

## Метод эквивалентных условий прочности в расчетах композитных конструкций

*А.Д. Матвеев*

Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск, Россия)

## Method of Equivalent Strength Conditions in Composite Structures Evaluations

*A.D. Matveev*

Institute of Computational Modelling SB RAS (Krasnoyarsk, Russia)

В расчетах на прочность упругих композитных конструкций (тел) с помощью метода конечных элементов (МКЭ) важно знать погрешность приближенного решения, для нахождения которой необходимо построить по МКЭ последовательность решений, что связано с применением процедуры измельчения дискретных моделей. Реализация процедуры измельчения для базовых моделей, которые учитывают в рамках микроподхода неоднородную, микронеоднородную структуру тел, требует больших ресурсов ЭВМ.

В данной работе предложен метод эквивалентных условий прочности (МЭУП) для расчета на статическую прочность упругих тел, имеющих неоднородную, микронеоднородную регулярную структуру. Расчет на прочность композитных тел согласно МЭУП сводится к расчету на прочность изотропных однородных тел с применением эквивалентных условий прочности. При численной реализации МЭУП используются скорректированные эквивалентные условия прочности, которые учитывают погрешность приближенных решений. Если для композитного тела задано множество нагружений, то в этом случае применяются обобщенные эквивалентные условия прочности. Расчет на прочность композитных тел по МЭУП на основе МКЭ с применением многосеточных конечных элементов требует в  $10^3 \div 10^5$  раз меньше объема памяти ЭВМ, чем аналогичный расчет с применением измельченных базовых моделей композитных тел. Приведенный пример расчета на прочность балки с неоднородной регулярной волокнистой структурой с помощью МЭУП показывает его высокую эффективность. Изложены основные процедуры реализации МЭУП.

**Ключевые слова:** упругость, композиты, многосеточные конечные элементы, скорректированные и обобщенные эквивалентные условия прочности.

It is important to know the error or the approximate solution when calculating the strength of elastic composite structures (bodies) using the finite element method (FEM). To construct a sequence of solutions according to the FEM is necessary for the evaluation of the approximation error. It involves the grinding procedure for discrete models. The implementation of the grinding procedure for basic models that take into account the inhomogeneous, micro-homogeneous structures of bodies within the micro-approach requires ample computer resources.

This paper proposes a method of equivalent strength conditions (MESC) to calculate the static strength of elastic bodies with a non-uniform, micro-uniform regular structure. The calculation of composite bodies strength according to the MESC is reduced to the calculation of isotropic homogeneous bodies strength using equivalent strength conditions. Adjusted equivalent strength conditions are used in the numerical implementation of the MESC. They take into account the error of the approximate solutions. If a set of loads is specified for a composite body, then generalized equivalent strength conditions are applied. The FEM-based calculation of composite bodies strength that follows the MESC using multigrid finite elements requires  $10^3 \div 10^5$  times less computer memory than a similar calculation using ground basic models of composite bodies. The provided example of strength calculation for a beam with an inhomogeneous regular fiber structure using the MESC shows its high efficiency. The main MESC implementation procedures are outlined.

**Key words:** elasticity, composites, multigrid finite elements, corrected and generalized equivalent strength conditions.

**Введение**

Как правило, расчет на прочность упругой конструкции проводится по запасам прочности и сводится к определению максимального эквивалентного напряжения конструкции (тела) [1–3]. Для упругого тела  $V_0$  заданные условия прочности имеют вид  $n_1 \leq n_0 \leq n_2$ , где  $n_1, n_2$  — заданы, коэффициент запаса  $n_0$  тела  $V_0$  отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела  $V_0$ . Считают, что тело не разрушается при эксплуатации, если его коэффициент запаса удовлетворяет заданным условиям прочности. Определение коэффициента запаса  $n_0$  для композитного тела (КТ), где  $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$ ,  $\sigma_T$  — предельное напряжение [1, с. 150], т.е. определение максимального эквивалентного напряжения  $\sigma_0$  [1, с. 167] КТ, отвечающего точному решению задачи упругости, затруднительно. Если напряжения в телах определяются приближенно, то в этом случае используют скорректированные условия прочности [4], которые учитывают погрешность решений. При анализе напряженного деформированного состояния (НДС) упругих тел широко используется метод конечных элементов (МКЭ) [5–19]. Конечноэлементные (дискретные) базовые модели (БМ), которые учитывают неоднородную структуру тел в рамках микроподхода [20, с. 58], имеют высокую размерность. Кроме того, для анализа сходимости и погрешности решения необходимо использовать последовательность решений, построенных с помощью процедуры измельчения конечных элементов (КЭ) БМ КТ, которая приводит к резкому увеличению размерностей дискретных моделей. Для анализа НДС КТ эффективно используется метод многосеточных конечных элементов (ММКЭ) [21–23], порождающий дискретные модели, размерности которых меньше размерностей БМ КТ. В областях многосеточных конечных элементов (МнКЭ) [21–27] учитывается в рамках микроподхода неоднородная, микронеоднородная структура и описывается трехмерное НДС. БМ для ряда КТ (как, например, для тел с микронеоднородной структурой) имеют такую высокую размерность, что реализация МКЭ с применением МнКЭ также затруднительна. Существующие методы расчета КТ [28–35] имеют сложные постановки [28, с. 62–66; 29, с. 50–53] и труднореализуемые для КТ сложной формы.

В данной работе для расчета на прочность по МКЭ упругих тел с неоднородной, микронеоднородной регулярной структурой предлагается метод эквивалентных условий прочности (МЭУП), который сводится к расчету на прочность по МКЭ упругих изотропных однородных тел с применением эквивалентных условий прочности. В отличие от работ [36, 37] здесь сформулирована и доказана теорема, лежащая в основе МЭУП. При численной реализации МЭУП используют скорректированные эквивалентные условия прочности, которые учитывают погрешность реше-

ний. Для КТ, которому задано множество нагружений, в расчетах используются обобщенные эквивалентные условия прочности. Реализация МЭУП на основе МКЭ с применением МнКЭ требует в  $10^3 \div 10^5$  раз меньше ресурсов ЭВМ, чем расчет по МКЭ на основе измельчения БМ КТ. Приведенный пример расчета композитной балки по МЭУП показывает его высокую эффективность.

**1. Основные положения метода эквивалентных условий прочности**

МЭУП применяется для КТ, которые удовлетворяют следующим положениям.

*Положение 1.* КТ состоят из разномодульных изотропных однородных тел, связи между которыми идеальны, т.е. на общих границах этих тел функции перемещений и напряжений являются непрерывными.

*Положение 2.* Перемещения, деформации и напряжения разномодульных изотропных однородных тел отвечают соотношениям Коши и закону Гука трехмерной задачи линейной теории упругости [38, с. 41].

*Положение 3.* Максимальные эквивалентные напряжения БМ КТ мало отличаются от точных решений. В силу сходимости МКЭ такие БМ для КТ всегда существуют.

**2. Эквивалентные условия прочности**

Пусть упругие тела  $V_1, V_2$  имеют одинаковые характерные размеры, форму, крепления и статические нагружения, но отличаются модулями упругости. Пусть для коэффициентов запаса  $n_1, n_2$  соответственно тел  $V_1, V_2$  заданы условия прочности

$$n_a^1 \leq n_1 \leq n_b^1, \tag{1}$$

$$n_a^2 \leq n_2 \leq n_b^2, \tag{2}$$

где  $n_a^1, n_a^2 > 1; n_a^1, n_a^2, n_b^1, n_b^2$  — заданы; коэффициент запаса  $n_1$  ( $n_2$ ) отвечает точному решению задачи теории упругости, построенному для тела  $V_1$  (тела  $V_2$ ).

Для тел  $V_1, V_2$  введем следующее определение.

*Определение.* Если из выполнения условий (2) для  $n_2$  следует выполнение условий (1) для  $n_1$  и, наоборот, если из выполнения условий (1) для  $n_1$  следует выполнение условий (2) для  $n_2$ , тогда условия прочности (1), (2) будем называть эквивалентными условиями прочности соответственно для тел  $V_2, V_1$ .

**3. Основная теорема метода эквивалентных условий прочности**

Не теряя общности суждений, рассматриваем тела с волокнистой структурой, которые широко применяются на практике и в которых максимальные эквивалентные напряжения возникают в волокнах. В основе МЭУП лежит следующая теорема.

*Теорема 1.* Пусть для коэффициента запаса  $n_0$  упругого КТ  $V_0$  (волокнистой структуры) заданы нагружение  $F$  и условия прочности

$$n_1 \leq n_0 \leq n_2, \tag{3}$$

где величины  $n_1, n_2$  заданы,  $n_1 > 1, n_0 = \sigma_T / \sigma_0, \sigma_T$  — предел текучести волокна,  $\sigma_0$  — максимальное эквивалентное напряжение КТ  $V_0$ , напряжение  $\sigma_0$  соответствует точному решению задачи теории упругости, построенному для нагружения  $F$  КТ  $V_0$ , волокна тела  $V_0$  имеют одинаковые модули упругости.

Пусть однородное изотропное тело  $V^b$  и КТ  $V_0$  имеют одинаковые форму, характерные размеры, крепления и нагружение  $F$ . Пусть модули упругости тела  $V^b$  и волокна КТ  $V_0$  одинаковы.

Тогда существует такое число  $p > 0$  (коэффициент эквивалентности), что если коэффициент запаса  $n_b$  тела  $V^b$  удовлетворяет скорректированным эквивалентным условиям прочности

$$\frac{pn_1}{1-\delta_\alpha} \leq n_b \leq \frac{pn_2}{1+\delta_\alpha}, \quad (4)$$

то коэффициент запаса  $n_0$  КТ  $V_0$  отвечает заданным условиям прочности (3), где  $n_b = \sigma_T / \sigma_b, \sigma_b$  — максимальное эквивалентное напряжение тела  $V^b$ , отвечающее численному решению, построенному для нагружения  $F$  тела  $V^b$  с погрешностью  $\delta_b, |\delta_b| \leq \delta_\alpha$ , где  $\delta_\alpha$  — верхняя оценка погрешности  $\delta_b$ , удовлетворяющая условию

$$\delta_\alpha < C_\alpha = (n_2 - n_1) / (n_2 + n_1). \quad (5)$$

#### Доказательство

Коэффициенты запаса  $n_0, n_b^0$  соответственно тел  $V_0, V^b$  находим по формулам

$$n_0 = \sigma_T / \sigma_0, \quad (6)$$

$$n_b^0 = \sigma_T / \sigma_b^0, \quad (7)$$

где  $\sigma_b^0$  — максимальное эквивалентное напряжение тела  $V^b$ , отвечающее точному решению задачи теории упругости, построенному для нагружения  $F$  тела  $V^b$ .

Пусть коэффициент  $n_0$  удовлетворяет условиям (3). Используя (6) в (3), имеем

$$n_1 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \leq n_2. \quad (8)$$

Существует такое число  $p > 0$  (коэффициент эквивалентности), что

$$p = \frac{\sigma_0}{\sigma_b^0}. \quad (9)$$

Учитывая (9) в (8), получаем

$$pn_1 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_b^0} \leq pn_2. \quad (10)$$

Используя (7) в (10), имеем

$$pn_1 \leq n_b^0 \leq pn_2. \quad (11)$$

Пусть коэффициент запаса  $n_b^0$  тела  $V^b$  удовлетворяет условиям прочности (11). Тогда, подставляя (7)

в (11) с учетом (9), имеем  $pn_1 \leq \frac{p\sigma_T}{\sigma_0} \leq pn_2$ . Откуда

с учетом (6) следует выполнение для коэффициента запаса  $n_0$  КТ  $V_0$  условий прочности (3). Рассмотрим предельные случаи. Пусть  $n_b^0 = pn_1$ . Используя соотношения (7), (9) в последнем равенстве, получаем

$p \frac{\sigma_T}{\sigma_0} = pn_1$ . Откуда с учетом (6) следует  $n_0 = n_1$ .

Аналогично показываем, что если  $n_b^0 = pn_2$ , то  $n_0 = n_2$ . Пусть  $n_0 = n_1$ . Используя (6), (9) в послед-

нем равенстве, получаем  $\frac{\sigma_T}{\sigma_b^0} = pn_1$ . Откуда с учетом

(7) вытекает  $n_b^0 = pn_1$ . Аналогично показываем, что если  $n_0 = n_2$ , то  $n_b^0 = pn_2$ . Итак, показано, что (11) есть эквивалентные условия прочности для КТ  $V_0$  (см. определение п. 2). Пусть для тела  $V^b$  найдено максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_b$  такое, что

$$|\delta_b| \leq \delta_\alpha < C_\alpha = (n_2 - n_1) / (n_1 + n_2), \quad (12)$$

где  $\delta_b$  — относительная погрешность для  $\sigma_b$ , т.е.

$$\delta_b = (\sigma_b - \sigma_b^0) / \sigma_b^0. \quad (13)$$

Из (13) следует  $\sigma_b = (1 + \delta_b) \sigma_b^0$ . Отсюда, учитывая (7) и что  $n_b = \sigma_T / \sigma_b$ , получаем

$$n_b^0 = (1 + \delta_b) n_b. \quad (14)$$

Отметим, что в (12)  $C_\alpha < 1$ . Пусть  $\delta_0 = |\delta_b|$ . Тогда в силу (12)

$$0 \leq \delta_0 = |\delta_b| \leq \delta_\alpha < 1. \quad (15)$$

Принимая в (14) последовательно  $\delta_b = -\delta_0, \delta_b = \delta_0$ , введем коэффициенты

$$n_1^r = (1 - \delta_0) n_b, \quad n_2^r = (1 + \delta_0) n_b. \quad (16)$$

Тогда в силу (14), (16) получаем

$$n_b^0 = n_1^r \text{ или } n_b^0 = n_2^r. \quad (17)$$

Введем коэффициенты  $n_1^d, n_2^d$  по формулам

$$n_1^d = (1 - \delta_\alpha)n_b, \quad n_2^d = (1 + \delta_\alpha)n_b. \quad (18)$$

В силу того, что  $0 \leq \delta_\alpha \leq 1, n_b > 0$ , из (18) следует

$$n_1^d \leq n_2^d. \quad (19)$$

Скорректированные эквивалентные условия прочности имеют вид (4) или

$$pn_1(1 + \delta_\alpha) \leq n_b(1 - \delta_\alpha^2) \leq pn_2(1 - \delta_\alpha), \quad (20)$$

где  $n_b = \sigma_T / \sigma_b, \sigma_T$  — предел текучести волокна.

Пусть для коэффициента  $n_b$  выполняются условия прочности (20), т.е. пусть  $pn_1 \leq (1 - \delta_\alpha)n_b$  и  $(1 + \delta_\alpha)n_b \leq pn_2$ . Тогда отсюда следует, что для коэффициентов  $n_1^d, n_2^d$  с учетом (18), (19) выполняются неравенства

$$pn_1 \leq n_1^d \leq n_2^d \leq pn_2. \quad (21)$$

Из сравнения (16), (18) с учетом (15) следуют неравенства  $n_1^d \leq n_1^r, n_2^d \leq n_2^r$ .

Отсюда, учитывая, что согласно (16)  $n_1^r \leq n_2^r$ , получаем

$$n_1^d \leq n_1^r \leq n_2^r \leq n_2^d. \quad (22)$$

Тогда в силу (21), (22) выполняются неравенства

$$pn_1 \leq n_1^r \leq n_2^r \leq pn_2. \quad (23)$$

Из выполнения (23) с учетом (17) следует выполнение условий прочности (11) для коэффициента запаса  $n_b^0$ , следовательно, и выполнение заданных условий прочности (3). Ограничения на параметр  $\delta_\alpha$  находим из условия существования условий прочности (4), т.е. пусть  $pn_1(1 + \delta_\alpha) \leq pn_2(1 - \delta_\alpha)$ . Откуда следует

$$\delta_\alpha < C_\alpha = (n_2 - n_1) / (n_1 + n_2). \quad (24)$$

Поскольку  $n_2 > n_1 > 1$ , то из (24) следует  $0 < C_\alpha < 1$ . Если  $\delta_\alpha = C_\alpha$ , то из (4) следует  $n_b = p(n_1 + n_2) / 2$ , что трудно выполнить на практике. Поэтому следует  $\delta_\alpha$  задать такое, что  $\delta_\alpha < C_\alpha$ . В этом случае условия (11) для коэффициента запаса  $n_b^0$  тела  $V^b$  можно выполнить с помощью скорректированных эквивалентных условий прочности (4) и численных решений, порождающих для напряжений  $\sigma_b$  тела  $V^b$  такие погрешности  $\delta_b$ , что  $|\delta_b| \leq \delta_\alpha$ . Было показано, что из выполнения условий (11) следует выполнение условий прочности (3). Теорема доказана.

Согласно теореме 1 реализация МЭУП сводится к определению коэффициента  $p$  и коэффициента запаса  $n_b$  тела  $V^b$ , т.е. к определению максимального

эквивалентного напряжения  $\sigma_b$  тела  $V^b$  с погрешностью  $|\delta_b| \leq \delta_\alpha, n_b = \sigma_T / \sigma_b$ .

#### 4. Реализация метода эквивалентных условий прочности

Не теряя общности суждений, реализацию МЭУП рассмотрим на примере КТ (композитной балки)  $V_0$  размерами  $H \times L \times H$ , где  $H = 96h, L = 1152h, h$  — задано (рис. 1).

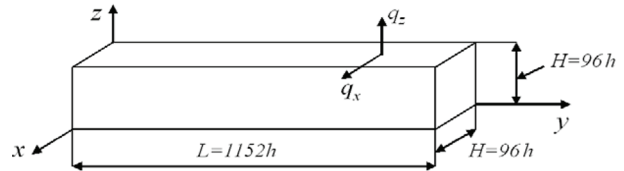


Рис. 1. Размеры тела  $V_0$  (тела  $V^b$ , дискретных моделей  $V_n^b, R_n^0$ )

Регулярная ячейка  $G_0$  КТ  $V_0$  имеет форму куба со стороной  $6h$ , волокна сечением  $h \times h$  расположены по ребрам ячейки (рис. 2), границы волокон отмечены жирными линиями.

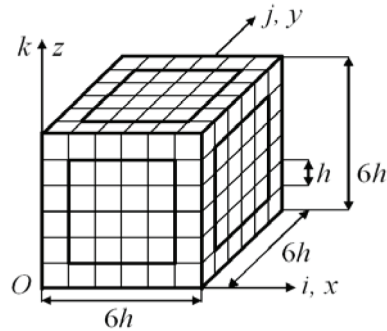


Рис. 2. Регулярная ячейка  $G_0$

Изотропные однородные волокна имеют одинаковые модули упругости. При  $\gamma = 0$  КТ  $V_0$  закреплено и при  $z = H$  имеет нагружение вида  $q_x, q_z$ , где  $q_x (q_z)$  — усилие, действующее на балку в направлении оси  $Ox$  (оси  $Oz$ ). Для КТ  $V_0$  заданы условия прочности (3). Базовая дискретная модель  $R_0$  КТ  $V_0$ , состоящая из односеточных КЭ (1сКЭ)  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$  [10, с. 135] (в которых реализуется трехмерное НДС [38, с. 41]), учитывает неоднородную структуру тела  $V_0$  и порождает равномерную (базовую) сетку с шагом  $h$  размерности  $97 \times 1153 \times 97$ . На рисунке 2 показана базовая сетка регулярной ячейки  $G_0$ . Так как БМ  $R_0$  имеет 32517504 (свыше 32 млн) узловых неизвестных МКЭ и поскольку  $h / H \ll 1$  ( $h / H = h / (96h) = 0,0104$ ), то будем считать, что максимальное эквивалентное напряжение БМ  $R_0$  мало отличается от точного решения, т.е. положение 3 МЭУП для КТ  $V_0$  выполняется (см. п. 1).

Согласно МЭУП введем изотропное однородное тело  $V^b$  и КТ  $R^0$  такие, что тела  $V^b, R^0$  и  $V_0$  имеют оди-

наковые форму, характерные размеры, заданные крепления и нагружения, но отличаются модулями упругости. Модули упругости тела  $V^b$  равны модулям упругости волокна КТ  $V_0$ . Для тела  $V^b$  (для КТ  $R^0$ ) определяем дискретные модели  $V_n^b$  (модели  $R_n^0$ ),  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Модель  $V_n^b$  (модель  $R_n^0$ ) состоит из 1сКЭ  $V_j^{(n)}$  1-го порядка формы куба со стороной  $h_n$ , в которых реализуется трехмерное НДС и которые порождают равномерную сетку с шагом  $h_n$  размерности  $n_1^{(n)} \times n_2^{(n)} \times n_3^{(n)}$ , где

$$\begin{aligned} n_1^{(n)} &= 6n + 1, \quad n_2^{(n)} = 12 \times 6n + 1, \quad n_3^{(n)} = 6n + 1, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Шаги сетки модели  $V_n^b$  (модели  $R_n^0$ ) по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  равны  $h_x^{(n)} = H / (6n)$ ,  $h_y^{(n)} = L / (72n)$ ,  $h_z^{(n)} = H / (6n)$ . Так как  $L = 12H$ , то  $h_x = h_y = h_z = h$ . Отсюда, учитывая, что  $H = 96h$ , получаем

$$h_n = \beta_n h, \quad (26)$$

где  $\beta_n$  — коэффициент масштабности,  $\beta_n = 16 / n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , при  $n \leq 15$   $\beta_n > 1$ ,  $h_n > h$ .

Согласно (25) модель  $V_n^b$  (модель  $R_n^0$ ) (рис. 1) состоит из конечного числа одинаковых по форме изотропных однородных тел  $G_n^b$  (КТ  $G_n^0$ ) размерами  $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . КТ  $G_n^0$  имеет такое же число волокон (сечением  $h_n \times h_n$ ) и такое же их взаимное расположение, как регулярная ячейка  $G_0$  (рис. 2), волокна и связующий материал КТ  $G_n^0$  и  $G_0$  имеют одинаковые модули упругости,  $n = 1, 16$ .

Итак, КТ  $G_n^0$ ,  $G_0$  (их неоднородные структуры) геометрически отличаются только масштабностью. Тогда, учитывая (26), для удобства рассуждений формально для КТ  $G_n^0$ ,  $G_0$  запишем соотношение

$$G_n^0 = \beta_n G_0, \quad (27)$$

где в силу (26) при  $n \rightarrow 16$  имеем  $\beta_n \rightarrow 1$ ,  $\beta_{16} = 1$ , т.е.  $G_{16}^0 = G_0$ .

Отметим, что поскольку в регулярной ячейке  $G_0$  учитывается неоднородная структура, то в силу (27) и в КТ  $G_n^0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) также учитывается неоднородная структура с помощью 1сКЭ  $V_j^{(n)}$  1-го порядка формы куба со стороной  $h_n$ , т.е. в модели  $R_n^0$  учитывается неоднородная структура. Отметим, что КТ  $G_n^0$  является регулярной ячейкой модели  $R_n^0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Итак, модели  $V_n^b$ ,  $R_n^0$  имеют одинаковую форму, размерность, одинаковые характерные размеры, равномерные сетки с шагом  $h_n$ , крепления и нагружения, как КТ  $V_0$ . Отметим достоинства моделей  $V_n^b$ ,  $R_n^0$ . Во-первых, размерности моделей  $V_n^b$ ,  $R_n^0$  при  $n \leq 15$  в силу (25) меньше размерности БМ  $R_0$ . Во-вторых, при построении моделей  $\{R_n^0\}_{n=1}^{15}$  не применяется процедура измельчения БМ  $R_0$ . Для уменьшения размер-

ностей моделей  $V_n^b$ ,  $R_n^0$  используются МКЭ. В силу (26) при  $n = 16$  ( $h_{16} = h$ ,  $\beta_{16} = 1$ ) модели  $V_{16}^b$ ,  $R_{16}^0$  и  $R_0$  имеют одинаковую размерность, а модели  $R_{16}^0$  и  $R_0$  в силу (27) совпадают, т.е.  $R_{16}^0 = R_0$ . Так как согласно (26), (27) при  $n \rightarrow 16$  имеем  $G_n^0 \rightarrow G_0$ , то

$$R_n^0 \rightarrow R_{16}^0 = R_0 \quad \text{при } n \rightarrow 16. \quad (28)$$

Поскольку модели  $R_{16}^0$ ,  $V_{16}^b$  имеют такую же размерность, как БМ  $R_0$ , для которой выполняется положение 3 МЭУП (см. п. 1), то считаем, что максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_{16}^0$  (напряжение  $\sigma_{16}^b$ ) модели  $R_{16}^0$  (модели  $V_{16}^b$ ) мало отличается от точного  $\sigma_0$  ( $\sigma_0^b$ ). Поэтому полагаем  $\sigma_0 = \sigma_{16}^0$ ,  $\sigma_0^b = \sigma_{16}^b$ . Коэффициент  $p$  находим по формуле (9), т.е.  $p = \sigma_0 / \sigma_0^b$  или с учетом последних двух равенств

$$p = \sigma_{16}^0 / \sigma_{16}^b. \quad (29)$$

Учитывая в формуле  $p_n = \sigma_n^0 / \sigma_n^b$ , где  $\sigma_n^0$  ( $\sigma_n^b$ ) — максимальное эквивалентное напряжение модели  $R_n^0$  (модели  $V_n^b$ ), что при  $n \rightarrow 16$  в силу (26), (28) имеем  $V_n^b \rightarrow V_{16}^b$ ,  $R_n^0 \rightarrow R_{16}^0$ , т.е.  $\sigma_n^0 \rightarrow \sigma_{16}^0$ ,  $\sigma_n^b \rightarrow \sigma_{16}^b$ , то в силу (29) следует  $p_n \rightarrow p$  при  $n \rightarrow 16$ . Пусть  $\delta_n = |p_n - p_{n-1}| / p_n$  мало, где  $n = 2, 3, \dots$ , тогда принимаем  $p = p_n$ . Подставляя коэффициент  $p$  и заданные  $\delta_\alpha$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  в (4), определяем скорректированные эквивалентные условия прочности для КТ  $V_0$ . Пусть  $\delta_n^\sigma = |\sigma_n^b - \sigma_{n-1}^b| / \sigma_n^b$  малая величина и  $|\delta_n^\sigma| \leq \delta_\alpha$ , где  $\delta_\alpha$  — задано,  $\delta_\alpha < C_\alpha$  (см. формулу (24)),  $n = 2, 3, \dots$ . Тогда полагаем  $\sigma_b = \sigma_n^b$ . Пусть коэффициент запаса  $n_b$  (где  $n_b = \sigma_T / \sigma_b$ , т.е.  $n_b = \sigma_T / \sigma_n^b$ ) изотропного однородного тела  $V^b$  отвечает скорректированным эквивалентным условиям прочности (4), построенным для КТ  $V_0$ . Тогда коэффициент запаса  $n_0$  КТ  $V_0$  удовлетворяет заданным условиям прочности (3), см. теорему 1 п. 3.

### 5. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу расчета на прочность КТ (балки)  $V_0$  (рис. 1). Для коэффициента запаса  $n_0$  КТ  $V_0$  заданы условия прочности вида

$$1,3 \leq n_0 \leq 3,5. \quad (30)$$

Исходные данные для КТ  $V_0$ :  $h = 0,2083$ ;  $\sigma_T = 5$ ;  $\nu_c = \nu_v = 0,3$ ;  $E_c = 1$ ,  $E_v = 10$ , где  $E_c$ ,  $E_v$  ( $\nu_c$ ,  $\nu_v$ ) — модули Юнга (коэффициенты Пуассона), соответственно связующего материала и волокна, на поверхности  $S = \{0,5L \leq y \leq L, z = H\}$  КТ  $V_0$  действует нагружение  $q_z = q_x = 0,000375$ ,  $\sigma_T$  — предел текучести волокна. В расчетах используем двухсеточные КЭ (2сКЭ). При построении 2сКЭ  $V_d^{(2)}$  размерами  $6h \times 6h \times 6h$  [21–25] используем две вложенные сетки: мелкую равномерную сетку с шагом  $h$  размерности  $7 \times 7 \times 7$  и крупную сетку  $H_d$  размерности  $2 \times 3 \times 2$ ,  $H_d \in h_d$ . По осям  $Ox$ ,  $Oz$  сетка  $H_d$  имеет шаг  $6h$ , по оси  $Oy$  — шаг  $3h$ . На рисунке 3 узлы сетки  $H_d$  отмечены точками, 12 узлов.

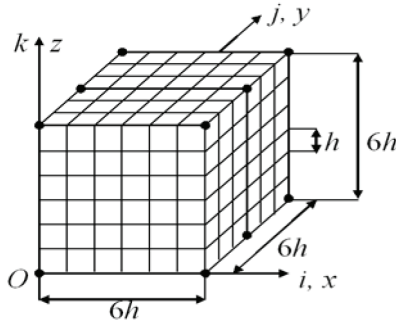


Рис. 3. Мелкая и крупная сетки 2сКЭ  $V_d^{(2)}$

Сетка  $h_d$  порождена базовым разбиением  $R_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , которое состоит из 1сКЭ  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$  (в которых реализуется трехмерное НДС,  $j=1, \dots, M$ ,  $M$  — общее число 1сКЭ  $V_j^h$ ,  $M=216$ ) и учитывает неоднородную структуру 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ . На разбиении  $R_d$  строим суперэлемент  $V_s$  с помощью метода конденсации [9, с. 248]. Полную потенциальную энергию  $\Pi_d$  суперэлемента  $V_s$  представим в форме

$$\Pi_d = \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T [K_s] \mathbf{q}_s - \mathbf{q}_s^T \mathbf{F}_s, \quad (31)$$

где  $T$  — транспонирование,  $[K_s]$  — матрица жесткости (размерности  $654 \times 654$ ),  $\mathbf{F}_s, \mathbf{q}_s$  — векторы узловых сил и перемещений (размерности 654) суперэлемента  $V_s$ . Базисную функцию  $N_{ijk}(x, y, z)$  для узла  $i, j, k$  сетки  $H_d$  с помощью полиномов Лагранжа запишем в форме  $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$ , где

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^2 \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^3 \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha},$$

$$L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^2 \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha},$$

где  $x_i, y_j, z_k$  — координаты узла  $i, j, k$  сетки  $H_d$  в системе координат  $Oxyz$ ,  $ijk$  — целочисленная система координат, введенная для узлов сетки  $H_d$ ,  $i, k=1, 2$ ,  $j=1, 2, 3$  (см. рис. 3). Обозначим:  $N_e = N_{ijk}$ ,  $u_e = u_{ijk}$ ,

$v_e = v_{ijk}$ ,  $w_e = w_{ijk}$ , где  $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$  — значения перемещений  $u, v, w$  в узле  $i, j, k$  сетки  $H_d$ ,  $i, k=1, 2$ ,  $j=1, 2, 3$ ,  $e=1, \dots, 12$ . Тогда аппроксимирующие функции перемещений  $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$  представим

$$u^{(2)} = \sum_{e=1}^{12} N_e u_e, \quad v^{(2)} = \sum_{e=1}^{12} N_e v_e, \quad w^{(2)} = \sum_{e=1}^{12} N_e w_e. \quad (32)$$

Обозначим:  $\mathbf{q}_d$  — вектор узловых перемещений крупной сетки  $H_d$  (размерности 36), т.е. вектор узловых неизвестных 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ . Используя (32), вектор  $\mathbf{q}_s$  узловых перемещений суперэлемента  $V_s$  выражаем через вектор  $\mathbf{q}_d$ , т.е.

$$\mathbf{q}_s = [A_s^d] \mathbf{q}_d, \quad (33)$$

где  $[A_s^d]$  — прямоугольная матрица (размерности  $654 \times 36$ ).

Подставляя (33) в (31), из выполнения условия  $\partial \Pi_d / \partial \mathbf{q}_d = 0$  получаем равенство  $[K_d] \mathbf{q}_d = \mathbf{F}_d$ , где  $[K_d] = [A_s^d]^T [K_s] [A_s^d]$ ,  $\mathbf{F}_d = [A_s^d]^T \mathbf{F}_s$ , где  $[K_s], \mathbf{F}_s$  — матрица жесткости (размерности  $36 \times 36$ ) и вектор узловых сил (размерности 36) 2сКЭ  $V_d^{(2)}$ . Решение, построенное для сетки  $H_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , с помощью формулы (33) проецируется на сетку суперэлемента  $V_s$ , затем с помощью соотношений метода конденсации — на мелкую сетку  $h_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ , что позволяет вычислять напряжения в 1сКЭ  $V_j^h$  базового разбиения  $R_d$  2сКЭ  $V_d^{(2)}$ .

На модели  $V_n^b (R_n^0)$  (см. п. 4) строим двухсеточную дискретную модель, которая состоит из 2сКЭ типа  $V_d^{(2)}$  размерами  $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$ , где  $h_n = 16h/n$ ,  $n=1, 11$ , и которую обозначим  $V_n^0 (R_n)$ . Отметим, что модели  $V_n^0, R_n$  имеют одинаковую размерность. Для моделей  $V_n^0, R_n$  находим (по 4-й теории прочности [1, с. 167]) соответственно максимальные эквивалентные напряжения  $\sigma_n^b, \sigma_n^0$ ,  $n=3, 5, \dots, 11$ . Результаты расчетов представлены в таблице 1, где  $\delta_n^p (\%) = 100\% \times |p_n - p_{n-2}| / p_n$ ,  $n=5, 7, 9, 11$ ,  $p_n = \sigma_n^0 / \sigma_n^b$ ;  $N_n^0, b_n^0$  — размерность и ширина ленты СУ МКЭ модели  $V_n^0$ ,  $n=3, 5, \dots, 11$ .

Таблица 1

Результаты расчета КТ  $V_0$

$n$	$V_n^0$	$N_n^0$	$b_n^0$	$\sigma_n^b$	$R_n$	$\sigma_n^0$	$p_n$	$\delta_n^p (\%)$
3	$V_3^0$	3456	114	0,420	$R_3$	0,137	0,32619	—
5	$V_5^0$	12960	240	0,505	$R_5$	1,642	3,25149	93,04
7	$V_7^0$	32256	414	0,572	$R_7$	1,839	3,21503	1,134
9	$V_9^0$	94800	636	0,628	$R_9$	2,001	3,18631	0,901
11	$V_{11}^0$	114048	906	0,678	$R_{11}$	2,142	3,16127	0,792

Анализ результатов расчетов показывает равномерную сходимость напряжений  $\sigma_n^b, \sigma_n^o$ , параметра  $p_n$  и погрешности  $\delta_n$ . Рассмотрим расчет КТ  $V_0$  на основе БМ  $R_0$ . Отметим, что в расчетах КТ, как правило, используют три (и более) дискретных модели для анализа сходимости и погрешности численных решений. В данном случае используем три модели:  $R_1 = R_0$ , модели  $R_2$  и  $R_3$  получены путем измельчения БМ  $R_0$ . На дискретной модели  $R_n$ , используя 2сКЭ типа  $V_d^{(2)}$  размерами  $6h_n \times 6h_n \times 6h_n$ , определяем двухсеточную дискретную модель  $R_n^o$ , где  $h_n$  — шаг равно-

мерной сетки модели  $R_n$ ,  $h_n = h/n$ ,  $n=1,2,3$ . Результаты расчетов для моделей  $R_n, R_n^o$  даны в таблице 2, где  $N_n, b_n$  — размерность и ширина ленты СУ МКЭ модели  $R_n, N_n^o$  и  $b_n^o$  — размерность и ширина ленты модели  $R_n^o, n=1,2,3$ . Коэффициент  $k_n$  находим по формуле  $k_n = (N_n^o \times b_n^o) / (N_{11}^o \times b_{11}^o)$ , где  $N_n^o \times b_n^o$  — объем памяти ЭВМ, необходимый для модели  $R_n^o, n=1,2,3, N_{11}^o \times b_{11}^o$  — объем памяти ЭВМ, необходимый для модели  $V_{11}^o, N_{11}^o = 114048, b_{11}^o = 906$ , которая используется в расчетах КТ  $V_0$  по МЭУП (см. табл. 1).

Таблица 2

Результаты расчетов для моделей  $R_n, R_n^o$

$n$	$h_n$	$R_n$	$N_n$	$b_n$	$R_n^o$	$N_n^o$	$b_n^o$	$k_n$
1	$h$	$R_1$	32517504	28524	$R_1^o$	332928	1791	5,77
2	$h/2$	$R_2$	257465088	112332	$R_2^o$	2509056	6639	161,21
3	$h/3$	$R_3$	865945728	251436	$R_3^o$	8297856	14559	1169,18

Итак, реализация МЭУП при расчете КТ  $V_0$  требует в  $1,169 \times 10^3$  раз меньше объема памяти ЭВМ, чем реализация расчета КТ  $V_0$  на основе измельчения БМ  $R_0$  (см. табл. 2). Определяем напряжение  $\sigma_b$  для тела  $V^b$  и коэффициент эквивалентности  $p$ . Так как напряжения  $\sigma_9^b = 0,628$  и  $\sigma_{11}^b = 0,678$  отличаются на малую величину  $\delta = (0,678 - 0,628) / 0,678 = 0,07374$  (см. табл. 1), то пусть  $\sigma_b = \sigma_{11}^b$ , т.е.  $\sigma_b = 0,678$ . Тестовые расчеты показывают, что напряжение  $\sigma_{11}^b$  найдено с ошибкой не более 15%. Тогда принимаем  $\delta_\alpha = 0,15$ . Отметим, что условие (24) выполняется, т.е. имеем  $\delta_\alpha = 0,15 < C_\alpha = 0,458$ . Поскольку  $\delta_{11}^p = 0,792(\%)$  малая величина (см. табл. 1), то принимаем  $p = p_{11} = 3,16127$ . Подставляя в представление (4)  $p = 3,16127, n_1 = 1,3, n_2 = 3,5, \delta_\alpha = 0,15$ , получаем для КТ  $V_0$  скорректированные эквивалентные условия прочности вида

$$4,83 \leq n_b \leq 9,62. \tag{34}$$

Для тела  $V^b$  коэффициент запаса  $n_b$  определяем по формуле  $n_b = \sigma_T / \sigma_b$  с учетом, что  $\sigma_T = 5, \sigma_b = 0,678$ , получаем  $n_b = 5 / 0,678 = 7,375$ . Коэффициент запаса  $n_b = 7,375$  тела  $V^b$  удовлетворяет условиям прочности (34). Тогда коэффициент запаса  $n_0$  КТ  $V_0$  удовлетворяет условиям прочности (30) (см. теорему 1 п. 3).

**6. Обобщенные эквивалентные условия прочности**

Процедуру расчета КТ, для которого задано множество нагружений, с применением обобщенных эквивалентных условий прочности, не теряя общности суждений, рассмотрим на примере КТ  $V_0$  (рис. 1; см. п. 5). Пусть для границы  $S = \{0,5L \leq y \leq L, z = H\}$  КТ  $V_0$  задано множество нагружений  $Q_{xz}$  вида

$$Q_{xz} = \{q_x, q_z: q_x = \alpha, 0 \leq \alpha < \infty, q_z = \beta, 0 \leq \beta < \infty\}. \tag{35}$$

Для нахождения (верхней, нижней) границ для множества  $P$  коэффициентов эквивалентности, отвечающих множеству нагружения (35), проводят расчеты для ряда характерных нагружений КТ  $V_0$ :

$q_x = q_x^{(n)}, q_z = q_z^{(n)} (q_x^{(n)}, q_z^{(n)} = const), n = \overline{1,4}$ . Результаты расчетов даны в таблице 3, где коэффициент эквивалентности  $p^{(n)}$  найден для нагружения  $q_x^{(n)}, q_z^{(n)}$  с помощью моделей  $V_{11}^o, R_{11}$  (см. п. 5),  $n = 1,4$ .

Таблица 3

Результаты расчетов для нагружений  $q_x^{(n)}, q_z^{(n)}$

$n$	$q_x^{(n)} \times 10^{-3}$	$q_z^{(n)} \times 10^{-3}$	$p^{(n)}$
1	$q_x^{(1)} = 0$	$q_z^{(1)} = 0,225$	3,15694
2	$q_x^{(2)} = 0,180$	$q_z^{(2)} = 0,325$	3,16020
3	$q_x^{(3)} = 0,275$	$q_z^{(3)} = 0$	3,15812
4	$q_x^{(4)} = 0,750$	$q_z^{(4)} = 0,750$	3,16127

В силу линейности задачи теории упругости и соотношения (29) коэффициент эквивалентности  $p$ , определяемый для нагружения  $q_x = \alpha_0 q_x^{(n)}$ ,  $q_z = \alpha_0 q_z^{(n)}$ , не зависит от  $\alpha$ , где  $\alpha_0 = const$ ,  $0 < \alpha_0 < \infty$ ,  $n = 1, 4$ . Тогда при любом  $\alpha_0 > 0$  для нагружений  $q_x = \alpha_0 q_x^{(3)}$ ,  $q_z = 0$  и  $q_x = 0$ ,  $q_z = \alpha_0 q_z^{(1)}$  ( $q_x = \alpha_0 q_x^{(2)}$ ,  $q_z = \alpha_0 q_z^{(2)}$ ) и  $q_x = \alpha_0 q_x^{(4)}$ ,  $q_z = \alpha_0 q_z^{(4)}$ , где  $q_x^{(4)} = q_z^{(4)}$  соответственно получаем  $p = p^{(3)}$  и  $p = p^{(1)}$  ( $p = p^{(2)}$  и  $p = p^{(4)}$ )

(см. табл. 3). Отсюда следует, что если  $q_x \rightarrow q_z$ , то  $p \rightarrow p^{(4)}$ ; если  $q_z = \alpha_0$ ,  $q_x \rightarrow 0$ , то  $p \rightarrow p^{(1)}$ ; если  $q_x = \alpha_0$ ,  $q_z \rightarrow 0$ , то  $p \rightarrow p^{(3)}$ ; если  $q_x \neq q_z$ ,  $q_x, q_z \neq 0$ , то  $p^{(1)} < p < p^{(4)}$ , что подтверждают расчеты. Итак, для любых нагружений  $q_x, q_z$  в (35) имеем  $\forall p \in \mathbf{P}$ :  $p^{(1)} \leq p \leq p^{(4)}$ .

Введем коэффициенты

$$p_1 = \min(p^{(n)}), p_2 = \max(p^{(n)}), n = \overline{1, 4}, \text{ т. е. } \forall p \in \mathbf{P}: p_1 \leq p \leq p_2. \quad (36)$$

Пусть для КТ  $V_0$  выполняется условие

$$p_2 C_1 \leq p_1 C_2, \quad (37)$$

где  $C_1 = n_1 / (1 - \delta_\alpha)$ ,  $C_2 = n_2 / (1 + \delta_\alpha)$ .

Согласно исходным данным для КТ  $V_0$  и таблице 3, имеем  $C_1 = 1,5294$ ,  $C_2 = 3,0435$ ,  $p_1 = p^{(1)} = 3,15694$ ,  $p_2 = p^{(4)} = 3,16127$ . Получаем  $p_2 C_1 = 4,83$ ,  $p_1 C_2 = 9,61$ , т.е. условие (37) для КТ  $V_0$  выполняется.

Для коэффициента эквивалентности  $p_q \in [p_1, p_2]$ , который найден по МКЭ для нагружения  $q_x, q_z \in Q_{xz}$  тела  $V^b$ , условия прочности (4) принимают вид

$$p_q C_1 \leq n_b \leq p_q C_2, \quad (38)$$

где  $n_b$  — коэффициент запаса изотропного однородного тела  $V^b$ .

Согласно (36) имеем  $p_q C_1 \leq p_2 C_1$ ,  $p_1 C_2 \leq p_q C_2$ . Используя эти неравенства и (37), получаем  $p_q C_1 \leq p_2 C_1 \leq p_1 C_2 \leq p_q C_2$ . Пусть нагружение  $q_x, q_z \in Q_{xz}$  тела  $V^b$  такое, что

$$p_q C_1 \leq p_2 C_1 \leq n_b \leq p_1 C_2 \leq p_q C_2, \quad (39)$$

т.е. для коэффициента запаса  $n_b$  тела  $V^b$  имеем следующие условия прочности

$$p_2 C_1 \leq n_b \leq p_1 C_2. \quad (40)$$

Пусть для нагружения  $q_x, q_z \in Q_{xz}$  тела  $V^b$  коэффициент  $n_b$  удовлетворяет условиям прочности (40). Тогда для коэффициента  $n_b$  выполняются условия (39), т.е. условия прочности (38). Согласно теореме 1 (см. п. 3), из выполнения условий прочности (38) следует выполнение заданных условий прочности (30) для нагружения  $q_x, q_z \in Q_{xz}$  КТ  $V_0$ . Отметим, что согласно МЭУП тело  $V^b$  и КТ  $V_0$  имеют одинаковые нагружения. Итак, показано, что из выполнения условий прочности (40) для тела  $V^b$ , имеющего нагружение  $q_x, q_z \in Q_{xz}$ , следует выполнение условий прочности (30) для нагружения  $q_x, q_z \in Q_{xz}$  КТ  $V_0$ . Условия (40) будем называть обобщенными эквивалентными ус-

ловиями прочности. По сути, выше доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть для множества нагружений  $Q$ , заданного для КТ  $V_0$ , согласно МЭУП построены обобщенные эквивалентные условия прочности (40). Пусть для коэффициента запаса  $n_b$  тела  $V^b$ , имеющего нагружение  $F \in Q$ , условия прочности (40) выполняются. Тогда выполняются заданные условия прочности (30) для нагружения  $F$  КТ  $V_0$ .

Итак, расчет на прочность по МЭУП КТ  $V_0$ , для которого задано множество нагружений (35), сводится к построению обобщенных эквивалентных условий прочности (40). Согласно теореме 2, если коэффициент запаса  $n_b$  тела  $V^b$ , имеющего нагружение  $q_x, q_z \in Q_{xz}$ , удовлетворяет обобщенным эквивалентным условиям прочности (40), то коэффициент запаса  $n_0$  КТ  $V_0$  отвечает заданным условиям прочности (30) для нагружения  $q_x, q_z \in Q_{xz}$ .

Для КТ  $V_0$  обобщенные эквивалентные условия прочности (40) имеют вид

$$4,83 \leq n_b \leq 9,61. \quad (41)$$

В данном примере  $p_1 = 3,15694$ ,  $p_2 = 3,16127$ , и так как  $\Delta p = p_2 - p_1 = 0,00433$  мало, то условия прочности (34) и (41) почти совпадают (см. п. 5).

Достоинство обобщенных эквивалентных условий прочности (40) состоит в том, что они применяются для всего заданного множества нагружений  $Q_{xz}$  КТ  $V_0$ . Следовательно, нет необходимости определять эквивалентные условия прочности (38), т.е. коэффициент эквивалентности  $p_q$ , для каждого заданного нагружения  $q_x, q_z \in Q_{xz}$ , что приводит к уменьшению временных затрат реализации МЭУП при использовании различных нагружений  $q_x, q_z \in Q_{xz}$  в расчетах на прочность КТ  $V_0$ .

#### Заключение

Изложен метод эквивалентных условий прочности для расчета на прочность тел с неоднородной регулярной структурой, который реализуется на основе МКЭ с использованием многосеточных конечных элементов и сводится к расчету на прочность изотропных однородных тел с применением эквивалентных условий прочности. Реализация метода требует малых ресурсов ЭВМ.



## Библиографический список

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, 1975.
2. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. М., 1993.
3. Москвичев В.В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. Новосибирск, 2002.
4. Матвеев А.Д. Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности // Известия Алт. гос. ун-та. 2017. № 4. DOI 10.14258/izvasu(2017)4-21.
5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford, 2013.
6. Голованов А.И., Тюленева О.И., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М., 2006.
7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., 1982.
8. Секулович М. Метод конечных элементов. М., 1993.
9. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М., 1981.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., 1975.
11. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells // Archives of Computational Methods in Engineering. 2002. Vol. 9.
12. Rah K., Van Paeppegem W., Habraken A.M. and Degrieck J. A partial hybrid stress solid-shell element for the analysis of laminated composites // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 2011. Vol. 200. № 49–52.
13. Cinefra M., Carrera E. Shell finite elements with different through-the-thickness kinematics for the linear analysis of cylindrical multilayered structures // Int. J. Num. Meth. Eng. 2013. Vol. 93. № 2.
14. Ahmed A., Kapuria S. A four-node facet shell element for laminated shells based on the third order zigzag theory // Composite Structures. 2016. Vol. 158.
15. Carrera E., Pagani A. Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structure // Composites Part B: Engineering. 2017. Vol. 111.
16. Yasin M.Y., Kapuria S. An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells // Composite Structures. 2013. Vol. 98.
17. Caliri M.F., Ferreira A.J.M., Tita V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method // Composite Structures. 2016. Vol. 156.
18. Soltani Z., Hosseini Kordkheili S.A. Interlaminar stress analysis of composite shell structures using a geometrically nonlinear layer-wise shell finite element // Composite Structures. 2021. Vol. 257.
19. Hasim K.A., Kefal A., Madensi E. Isogeometric plate element for unstiffened and blade stiffened laminates based on refined zigzag theory // Composite Structures. 2019. Vol. 222.
20. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М., 1982.
21. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия : Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 4.
22. Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных пластин и балок // Вестник КрасГАУ. 2016. № 12.
23. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158. № 1. Art. 012067.
24. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом наполнения // Прикладная механика и техническая физика. 2004. № 3.
25. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Известия Алт. гос. ун-та. 2014. № 1/1. Серия : Математика и механика. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-18.
26. Матвеев А.Д. Метод образующих конечных элементов // Вестник КрасГАУ. 2018. № 6.
27. Матвеев А.Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 3. DOI: 10/15593/perm.mech/2019.3.05.
28. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М., 2008.
29. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск, 1984.
30. Кравчук А. С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. М., 1985.
31. Алфутов Н.А., Зиновьев А.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М., 1984.
32. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М., 1984.

33. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск, 2001.

34. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М., 1988.

35. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. 3. Прикладные исследования. / А.Н. Гузь, И.В. Игнатов, А.Г. Гирченко и др. Киев, 1983.

36. Матвеев А.Д. Расчет на прочность композитных конструкций с применением эквивалентных условий прочности // Вестник КрасГАУ. 2014. № 11.

37. Матвеев А.Д. Метод эквивалентных условий прочности в расчетах композитных конструкций регулярной структуры с применением многосеточных конечных элементов // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20. № 4. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-4-423-435.

38. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М., 1982.