УДК 514.76

Об инвариантных полусимметрических связностях на трехмерных неунимодулярных группах Ли с метрикой солитона Риччи

Д.В. Вылегжанин[1], П.Н. Клепиков[2], Е.Д. Родионов[2], О.П. Хромова[2]

[1]Белорусский государственный университет (Минск, Белоруссия)
[2]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On Invariant Semisymmetric Connections on Three-Dimensional Non-Unimodular Lie Groups with the Metric of the Ricci Soliton

D.V. Vylegzhanin[1], P.N. Klepikov[2], E.D. Rodionov[2], O.P. Khromova[2]

[1] Belarusian State University (Minsk, Belarus)
[2]Altai State University (Barnaul, Russia)

Метрические связности с векторным кручением, или полусимметрические связности впервые открыты Э. Картаном и являются естественным обобщением связности Леви-Чивиты. Свойства таких связностей и основные тензорные поля исследовались И. Агриколой, К. Яно и другими математиками.

Солитоны Риччи представляют собой решение потока Риччи и являются естественным обобщением метрик Эйнштейна. В общем случае они исследовались многими математиками, что нашло отражение в обзорах Х.–Д. Цао, Р.М. Аройо — Р. Лафуэнте. Наиболее изучен данный вопрос в случае тривиальных солитонов Риччи, или метрик Эйнштейна, а также в однородном римановом случае.

В настоящей работе исследованы полусимметрические связности на трехмерных группах Ли с метрикой инвариантного солитона Риччи. Получена классификация данных связностей на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой солитона Риччи. Доказано, что в этом случае существуют нетривиальные инвариантные полусимметрические связности. Кроме того, показано, что существуют нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.

Ключевые слова: полусимметрические связности, инвариантные солитоны Риччи, группы Ли, левоинвариантные римановы метрики.

DOI: 10.14258/izvasu(2021)4-13

Metric connections with vector torsion, or semisymmetric connections, were first discovered by E. Cartan. They are a natural generalization of the Levi-Civita connection. The properties of such connections and the basic tensor fields were investigated by I. Agrikola, K. Yano, and other mathematicians.

Ricci solitons are the solution to the Ricci flow and a natural generalization of Einstein's metrics. In the general case, they were investigated by many mathematicians, which was reflected in the reviews by H.-D. Cao, R.M. Aroyo — R. Lafuente. This question is best studied in the case of trivial Ricci solitons, or Einstein metrics, as well as the homogeneous Riemannian case.

This paper investigates semisymmetric connections on three-dimensional Lie groups with the metric of an invariant Ricci soliton. A classification of these connections on three-dimensional non-unimodular Lie groups with the left-invariant Riemannian metric of the Ricci soliton is obtained. It is proved that there are nontrivial invariant semisymmetric connections in this case. In addition, it is shown that there are nontrivial invariant Ricci solitons.

Key words: semisymmetric connections, invariant Ricci solitons, Lie groups, left–invariant Riemannian metrics.

Введение. Одним из актуальных направлений в исследовании многообразий является изучение многообразий с полусимметрической метрической связностью. Данные связности были впервые открыты Э. Картаном и являются естественным обобщением связности Леви-Чивиты. Свойства таких связностей и основные тензорные поля исследовались И. Агриколой, К. Яно и другими математиками [1–12]. Целью данной работы является изучение полусимметрических связностей на трехмерных группах Ли с метрикой инвариантного солитона Риччи. В результате будет дана классификация данных связностей на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой солитона Риччи, а также показано, что в этом случае существуют нетривиальные инвариантные полусимметрические связности. Ранее авторами проводились аналогичные исследования в классе эйнштейновых метрик [13, 14].

Более подробно. Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \quad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется метрической связностью с векторным кручением, или полусимметрической связностью (с точностью до направления).

Класс метрических связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [1–10]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами $R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$, $r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y)$.

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна следующая теорема

Теорема 1 [9, 10]. *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π, определяемая равенством $\pi(X) = g(X,V)$ для любого векторного поля X на M, замкнута, т.е. $d\pi = 0$.*

Определение 1. *Метрика g полного риманова многообразия (M, g) называется солитоном Риччи, если она удовлетворяет уравнению*

$$r = \Lambda g + L_P g, \quad (2)$$

где r — тензор Риччи метрики g, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P, константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ — группа Ли и поле P левоинвариантно, инвариантным солитоном Риччи.

Если $M = G/H$ —- однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ и поле P левоинвариантно — инвариантным солитоном Риччи. Более того, инвариантный солитон Риччи называется тривиальным, если $L_P g(Y,Z) = \tau \cdot g(Y,Z)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$, и любых $Y, Z \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G.

Замечание 1. *Векторное поле V неявно входит в уравнение (2), а в случае $V = 0$ мы получаем классическое определение солитона Риччи. Заметим также, что производная Ли имеет вид: $L_P g(X,Y) = Pg(X,Y) + g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$. Более того, если солитон Риччи инвариантен, то $L_P g(X,Y) = g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$ для произвольных инвариантных полей X и Y.*

Отметим, что в случае связности Леви-Чивиты инвариантные солитоны Риччи исследовались в работах [11–12], где была доказана

Теорема 2 [11]. *Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинваринтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Замечание 2. *В неунимодулярном случае аналогичный результат до размерности четыре включительно получен П.Н. Клепиковым и Д.Н. Оскорбиным [12].*

Определение 2. *Полусимметрическая связность на римановом многообразии (M, g) называется тривиальной, если векторное поле V, определяющее эту связность, равно нулю.*

Основным результатом работы является

Теорема 3. *Пусть (G, g, ∇) — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы и полусимметрические связности на них, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.*

Основные конструкции. Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $e_1, \ldots, e_n$ левоинваринтных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c^k_{ij} g_{ks},$$

где c^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на G метрическую связность ∇ с векторным кручением.

Тогда компоненты связности ∇ определяются формулами $\Gamma^k_{ij} = (\Gamma^g)^k_{ij} + g_{ij}V^k - g_{sj}V^s\delta^k_i$, где $(\Gamma^g)^s_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$ — компоненты связности Леви-Чивиты ∇^g, $\|g^{ks}\|$ — матрица обратная к $\|g_{ks}\|$, δ^k_i — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r. В базисе $e_1, \ldots, e_n$

их компоненты соответственно есть $R_{ijks} = \left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il} + c^l_{ij}\Gamma^p_{lk}\right) g_{ps}$, $r_{ik} = R_{ijks}g^{js}$.

Пусть P — левоинвариантное векторное поле. Тогда (2) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} - P^k(c^s_{ki}g_{sj} + c^s_{kj}g_{si}), \qquad (3)$$

где r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, P^k— координаты левоинвариантного векторного поля, c^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $(G, \mathfrak{g}, V)$ задана метрической группой Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и векторным полем V, определяющим связность. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если метрическая группа Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ удовлетворяет уравнению солитона Риччи, то в некотором базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполняется соотношение*

$$V^i g_{ij} c^j_{kt} = 0; \qquad (4)$$

или в инвариантной форме

$$g\left(V, [X, Y]\right) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь c^j_{kt} — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые разложением $[e_k, e_t] = c^j_{kt}e_j$.

Доказательство. Если $(G, \mathfrak{g}, V)$ удовлетворяет уравнению солитона Риччи, то в силу (2) тензор Риччи должен быть симметричен. Тогда по теореме 1 необходимо $d\pi = 0$, т.е. для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{g}$ выполняется $2d\pi(X, Y) = X\pi(Y) - Y\pi(X) - \pi([X, Y]) = -2\pi([X, Y]) = -2g\left([X, Y], V\right) = 0$. Фиксируя некоторый базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, из данного равенства получаем (4).

Лемма 2. *Инвариантный солитон Риччи тривиален тогда и только, когда выполняется*

$$P^k(c^s_{ki}g_{sj} + c^s_{kj}g_{si}) = \tau g_{ij}. \qquad (5)$$

Следующая классификация для трехмерных метрических групп Ли была получена Дж. Милнором в [15].

Теорема 4. *Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что: $[e_1, e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2$, $[e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta\, e_3$, $[e_2, e_3] = 0$, где $\alpha + \delta = 2$.*

Доказательство теоремы. В данном разделе для доказательства теоремы 3 рассмотрим систему уравнений (3) для определения инвариантных солитонов Риччи, систему уравнений (4) для определения симметричности тензора Риччи, а также систему уравнений (5) для определения тривиальности солитона Риччи. Заметим, что в силу тензорного вида левой и правой частей уравнения (4) все вычисления достаточно провести для базиса Дж. Милнора. Рассуждения проведем для неунимодулярной группы Ли G, что будет достаточным для доказательства теоремы 3.

Условие (4) имеет вид

$$\gamma V^2 + \delta V^3 = 0, \quad \alpha V^2 + \beta V^3 = 0,$$

где $\alpha + \delta = 2$. Поэтому имеет место один из следующих случаев

(i) $V = \left(V^1, 0, 0\right)$;

(ii) $V = \left(V^1, 0, V^3\right)$ и $\alpha = 2$, $\beta = \delta = 0$;

(iii) $V = \left(V^1, V^2, V^3\right)$ и $\alpha = -\dfrac{\beta V^3}{V^2}$, $\gamma = -\dfrac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}$, $\delta = \dfrac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}$.

Рассмотрим их последовательно.

(i) В данном случае уравнение солитона (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
&0 = P^2\beta + P^3\delta,\\
&0 = P^2\alpha + P^3\gamma,\\
&\alpha\gamma + \beta\delta + \frac{1}{2}V^1(\beta + \gamma) = P^1(\gamma + \beta),\\
&-\alpha^2 - 2\alpha V^1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 - \alpha\delta - \delta V^1 - (V^1)^2 =\\
&= \Lambda - 2P^1\alpha,\\
&-\frac{1}{2}\gamma^2 - \delta^2 - 2\delta V^1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \alpha\delta - \alpha V^1 - (V^1)^2 =\\
&= \Lambda - 2P^1\delta,\\
&-\alpha^2 - \alpha V^1 - \frac{1}{2}\beta^2 - \beta\gamma - \frac{1}{2}\gamma^2 - \delta^2 - \delta V^1 = \Lambda,
\end{aligned}$$

где $\alpha + \delta = 2$.

Решениями данной системы равенств являются

1. $\alpha = 2 - \delta$, $\Lambda = -4 - 2V^1 + 4\delta - 2\delta^2 - 2\gamma^2$, $\gamma = \beta$, $V = \left(\pm\sqrt{2\delta^2 - 4\delta + 4 + 2\gamma^2}, 0, 0\right)$, $P = \left(\frac{V^1}{2} + 1, 0, 0\right)$;
2. $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \delta = 0$, $\Lambda = -8$, $V = (2, 0, 0)$, $P = (2, 0, P^3)$;

3. $\alpha = 1$, $\beta = -\gamma$, $\delta = 1$, $\Lambda = -2 - 2V^1$, $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{V^1+(V^1)^2}{2}, 0, 0\right)$;
4. $\alpha = 2-\delta$, $\beta = \gamma = \pm\sqrt{2\delta - \delta^2}$, $\delta \in (0;2)$, $\Lambda = 0$, $V = (-2, 0, 0)$, $P = \left(0, P^2, -\dfrac{\beta P^2}{\delta}\right)$;
5. $\alpha = 2 - \delta$, $\beta = \gamma = \pm\sqrt{2\delta - \delta^2}$, $\delta \in (0;2)$, $\Lambda = -8$, $V = (2, 0, 0)$, $P = \left(2, P^2, -\dfrac{\beta P^2}{\delta}\right)$.

Проверим, какие из полученных солитонов тривиальны, а какие нет.

Заметим, что в рассматриваемом случае условие (5) того, что векторное поле P является конформно-киллинговым, равносильно системе уравнений вида

$$\begin{aligned} &2P^1\alpha = 0, \quad 2P^1\delta = 0, \quad P^1(\beta+\gamma) = 0, \\ &P^2\alpha + P^3\gamma = 0, \quad P^2\beta + P^3\delta = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\alpha + \delta = 2$.

1. Пусть $\Lambda = -4 - 2V^1 + 4\delta - 2\delta^2 - 2\gamma^2$, $\alpha = 2 - \delta$, $\gamma = \beta$, $V = \left(\pm\sqrt{2\delta^2 - 4\delta + 4 + 2\gamma^2}, 0, 0\right)$, $P = \left(\frac{V^1}{2} + 1, 0, 0\right)$. Система равенств (6) упрощается до системы вида

$$P^1(2-\delta) = 0, \quad P^1\delta = 0, \quad P^1\beta = 0. \tag{7}$$

Откуда заключаем, что векторное поле P является конформно-киллинговым при $P^1 = 0$, что равносильно условию $V^1 = -2$ или $\delta^2 + 2\delta + \gamma^2 = 0$. Класс таких солитонов не пуст. Например, в нем содержится солитон вида $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \delta = 0$, $\Lambda = 0$, $V = (-2, 0, 0)$, $P = (0, 0, P^3)$.

2. Пусть $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \delta = 0$, $\Lambda = -8$, $V = (2, 0, 0)$, $P = (2, 0, P^3)$. Тогда первое уравнение в (6) обращается в неверное равенство. Следовательно, векторное поле P не является конформно-киллинговым.

3. Пусть $\alpha = 1$, $\beta = -\gamma$, $\delta = 1$, $\Lambda = -2 - 2V^1$, $V = (V^1, 0, 0)$, $P = \left(\frac{V^1+(V^1)^2}{2}, 0, 0\right)$. Заметим, что рассматриваемый солитон Риччи удовлетворяет условию (6) при $2P^1 = V^1 + (V^1)^2 = 0$, т.е. при $V^1 = 0$ или $V^1 = -1$.

Если $V^1 = -1$, то для данного тривиального солитона Риччи выполняется $\alpha = 1$, $\beta = -\gamma$, $\delta = 1$, $\Lambda = 0$, $V = (-1, 0, 0)$, $P = (0, 0, 0)$.

Если $V^1 = 0$, то векторное поле V становится тривиальным и полусимметрическая связность в этом случае является связностью Леви-Чивиты.

4. Пусть $\alpha = 2 - \delta$, $\beta = \gamma = \pm\sqrt{2\delta - \delta^2}$, $\delta \in (0;2)$, $\Lambda = 0$, $V = (-2, 0, 0)$, $P = \left(0, P^2, -\dfrac{\beta P^2}{\delta}\right)$. Непосредственно подстановкой рассматриваемого солитона в (6) убеждаемся, что векторное поле P не является конформно-киллинговым.

5. Пусть $\alpha = 2 - \delta$, $\beta = \gamma = \pm\sqrt{2\delta - \delta^2}$, $\delta \in (0;2)$, $\Lambda = -8$, $V = (2, 0, 0)$, $P = \left(2, P^2, -\dfrac{\beta P^2}{\delta}\right)$. Для указанного солитона Риччи векторное поле P не является конформно-киллинговым. Это очевидно следует из первых двух уравнений системы (6) и того факта, что для данного солитона Риччи $P^1 = 2$ и $\alpha = 2 - \delta$.

(ii) В данном случае уравнение солитона (3) примет вид

$$\begin{aligned} &V^1V^3 = 0, \\ &\frac{1}{2}V^3\gamma = 2P^2 + P^3\gamma, \\ &2\gamma + \frac{1}{2}V^1\gamma = P^1\gamma, \\ &-4 - 4V^1 + \frac{1}{2}\gamma^2 - (V^3)^2 - (V^1)^2 = \Lambda - 4P^1, \\ &-\frac{1}{2}\gamma^2 - 2V^1 - (V^1)^2 = \Lambda, \\ &-4 - 2V^1 - \frac{1}{2}\gamma^2 - (V^3)^2 = \Lambda, \end{aligned} \tag{8}$$

Из первого уравнения системы заключаем, что либо $V^1 = 0$, либо V^3. Если $V^3 = 0$, то попадаем в рассмотренный выше случай (i). Если $V^1 = 0$, то из последних двух уравнений (8) заключаем, что данная система равенств неразрешима в поле действительных чисел.

Случай (iii) рассматривается аналогично с помощью систем компьютерной математики и не дает искомых связностей.

Заключение. В работе исследован класс полусимметрических метрических связностей, которые включают в себя связность Леви-Чивиты. Получена классификация данных связностей на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой солитона Риччи. Кроме того, построена математическая модель для изучения полусимметрических связностей на группах Ли с метрикой инвариантного солитона Риччи.

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. Vol. 42.

2. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. 1970. Vol. 15.

3. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its

Applications. 2016. Vol. 46.

4. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008. Vol. 3. № 25.

5. Agricola I., Thier C. The Geodesics of Metric Connections with Vectorial Torsion // Annals of Global Analysis and Geometry. 2004. Vol. 26.

6. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О секционной кривизне метрических связностей с векторным кручением // Известия Алт. гос. ун-та. 2020. № 1(111) DOI: 10.14258/izvasu(2020)1-21.

7. Yilmaz H.B., Zengin F.O., Uysal. S.A. On a Semi Symmetric Metric Connection with a Special Condition on a Riemannian Manifold // European journal of pure and applied mathematics. 2011. Is. 2. Vol. 4.

8. Zengin F.O., Demirbag S.A., Uysal S.A., Yilmaz H.B. Some vector fields on a riemannian manifold with semi-symmetric metric connection // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2012. Is. 2. Vol. 38.

9. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. 1985. Vol. 16. № 7.

10. De U.C., De B.K. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold // Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. 1995. Vol. 54.

11. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. 2014. Is. 2. Vol. 14.

12. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солионы Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алт. гос. ун-та. 2015. № 1/2(85) DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-21.

13. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением // Итоги науки и техники. Серия : Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 181. № 3. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-41-53.

14. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26. № 4. DOI:10.25587/SVFU.2019.49.61.003.

15. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. Vol. 21.