

УДК 519.6

Численное решение одной задачи закачки углекислого газа в горную породу*

Р.А. Вирц

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Numerical Solution of One Problem of Carbon Dioxide Injection into the Rock

R.A. Virts

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается двумерная математическая модель фильтрации вязкой несжимаемой жидкости или газа в пористой среде. Особенностью представленной модели является учет пороупругих свойств твердого скелета. С математической точки зрения анализируются уравнения сохранения массы для жидкой / газообразной и твердой фаз, закон Дарси, реологическое соотношение для пористой среды и закон сохранения баланса сил. Целью работы является численное исследование модельной начально-краевой задачи закачки углекислого газа в горную породу с минимальной начальной пористостью, а также выяснение параметров, при которых в верхних слоях породы будет происходить увеличение пористости и, как следствие, выход газа на поверхность. В пункте 1 даны постановка задачи и краткий обзор литературы по близким к данной теме работам. В пункте 2 проводится преобразование исходной системы определяющих уравнений. В случае медленных течений, когда конвективным слагаемым можно пренебречь, возникает система, состоящая из параболического уравнения второго порядка для эффективного давления среды и уравнения первого порядка для пористости. В пункте 3 излагаются результаты и выводы численного исследования начально-краевой задачи.

Ключевые слова: фильтрация, пористость, углекислый газ, пласт, численное исследование.

DOI: 10.14258/izvasu(2021)4-12

Введение. В работе изучается система уравнений, описывающая фильтрацию жидкости или газа в пористой среде:

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}_f \rho_f) = 0, \quad (1)$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

The paper considers a two-dimensional mathematical model of filtration of a viscous incompressible liquid or gas in a porous medium. A unique feature of the model under consideration is the incorporation of poroelastic properties of the solid skeleton. From a mathematical point of view, the equations of mass conservation for liquid / gaseous and solid phases, Darcy's law, the rheological ratio for a porous medium, and the conservation law of the balance of forces are considered. The work is aimed at numerical study of the model initial-boundary value problem of carbon dioxide injection into the rock with minimum initial porosity. Also, it is necessary to find out the parameters at which the porosity will increase in the upper layers of the rock and, as a result, the gas will come to the surface. Section 1 contains a statement of the problem and a brief review of scientific papers related to this topic. In Section 2, the original system of constitutive equations is transformed. In the case of slow flows, when the convective term can be neglected, a system arises that consists of a second-order parabolic equation for the effective pressure of the medium and a first-order equation for porosity. Section 3 presents the results and conclusions of a numerical study of the initial-boundary value problem.

Key words: filtration, porosity, carbon dioxide, reservoir, numerical study.

$$\frac{\partial \rho_s (1 - \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi) \vec{v}_s \rho_s) = 0, \quad (2)$$

$$\phi (\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi) (\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e \right), \quad (4)$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g}. \quad (5)$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$ — соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, ϕ — пористость, p_f, p_s — соответственно давления жидкой и твердой фаз, $p_e = p_{tot} - p_f$ — эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi)p_s$ — общее давление, $\rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi)\rho_s$ — плотность двухфазной среды, $\vec{g} = (0, -g)$ — вектор силы тяжести; $k(\phi) = k\phi^n/\mu$ — коэффициент фильтрации, k — проницаемость пористой среды, μ — динамическая вязкость жидкости; $a_1(\phi) = \phi^m/\eta$ — коэффициент объемной вязкости, η — динамическая вязкость твердой фазы; $a_2(\phi) = \phi^b\beta_\phi$ — коэффициент объемной сжимаемости, β_ϕ — коэффициент сжимаемости пор; $m \in [0, 2], b = 1/2, n = 3$ — параметры среды. Плотности жидкой и твердой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, y, t) \in Q_T$.

Процессы фильтрации находят применение в таких областях, как дренаж или ирригация сельскохозяйственных полей, процессы нефтегазодобычи, прогноз подтоплений возле гидротехнических сооружений, распространение загрязнений в грунтовых водах, миграция магмы в земной коре, захоронение углекислого газа и т.п. [1–5].

Особенностью рассматриваемой в данной работе модели является переменный характер пористости. Близкие по структуре системы уравнений рассматривались в работах [6–14]. В работе [6] проведено численное моделирование движения углекислого газа с учетом капиллярных сил. В [7] представлена математическая модель для описания переноса наночастиц, переносимых закачиваемым CO_2 в пористую среду, а также разработан симулятор для моделирования переноса наночастиц в хранилищах углекислого газа. В [8] исследуется процесс замещения метана в газогидрате диоксидом углерода при закачке CO_2 в пористую среду. Построена модель, учитывающая как тепломассоперенос в пористой среде, так и диффузионную кинетику процесса замещения. В работе [9] выполнено численное решение неизо термической фильтрации вязкой несжимаемой жидкости. В [10] для системы уравнений одномерного нестационарного движения жидкости в теплопроводной вязкой пористой среде доказана разрешимость начально-краевой задачи. Работа [11] посвящена численному исследованию одномерной изотермической задачи фильтрации жидкости.

Постановка задачи. Система (1)–(5) сводится к следующим уравнениям для нахождения эффективного давления и пористости

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k(\phi)(\nabla p_e - \vec{g}(\rho_{tot} - \rho_f))) &= a_1(\phi)p_e + a_2(\phi)\frac{dp_e}{dt}, \\ \frac{1}{1 - \phi} \frac{d\phi}{dt} &= -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{dp_e}{dt}, \end{aligned}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v}_s \cdot \nabla$.

Предположим, что скорость течения твердой фазы пренебрежимо мала, тогда $d/dt \sim \partial/\partial t$ и последняя система примет вид

$$\nabla \cdot (k(\phi)(\nabla p_e - \rho\vec{g})) = a_1(\phi)p_e + a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{1 - \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (7)$$

здесь $\rho = (1 - \phi)\Delta\rho$, $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$.

Рассматривается область пористой среды глубиной H м и шириной L м, в которую снизу происходит закачка углекислого газа (CO_2) со скоростью $W(t)$. Область задачи представлена на рис. 1.

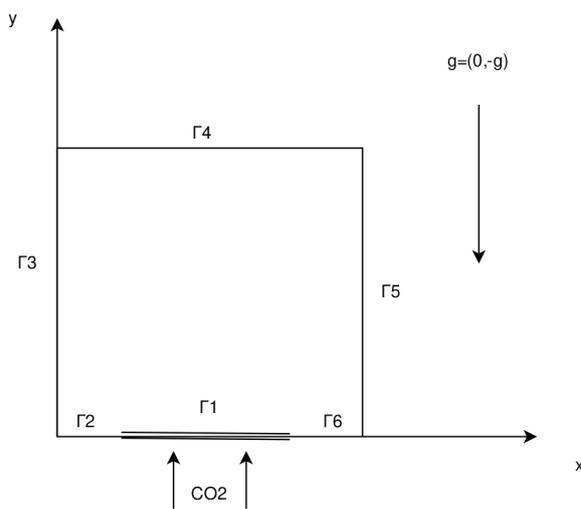


Рис. 1. Область задачи

Система (6)–(7) дополняется следующими краевыми и начальными условиями

$$\begin{cases} \vec{v}_s \cdot \vec{n} = 0, & \vec{v}_f \cdot \vec{n} = W(t) : \Gamma_1, \\ \vec{v}_s \cdot \vec{n} = 0, & \vec{v}_f \cdot \vec{n} = 0 : \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6, \\ p_e = p_{атм} + g\rho H : \Gamma_4, \\ p_e^0(x, y) = p_{атм} + g\rho H, & \phi(x, y, 0) = \phi^0(x, y), \end{cases}$$

где \vec{n} — вектор внешней единичной нормали на границе.

Используя закон Дарси (3), условия непротекания на $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6$ и притока CO_2 на Γ_1 примут следующий вид:

$$\begin{cases} (\nabla p_e - \rho\vec{g}) \cdot \vec{n} = 0 : \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6, \\ \frac{k(\phi)}{\phi} (\nabla p_e - \rho\vec{g}) \cdot \vec{n} = W(t) : \Gamma_1. \end{cases}$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$x' = x/L, \quad y' = y/H, \quad t' = t/T,$$

$$p'_e = p_e/P, \quad v'_i = v_i/V, \quad i = s, f,$$

следовательно, область изменения x', y', t' есть единичный отрезок $[0, 1]$, и система уравнений (6)–(7) с краевыми условиями примут следующий вид (штрихи опущены)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi^n \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi^n \left(\frac{\partial p_e}{\partial y} + (1 - \phi) \right) \right) = \lambda \phi^m p_e + \omega \phi^b \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{1 - \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\kappa \phi^m p_e - \sigma \phi^b \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{n-1} \frac{\partial p_e}{\partial y} + (1 - \phi) = W(t) : \Gamma_1, \\ \frac{\partial p_e}{\partial x} = 0 : \Gamma_3, \Gamma_5, \\ \frac{\partial p_e}{\partial y} + (1 - \phi) = 0 : \Gamma_2, \Gamma_6, \\ p_e = p_{\text{атм}}/P + (1 - \phi)(1 - y) : \Gamma_4, \\ p_e^0(x, y) = p_{\text{атм}}/P + (1 - \phi)(1 - y). \end{array} \right. \quad (10)$$

Масштабы давления и скорости принимаются равными $P = Hg\Delta\rho$, и $V = Pk/H\mu$ соответственно. $\varepsilon = L^2/H^2$, $\lambda = \mu L^2/k\eta$, $\omega = \beta_\phi \mu L^2/kT$, $\kappa = PT/\eta$, $\sigma = P\beta_\phi$ – безразмерные параметры.

Начально-краевая задача (8)–(10) решалась численно. Для численной реализации уравнения (8) использовалась схема переменных направлений [15], и для уравнения (9) метод Рунге–Кутты второго порядка точности [16].

Алгоритм счета следующий: используя начальные значения для эффективного давления и пористости ($\phi^0(x, y), p_e^0(x, y)$) из уравнения (8), находим значение эффективного давления на следующем временном слое ($p_e^1(x, y)$). Далее из (9) находим $\phi^1(x, y)$. Повторяем алгоритм для следующих шагов по времени. Расчет производился на последовательностях вложенных сеток, численные эксперименты показали незначительную разницу в полученных значениях искомых величин.

Результаты. В качестве твердой фазы рассматривается гранит с начальной пористостью $\phi^0(x) = 0.015$. Газ и пористая среда обладают следующими параметрами [1], [5, с. 563]: $\eta = 10^{18}$ Па · с, $\beta_\phi = 10^{-8}$ Па⁻¹, $k = 10^{-12}$ м², $L = 1000$ м, $\mu = 1463 \cdot 10^{-8}$ Па · с, $g = 9.8$ м/с², $\rho_s = 2.7 \cdot 10^3$

кг/м³ $\rho_f = 2$ кг/м³, $b = 1/2$, $n = 3$, $m = 1$. Функция, определяющая скорость закачки, имеет вид $W(t) = At(1 - t)$, A – константа.

Рассмотрим случай, когда нагнетание углекислого газа происходит на глубине 300 метров. Максимальная скорость нагнетания составляет 1.6 см/сек и длится 1 сутки. Размер скважины, из которой происходит закачка газа, равен 80 метров. Пористость среды спустя 6 часов и сутки от начала закачки представлена на рис. 2 – 3.

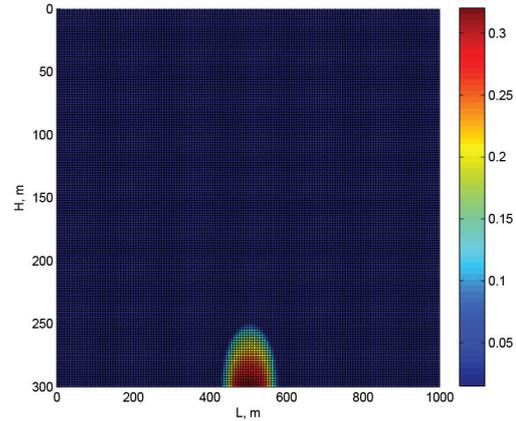


Рис. 2. Пористость среды спустя 6 часов от начала закачки CO_2

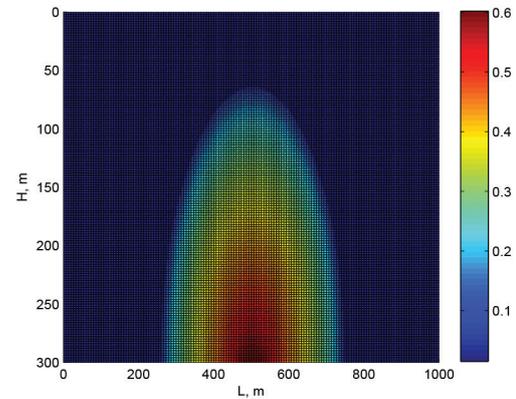


Рис. 3. Пористость среды спустя сутки от начала закачки CO_2

Можно наблюдать, что с накачкой углекислого газа увеличивается и пористость гранита. Связано это с тем, что в процессе закачки газа увеличивается и его давление, следовательно, пористость повышается.

На момент окончания закачки газа изменению пористости подверглась порода на глубине около 75 метров. Следует отметить, что после остановки закачки CO_2 пористость и в более верхних

слоях породы продолжает увеличиваться. Пористость в силу выхода углекислого газа на поверхность и уменьшения его давления в зоне закачки и во всей области начинает уменьшаться (рис. 4).

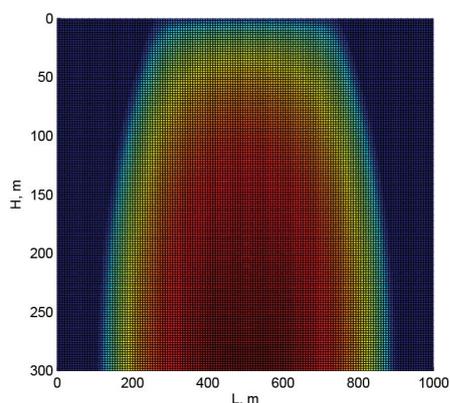


Рис. 4. Пористость среды спустя трое суток от начала закачки CO_2

Рассмотрим случай, когда закачка углекислого газа происходит с меньшей скоростью. Пористость среды спустя трое суток представлена на рис. 5. Максимальная скорость закачки составляет 0.4 см/сек. Здесь давление газа не так велико, как в рассматриваемом ранее случае, и за то же время газ не достигает поверхности.

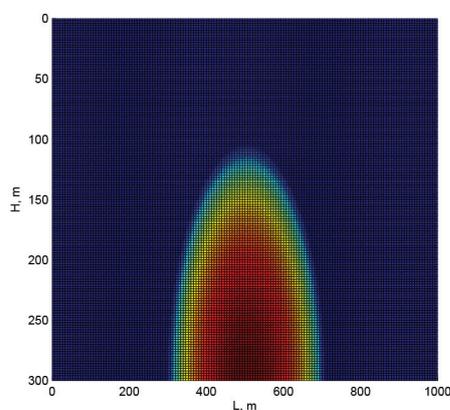


Рис. 5. Пористость среды спустя трое суток от начала закачки CO_2 , максимальная скорость закачки составляет 0.4 см/сек

Пусть нагнетание углекислого газа происходит на глубине 800 метров. Максимальная скорость нагнетания составляет 1.2 см/сек. Пористость среды на момент окончания закачки CO_2 (1 сутки) представлена на рис. 6. Пористость спустя неделю представлена на рис. 7.

Из рис. 6 можно наблюдать, что пористость среды в силу большого давления на момент времени 1 сутки составляет около 0.5. Далее, по мере

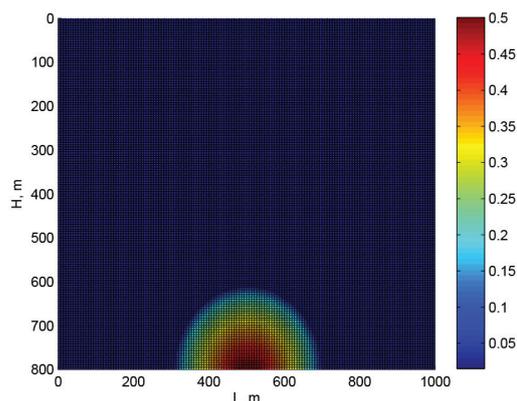


Рис. 6. Пористость среды спустя сутки от начала закачки углекислого газа с максимальной скоростью 1.2 см/сек

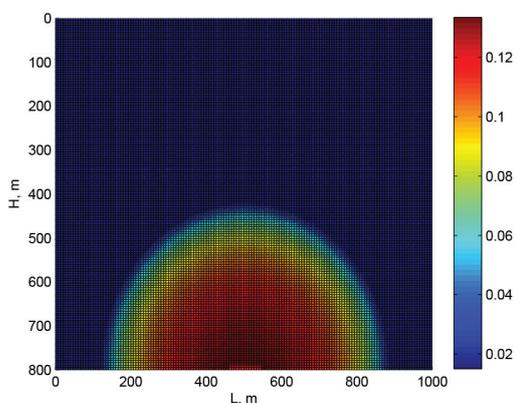


Рис. 7. Пористость среды спустя неделю

распространения газа в области, пористость начинает уменьшаться (рис. 7). Процесс распространения газа останавливается на седьмые сутки от начала закачки CO_2 . Выбранная глубина области в 800 метров и более является оптимальной для хранения углекислого газа.

Заключение. Проведено численное исследование задачи закачки углекислого газа в вязкоупругую горную породу. Численные расчеты производились для случаев с различными скоростями нагнетания газа, а также на различных глубинах расположения источника закачки. В ходе численных экспериментов определены оптимальная скорость закачки и глубина, при которой газ не достигнет поверхности.

Численный эксперимент выполнен на вычислительном кластере ЦКП «Сибирский суперкомпьютерный центр» (Вычислительный комплекс РСК «Торнадо»), согласно Плану мероприятий по реализации соглашения между ИГиЛ СО РАН и АлтГУ на 2020–2023 гг.

Библиографический список

1. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // *Geodinamica Acta*. 1998. Vol. 11. № 2-3. DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5.
2. Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York, 1972.
3. Morency S., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // *Journal of Geophysical Research*. 2007. Vol. 112, B10407. DOI: 10.1029/2006JB004701.
4. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред*. М., 1987. Ч. 1.
5. Fowler A. *Mathematical Geoscience* // Springer-Verlag London Limited. 2011. DOI: 10.1007/s11004-012-9399-0.
6. Negara A., El-Amin M. F., Sun S. Simulation of CO_2 plume in porous media: consideration of capillarity and buoyancy effects // *International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Series B*. 2011. Vol. 2. № 4. P. 315–337.
7. El-Amin M. F. et al. Modeling and simulation of nanoparticle transport in multiphase flows in porous media: CO_2 sequestration // *Mathematical Methods in Fluid Dynamics and Simulation of Giant Oil and Gas Reservoirs*. – Society of Petroleum Engineers, 2012. DOI: 10.2118/163089-MS.
8. Khasanov M. K., Rafikova G. R., Musakaev N. G. Mathematical model of carbon dioxide injection into a porous reservoir saturated with methane and its gas hydrate // *Energies*. 2020. Vol. 13. № 2. P. 440. DOI: 10.3390/en13020440.
9. Virts R.A., Papin A.A., Tokareva M.A. Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Т. 1666. № 1. DOI: 10.1088/1742-6596/1666/1/012041.
10. Papin A.A., Tokareva M.A., Virts R.A. Filtration of Liquid in a Non-isothermal Viscous Porous Medium // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2020. Vol. 13. № 6. DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773.
11. Вирц Р.А., Папин А.А., Вайгант В.А. Численное решение одномерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде // *Известия Алт. гос. ун-та*. 2018. № 4 (102). С. 62–67. DOI: 10.14258/izvasu(2018)4-11.
12. Сибин А.Н., Сибин Н.Н. Численное решение одномерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов // *Известия Алт. гос. ун-та*. 2017. № 1 (93). С. 123–126. DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-24.
13. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration poroelastic media // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. Vol. 722. № 1. DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012037.
14. Tokareva M.A., Papin A.A. Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2019. Т. 13. № 2. DOI: 10.1134/S1990478919020169.
15. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. М., 1977.
16. Калиткин Н.Н. *Численные методы*. М., 1978.