобщенное решение на промежутке $[0, t_0]$.

Повышение гладкости обобщенного решения до классического (при соответствующем повышении гладкости данных задачи) проводится так же, как в работе [13].

Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М., 1987. Ч. 1.

2. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 2.

3. Файзуллаев Д.Ф., Умаров А.И., Шакиров А.А. Гидродинамика одно- и двухфазных сред и ее практическое приложение. Ташкент, 1980.

4. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.

5. Peter Eshuis, Ko van der Weele, Meheboob Alam, Henk Jan van Gerner, Martin van der Hoef, Hans Kuipers, Stefan Luding, Devaraj van der Meer, Detlef Lohse Buoyancy driven convection in vertically shaken granular matter: experiment, numerics, and theory // Granular Matter. 2013. № 15. DOI 10.1007/s10035-013-0440-x.

6. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gas - fluidized beds // Journal of Applied Phisics. 1975. Vol. 46. № 10.

7. Göz M. Existence and uniqueness of time-dependent spatially periodic solutions of fluidized bed equations // ZAMM.Z.angew. Math. Mech. 1991. Vol. 71. № 6.

8. Akhmerova I.G., Papin A.A. Solvability of the Boundary-Value Problem for Equations of One-Dimensional Motion of a Two-Phase Mixture // Mathematical Notes. 2014. Vol. 96. № 2.

9. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. 2010. Vol. 87. № 2.

10. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Задача протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих вязких жидкостей // Ред. Сиб. мат. журн. Сиб. отд. АН РФ. Новосибирск. 2004. Деп. ВИНИТИ № 37.

11. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1978.

12. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.

13. Папин А.А. Краевые задачи для уравнений двухфазной фильтрации. Барнаул. 2009.