УДК 514.7

Пример преобразования Бианки поверхности Куэна

М.А. Чешкова, А.А. Павлова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Example of Bianchi Transformation of Kuen's Surface

M.A. Cheshkova, A.A. Pavlova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Работа посвящена изучению преобразования Бианки для поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера (поверхность Бельтрами). К поверхностям постоянной отрицательной гауссовой кривизны относятся также поверхность Куэна и поверхность Дини. Изучение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны (псевдосферических поверхностей) имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с теорией сетей, с теорией солитонов, с нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона. Уравнение sin-Гордона играет важную роль в современной физике. Преобразования Бианки позволяют по данной псевдосферической поверхности получить новые псевдосферические поверхности. Построено преобразование Бианки для поверхности Куэна. С использованием математического пакета строятся поверхность Куэна и его преобразование Бианки.

Ключевые слова: псевдосфера, преобразования Бианки, поверхность Куэна.

The work is devoted to the study of the Bianchi transformation for surfaces of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Minding top, the Minding coil, and the pseudosphere (Beltrami surface). Surfaces of constant negative Gaussian curvature also include Kuen's surface and the Dini's surface. Studying the surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospheri-cal surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. Geometric characteristics of pseudospherical surfaces are found to be related to the theory of networks, the theory of solitons, nonlinear differential equations, and sin-Gordon equations. The sin-Gordon equation plays an important role in modern phy-sics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudosphe-rical surface. The Bianchi transformation for the Kuen's surface is constructed using a mathematical software package.

Key words: pseudosphere, Bianchi transformation, Kuen's surface.

DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-22

Введение. Изучение псевдосферических поверхностей имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями sin-Гордона.

Уравнение sin-Гордона играет важную роль в современной физике [1, 2].

Преобразования Бианки позволяют по данной псевдосферической поверхности получить новые псевдосферические поверхности.

Теория преобразования Бианки в трехмерном пространстве E^3 и теория n - мерных многообразий в E^{2n-1} излагается в работе Ю.А. Аминова [3] и K. Tenenblat [4].

Преобразованию Бианки посвящены работы [5,6].

Данная работа посвящена изучению преобразования Бианки поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

В [7, 8, 9] описаны поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны.

Поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера.

К поверхностям постоянной отрицательной гауссовой кривизны относятся также поверхность Куэна и поверхность Дини.

Построено преобразование Бианки для поверхности Куэна.

С помощью системы компьютерной математики строятся исследуемые поверхности.

1. Преобразование Бианки. Классическая теорема Беклунда утверждает, что фокальные поверхности псевдосферической конгруэнции в E^3 имеют одинаковую постоянную отрицательную кривизну. В этом случае касательные плоскости к фокальным поверхностям пересекаются под постоянным углом θ и расстояние между фокальными точками постоянно.

Если угол θ прямой, то преобразование Беклунда называется преобразованием Бианки. В данной статье изучается преобразование Бианки для поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

Рассмотрим две гладкие поверхности M, $\bar{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$. Обозначим через n — орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид $T_{f(p)}\bar{M} = \{f(p), n, V\}$.

Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность $\bar{M}$ имеет ту же кривизну.

Обозначим через $r(u, v)$ — радиус-вектор поверхности M, а через $R(u, v)$ — радиус-вектор поверхности $\bar{M}$.

Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение $f : M \to \bar{M}$ [10], [11, с.489].

$$R(u, v) = r(u, v) - V,\ V = V^1 r_1 + V^2 r_2, \quad (1)$$

$r_1 = \partial_u r(u, v), r_2 = \partial_v r(u, v)$.

Из условия $< R_i, [n, V] >= 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n,$$

где n — орт нормали к поверхности M.

Так как $< V, V >= 1$, $< \partial_i V, V >= 0$, то

$$\omega(r_i) =< r_i, V >,\ \nabla_i V = r_i - \omega(r_i)V. \quad (2)$$

2. Поверхность Куэна. Поверхность Куэна [12, с. 345] зададим в виде

$$r(u, v) : x = \frac{2sin(v)}{u^2 sin(v)^2 + 1}(cos(u) + usin(u)), \quad (3)$$

$$y = \frac{2sin(v)}{u^2 sin(v)^2 + 1}(sin(u) - ucos(u)),$$

$$z = \frac{2cos(v)}{u^2 sin(v)^2 + 1} + ln(tg(\frac{v}{2})).$$

Построим эту поверхность для $v \in [\pi/18, \pi - \pi/18], u \in [2\pi, 5\pi]$ (рис. 1).

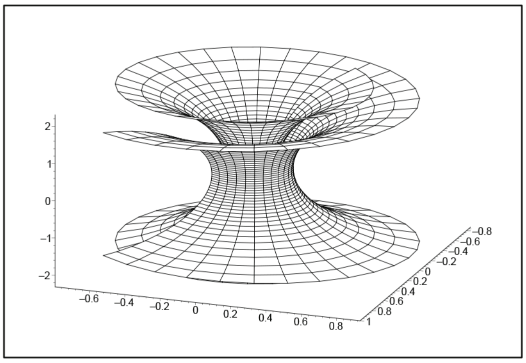

Рис. 1. Поверхность Куэна

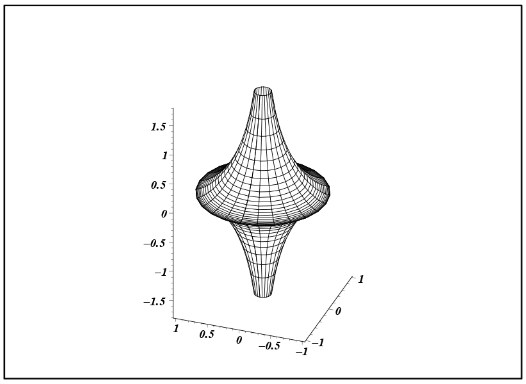

Рис. 2. Псевдосфера

Определим символы Кристоффеля $\Gamma^k_{ij} = g^{ks}\Gamma_{s,ij}$, $\Gamma_{s,ij} = 1/2(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij})$.

Имеем

$$g_{11} = (r_1, r_1) = \frac{4u^2 sin(v)^2}{(1 + u^2 sin(v)^2)^2},\ g_{12} = (r_1, r_2) = 0, \quad (4)$$

$$g_{22} = \frac{(1 - u^2 sin(v)^2)^2}{(1 + u^2 sin(v)^2)^2 sin(v)^2}.$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1 - u^2 sin(v)^2}{(1 + u^2 sin(v)^2)u}, \quad (5)$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{(1 - u^2 sin(v)^2)cos(v)}{(1 + u^2 sin(v)^2)sin(v)},$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{(1 - u^2 sin(v)^2)}{(1 + u^2 sin(v)^2)sin(v)^2},$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{4u^2 sin(v)^3 cos(v)}{u^4 sin(v)^4 - 1},$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{4usin(v)^2}{u^4 sin(v)^4 - 1},$$

$$\Gamma^2_{22} = -\frac{cos(v)(u^4 sin(v)^4 - 4u^2 sin(v)^2 - 1)}{(u^4 sin(v)^4 - 1)sin(v)}.$$

Формулы (2) примут вид

$$\nabla_1 V^1 = \partial_u V^1 + \Gamma^1_{1s} V^s = 1 - g_{11}(V^1)^2, \quad (6)$$
$$\nabla_1 V^2 = \partial_u V^2 + \Gamma^2_{1s} V^s = -g_{11} V^1 V^2,$$
$$\nabla_2 V^1 = \partial_v V^1 + \Gamma^1_{2s} V^s = -g_{22} V^1 V^2,$$
$$\nabla_2 V^2 = \partial_v V^2 + \Gamma^2_{2s} V^s = 1 - g_{22}(V^2)^2.$$

Добавим еще условие

$$< V, V >= g_{11}(V^1)^2 + g_{22}(V^2)^2 = 1. \quad (7)$$

Убеждаемся, что

$$V^1 = -\frac{1 + u^2 sin(v)^2}{2u}, \quad (8)$$
$$V^2 = \frac{(1 + u^2 sin(v)^2) sin(v) cos(v)}{1 - u^2 sin(v)^2}$$

удовлетворяют системе (6) и (7).

Уравнение (1) поверхности $\bar{M}$ запишется в виде

$$R(u, v) = (sin(v)cos(u), sin(v)sin(u), \quad (9)$$
$$cos(v) + ln(tg(v/2)).$$

Уравнение (9) есть уравнение псевдосферы (рис. 2). Таким образом, имеет место следующее

Утверждение. *Для поверхности Куэна существует преобразование Бианки, переводящее поверхность Куэна в псевдосферу.*

Заключение. Основным результатом работы является разработка алгоритма построение поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны из поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны с помощью преобразования Бианки.

Библиографический список

1. Popov A.G. Psevdospherical surfaces and some problems of matemacal physics // Fundamentalnaya i prikladnaya mathematiks. 2005. Vol. 11. № 1.

2. Поздняк Э.Г., Попов А.Г. Геометрия Лобачевского и уравнения математической физики // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 4.

3. Аминов Ю.А. Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского // Украинский геометрический сборник. 1978. Т. 21.

4. Tenenblat K. Transformations of manifolds and applications to differential equations. Psevdospherical surfaces and some problems of matemacal physics. London, 1998.

5. Горькавый В.А. Невмержицкая Е.Н. Аналог преобразования Бианки для двумерных поверхностей в пространстве S^3XR^1 // Матем. заметки. 2011. Т. 89. № 6.

6. Масальцев Л.А. Бикасательное преобразование Бианки подмногообразия постоянной отрицательной кривизны H^n евклидова пространства R^{2n} // Изв. вузов. Матем. 2005. Т. 7.

7. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М., 1947. Т. II.

8. Норден А.П. Об основаниях геометрии. М., 1956.

9. Чешкова М.А. Геодезические поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2018. Т. 18. № 3.

10. Чешкова М.А. Преобразование Бианки n - поверхностей в E^{2n-1} // Изв. вузов. Матем. 1997. Т. 9.

11. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.

12. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. М., 2006.