УДК 514.112.3

О некоторых замечательных точках и отрезках в треугольнике

Ю.Н. Мальцев[1], *А.С. Монастырева*[2]

[1]Алтайский государственный педагогический университет (Барнаул, Россия)

[2]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On Some Remarkable Points and Line Segments in Triangles

Yu.N. Maltsev[1], *A.S. Monastyreva*[2]

[1]Altai State Pedagogical University (Barnaul, Russia)
[2]Altai State University (Barnaul, Russia)

Пусть r_a, r_b, r_c — радиусы, а O_A, O_B, O_C — центры окружностей, касающихся в вершинах треугольника описанной окружности и противоположной стороны этого треугольника. В работе [Andrica D., Marinescu D.S. New interpolation inequalities to Euler's R≥2 // Forum Geometricorum. 2017. Vol. 17] доказано, что $\frac{4}{R} \le \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \le \frac{2}{r}$. В статье [Isaev I., Maltsev Yu., Monastyreva A. On some relations in geometry of a triangle // Journal of Classical Geometry. 2018. Vol. 4] данные неравенства обобщены следующим образом: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{R} + \frac{1}{r}$. В настоящей работе мы вычислили площадь треугольника $O_AO_BO_C$ (см. Теорему 1). Кроме того, доказали ряд соотношений для чисел R-r_a, R-r_b, R-r_c, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Вычислили величины $\frac{1}{R-r_a} + \frac{1}{R-r_b} + \frac{1}{R-r_c}$ и $\frac{a}{R-r_a} + \frac{b}{R-r_b} + \frac{c}{R-r_c}$ через параметры p, R и r (см. Теорему 2). Дали оценку этим выражениям (см. Теорему 3). Наконец, используя результаты работы [Maltsev Yu., Monastyreva A. On some relations for a triangle // International Journal of Geometry. 2019. Vol. 8 (1)], нашли выражение величины $(1\text{-}cos(\alpha\beta))(1\text{-}cos(\beta\text{-}\gamma))(1\text{-}cos(\alpha\text{-}\gamma))$ через параметры p, R, r, что позволило нам дать новое доказательство *фундаментального неравенства треугольника* (см. Следствие 2).

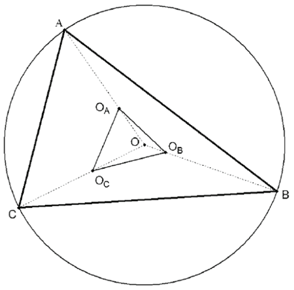
Ключевые слова: треугольник, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности, полупериметр, замечательная точка.

DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-18

Let r_a, r_b, r_c be the radii, and O_A, O_B, O_C the centers of tangent circles at the vertices to the circumcircle of a triangle *ABC* and to the opposite sides. In the paper [Andrica D., Marinescu D.S. New interpolation inequalities to Euler's R≥2 // Forum Geometricorum. 2017. Vol. 17], the authors proved that $\frac{4}{R} \le \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \le \frac{2}{r}$. In the paper [Isaev I., Maltsev Yu., Monastyreva A. On some relations in geometry of a triangle // Journal of Classical Geometry. 2018. Vol. 4], it is given the following generalization of these inequalities: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{R} + \frac{1}{r}$. In that paper, we find the area of the triangle $O_AO_BO_C$ (see Theorem 1). We prove some relations for the numbers R-r_a, R-r_b, R-r_c, where R is the circumradius of a triangle *ABC*. Namely, we find the expressions $\frac{1}{R-r_a} + \frac{1}{R-r_b} + \frac{1}{R-r_c}$ and $\frac{a}{R-r_a} + \frac{b}{R-r_b} + \frac{c}{R-r_c}$ by means by the parameters p, R and r (see Theorem 2). We estimate these values (see Theorem 3). Finally, using the results of paper [Maltsev Yu., Monastyreva A. On some relations for a triangle // International Journal of Geometry. 2019. Vol. 8 (1)] and representing the expression of $(1\text{-}cos(\alpha\beta))(1\text{-}cos(\beta\text{-}\gamma))(1\text{-}cos(\alpha\text{-}\gamma))$ by means of p, R, r, we prove new proof of *the fundamental triangle inequality* (see Corollary 2).

Key words: triangle, circumradius, inradius, semiperimeter, remarkable point.

Введение. Пусть R, r, p — радиусы описанной и вписанной окружностей, а также полупериметр треугольника ABC, O_A — центр окружности, касающейся в вершине A окружности, описанной около треугольника ABC, и стороны BC. Обозначим через $r_a = AO_A$ радиус этой



Вписанный треугольник ABC

окружности, $AB = c, AC = b, BC = a, \angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma, p = \dfrac{a+b+c}{2}$, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (см. рис.). Аналогично можно определить r_b, r_c, O_B, O_C. Пусть также $S(\triangle ABC)$ — площадь треугольника ABC. В работе [1] доказано, что

$$\frac{4}{R} \le \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \le \frac{2}{r}. \tag{1}$$

В статье [2] неравенства (1) обобщены следующим образом:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{R} + \frac{1}{r}. \tag{2}$$

В статье [2] найдены также некоторые интересные соотношения и неравенства для чисел r_a, r_b, r_c. В работе [3] доказано, что числа r_a, r_b, r_c являются корнями уравнения третьей степени

$$x^3 - R \cdot \frac{p^4 + p^2(20Rr + 18r^2) + (4R+r)r^3}{(p^2 + r(2R+r))^2} \cdot x^2 + \\ + \frac{(R+2r)16p^2rR^2}{(p^2 + r(2R+r))^2} \cdot x - \frac{16p^2r^2R^3}{(p^2 + r(2R+r))^2} = 0.$$

Из этого результата следует, что существует треугольник ABC, для которого не существует невырожденного треугольника с длинами сторон, равными r_a, r_b, r_c.

В настоящей работе рассматривается треугольник $O_AO_BO_C$ (его вершины O_A, O_B, O_C мы считаем замечательными точками треугольника ABC), вычислена его площадь (через параметры R, r, p), а также найдены некоторые соотношения для чисел $OO_A = R - r_a$, $OO_B = R - r_b$, $OO_C = R - r_c$. В заключение работы доказано, что $(1 - \cos(\alpha - \beta))(1 - \cos(\alpha - \gamma))(1 - \cos(\beta - \gamma)) = = \dfrac{4R(R-2r)^3 - (p^2 - (2R^2 + 10Rr - r^2))^2}{8R^4}$. Из этого соотношения следует новое доказательство *фундаментального неравенства треугольника* (см. [4–6]).

1. Некоторые вспомогательные результаты. В работе [1] доказано, что

$$r_a = \frac{pr}{a\cos^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Следовательно,

$$OO_A = R - r_a = R - \frac{pr}{a\cos^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = \\ = R - \frac{abc}{4R \cdot \dfrac{a(1+\cos(\beta-\gamma))}{2}} = \\ = R - \frac{bc}{2R(1+\cos(\beta-\gamma))} = \\ = R - \frac{4R^2\sin\beta\sin\gamma}{2R(1+\cos(\beta-\gamma))} = \\ = R\left(1 - \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{(1+\cos(\beta-\gamma))}\right) = \\ = R \cdot \frac{1-\cos\alpha}{(1+\cos(\beta-\gamma))}.$$

Тем самым доказана

Лемма 1. *Для любого треугольника ABC справедливо равенство*

$$R - r_a = R \cdot \frac{(1-\cos\alpha)}{(1+\cos(\beta-\gamma))}.$$

Справедливы также следующие утверждения.

Лемма 2 (см. [3]). *Для любого треугольника ABC справедливы равенства:*

1. $\cos(\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\gamma) + \cos(\beta-\alpha) = = \dfrac{p^2 + r^2 + 2Rr - 2R^2}{2R^2}$;
2. $\cos(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\gamma) + \cos(\beta-\gamma)\cos(\beta-\alpha) + + \cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\alpha) = = \dfrac{p^2(R+6r) - 4R^3 - 16R^2r - 11Rr^2 - 2r^3}{4R^3}$;
3. $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\gamma) = = \left(p^4 - p^2(6R^2 + 8Rr - 2r^2) + 8R^4 + +24R^3r + 22R^2r^2 + 8Rr^3 + r^4\right)/8R^4$.

Лемма 3 (см. [4]). *Для любого треугольника ABC справедливы равенства:*

1. $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = \dfrac{pr}{2R^2}$;
2. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \dfrac{2pr}{R^2}$;
3. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \dfrac{r+R}{R}$;
4. $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \dfrac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$;
5. $\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma = = \dfrac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}$.

Лемма 4. *Для любого треугольника ABC справедливо равенство*

$$(1+\cos(\beta-\gamma))(1+\cos(\alpha-\gamma))(1+\cos(\alpha-\beta)) = \\ = \frac{(p^2+r(2R+r))^2}{8R^4}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем, что

$$(1+\cos(\beta-\gamma))(1+\cos(\alpha-\gamma))(1+\cos(\alpha-\beta)) = \\ = 1+(\cos(\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\alpha))+ \\ +(\cos(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\cos(\beta-\alpha)+ \\ +\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\alpha))+ \\ +\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\gamma) = \\ 1+\frac{p^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}+ \\ +\frac{p^2(R+6r)-4R^3-16R^2r-11Rr^2-2r^3}{4R^3}+ \\ +\left(p^4-p^2(6R^2+8Rr-2r^2)+8R^4+\right. \\ \left.+24R^3r+22R^2r^2+8Rr^3+r^4\right)/8R^4 = \\ = \frac{(p^2+r(2R+r))^2}{8R^4}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Для любого треугольника ABC справедливо равенство*

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)\cos\gamma+(1-\cos\alpha)(1-\cos\gamma)\cos\beta+ \\ +(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)\cos\alpha = \frac{p^2-8Rr-5r^2}{4R^2}.$$

Доказательство. Левая часть доказываемого равенства равна

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma- \\ -2(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma) = \\ = \frac{R+r}{R}+3\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}-2\cdot\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2} = \\ = \frac{p^2-8Rr-5r^2}{4R^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любого треугольника ABC справедливо равенство*

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) = \frac{r^2}{2R^2}.$$

Доказательство. Левая часть доказываемого равенства равна

$$1-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+ \\ +(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma)- \\ -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = A.$$

По лемме 3 имеем, что

$$A = 1-\frac{R+r}{R}+\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}- \\ -\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2} = \frac{r^2}{2R^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7 (см. [4]). *Для любого треугольника ABC справедливы равенства:*

1. $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}$;
2. $\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2}$;
3. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{p}{r}$;
4. $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma} = \frac{p^2+r^2+4Rr}{2pr}$;
5. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma = \frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr}$;
6. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = \frac{p}{R}$.

Далее справедлива следующая лемма.

Лемма 8. *Для любого треугольника ABC справедливы равенства:*

1. $\frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\beta}+\frac{1}{1-\cos\gamma} = \frac{p^2+r^2-8Rr}{2r^2}$;
2. $\frac{a}{R-r_a} = 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{1-\cos\alpha}$.

Доказательство. По лемме 7 имеем, что

$$\frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\beta}+\frac{1}{1-\cos\gamma} = \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}\right) = \\ = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}} = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2+r^2-8Rr}{16R^2\cdot\frac{r^2}{16R^2}} = \frac{p^2+r^2-8Rr}{2r^2}.$$

Далее по лемме 1 получаем, что

$$\frac{a}{R-r_a} = \frac{2R\sin\alpha}{R(1-\cos\alpha)}(1+\cos(\beta-\gamma)) = \\ = \frac{2\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}{1-\cos\alpha} = \\ = 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{2\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)}{1-\cos\alpha} = \\ = 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{1-\cos\alpha}.$$

Лемма доказана.

2. Основные результаты. Теперь приступим к доказательству основных результатов настоящей работы. Справедлива следующая

Теорема 1. *Для треугольника ABC справедлива формула:*

$$S(\triangle O_AO_BO_C) = S \cdot \frac{2R^2(p^2-8Rr-3r^2)}{(p^2+r(2R+r))^2},$$

где $S = S(\triangle ABC)$ — площадь треугольника ABC.

Доказательство. Справедливо равенство:

$$S(\triangle O_AO_BO_C) = S(\triangle OO_AO_B) + S(\triangle OO_AO_C) \pm$$
$$\pm\, S(\triangle OO_BO_C) = \frac{(R-r_a)(R-r_b)}{2}\sin 2\gamma +$$
$$+\frac{(R-r_a)(R-r_c)}{2}\sin 2\beta + \frac{(R-r_b)(R-r_c)}{2}\sin 2\alpha$$

в зависимости от того, будут ли все углы треугольника ABC меньше $\frac{\pi}{2}$ или, например, $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$. По лемме 1 имеем, что

$$S(\triangle OO_AO_B) =$$
$$= R^2 \cdot \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos(\beta-\gamma))(1+\cos(\alpha-\gamma))} \cdot \frac{\sin 2\gamma}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot$$
$$\cdot \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1+\cos(\alpha-\beta))\sin 2\gamma}{(1+\cos(\beta-\gamma))(1+\cos(\alpha-\gamma))(1+\cos(\alpha-\beta)}.$$

Обозначим $B = (1+\cos(\beta-\gamma))(1+\cos(\alpha-\gamma)) \cdot$ $\cdot (1+\cos(\alpha-\beta)$. Заметим, что $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta), \sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$. Следовательно,

$$S(\triangle OO_AO_B) = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{1}{B} \cdot (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) \cdot$$
$$\cdot (1-\cos\gamma+\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)) \cdot \sin 2\gamma =$$
$$= \frac{R^2}{2B}(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \cdot \sin 2\gamma +$$
$$+\frac{2R^2}{B}(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) \cdot \cos\gamma(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta).$$

Таким образом, получаем

$$S(\triangle O_AO_BO_C) =$$
$$= \frac{R^2}{2B}(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \cdot$$
$$\cdot (\sin 2\gamma + \sin 2\beta + \sin 2\alpha) +$$
$$+\frac{2R^2}{B}(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) \cdot ((1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)\cos\gamma +$$
$$+ (1-\cos\alpha)(1-\cos\gamma)\cos\beta +$$
$$+ (1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)\cos\alpha).$$

По леммам 3–6 имеем, что

$$S(\triangle O_AO_BO_C) =$$
$$= \frac{2prR^2(p^2-8Rr-3r^2)}{(p^2+r(2R+r))^2} =$$
$$= S \cdot \frac{2R^2(p^2-8Rr-3r^2)}{(p^2+r(2R+r))^2}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть треугольник ABC является прямоугольным. Тогда*

$$S(\triangle O_AO_BO_C) = S \cdot \frac{t^2(2t^2-2t-1)}{(2t^2+3t+1)^2},$$

где $t = \frac{R}{r} \geq \sqrt{2}+1$ и $S = S(\triangle ABC)$ — площадь треугольника ABC.

Доказательство. Известно, что для прямоугольного треугольника $p = 2R + r$ (см. [4]), причем числа не являются произвольными, а удовлетворяют неравенству $R \geq (\sqrt{2}+1)r$. Действительно, подставив $p = 2R + r$ в фундаментальное неравенство треугольника

$$(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 \leq 4R(R-2r)^3,$$

приходим к известному неравенству $R \geq (\sqrt{2}+1)r$. Поэтому

$$S(\triangle O_AO_BO_C) =$$
$$= S \cdot \frac{2R^2((2R+r)^2-8Rr-3r^2)}{(4R^2+4Rr+r^2+r(2R+r))^2} =$$
$$= S \cdot \frac{R^2(2R^2-2Rr-r^2)}{(2R^2+3Rr+r^2)^2} =$$
$$= S \cdot \frac{t^2(2t^2-2t-1)}{(2t^2+3t+1)^2},$$

где $t = \frac{R}{r} \geq \sqrt{2}+1$. Следствие доказано.

В частности, $S(\triangle O_AO_BO_C) < \frac{S}{2}$ для прямоугольных треугольников.

В работе [2] доказаны некоторые соотношения и неравенства для чисел r_a, r_b, r_c. Докажем аналогичные соотношения и неравенства для чисел $R - r_a, R - r_b, R - r_c$. Именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого треугольника справедливы равенства:*

1. $$\frac{1}{R-r_a} + \frac{1}{R-r_b} + \frac{1}{R-r_c} = \frac{(p^2-(6Rr-r^2))^2 - 24R^2r^2 + 16Rr^3}{4R^3r^2};$$
2. $$\frac{a}{R-r_a} + \frac{b}{R-r_b} + \frac{c}{R-r_c} = \frac{p}{R^2r} \cdot (p^2 - 6Rr + r^2).$$

Доказательство. Преобразуем левую часть первого равенства из условия теоремы, используя значения $r_a+r_b+r_c, r_ar_b+r_ar_c+r_br_c, r_ar_br_c$ через R, p, r (см. [3]). Имеем, что

$$\frac{1}{R-r_a} + \frac{1}{R-r_b} + \frac{1}{R-r_c} =$$

$$= (3R^2 - 2R(r_a + r_b + r_c) + (r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c))/$$
$$(R^3 - R^2(r_a + r_b + r_c) + R(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c) - r_a r_b r_c) =$$
$$= \left(3R^2 - 2R \cdot \frac{p^4 + p^2(20Rr + 18r^2) + r^3(4R + r)}{(p^2 + r(2R + r))^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(R + 2r)16p^2R^2r}{(p^2 + r(2R + r))^2}\right) :$$
$$: \left(R^3 - R^2 \cdot \frac{p^4 + p^2(20Rr + 18r^2) + r^3(4R + r)}{(p^2 + r(2R + r))^2} + \right.$$
$$\left. + R \cdot \frac{(R + 2r)16p^2R^2r}{(p^2 + r(2R + r))^2} - \frac{16p^2R^3r^2}{(p^2 + r(2R + r))^2}\right) =$$
$$= \frac{\left(p^2 - 6Rr + r^2\right)^2 - 24R^2r^2 + 16Rr^3}{4R^3r^2}.$$

Докажем теперь второе равенство. Используя леммы 3, 7 и 8, получаем, что

$$\frac{a}{R - r_a} + \frac{b}{R - r_b} + \frac{c}{R - r_c} =$$
$$= 2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right) +$$
$$+ (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{1}{1 - \cos\alpha} + \frac{1}{1 - \cos\beta} + \frac{1}{1 - \cos\gamma}\right) -$$
$$- \left(\frac{\sin 2\alpha(1 + \cos\alpha)}{1 - \cos^2\alpha} + \frac{\sin 2\beta(1 + \cos\beta)}{1 - \cos^2\beta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 2\gamma(1 + \cos\gamma)}{1 - \cos^2\gamma}\right) =$$
$$= 2\frac{p}{r} + \frac{2pr}{R^2} \cdot \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{2r^2} -$$
$$- 2\left((\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) + \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right)$$
$$\left. - (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\right) =$$
$$= \frac{p}{r}\left(\frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{R^2} + \frac{2r}{R}\right) = \frac{p}{R^2r} \cdot (p^2 - 6Rr + r^2).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любого треугольника справедливы неравенства:*

1. $(R - 2r) \cdot \dfrac{7R - 2r}{R^3} \le$
   $\le \left(\dfrac{1}{R - r_a} + \dfrac{1}{R - r_b} + \dfrac{1}{R - r_c}\right) - \dfrac{12}{R} \le$
   $\le (R - 2r) \cdot \dfrac{4R^3 + 4R^2r - Rr^2 - 2r^3}{R^3r^2}$;
2. $\dfrac{a}{R - r_a} + \dfrac{b}{R - r_b} + \dfrac{c}{R - r_c} \le$
   $\le 12\sqrt{3} + \dfrac{3\sqrt{3}(R - 2r)(2R - r)}{Rr}$.

Доказательство. В [4] доказано, что

$$16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Из теоремы 2 следует, что

$$\frac{1}{R - r_a} + \frac{1}{R - r_b} + \frac{1}{R - r_c} =$$
$$= \frac{(p^2 - (6Rr - r^2))^2 - 24R^2r^2 + 16Rr^3}{4R^3r^2} \ge$$
$$\ge \frac{(16Rr - 5r^2 - 6Rr + r^2)^2 - 24R^2r^2 + 16Rr^3}{2R^3r^2} =$$
$$= \frac{19R^2 - 16Rr + 4r^2}{R^3}$$

и, кроме того, $\dfrac{1}{R - r_a} + \dfrac{1}{R - r_b} + \dfrac{1}{R - r_c} - \dfrac{12}{R} \ge$

$$\ge \frac{7R^2 - 16Rr + 4r^2}{R^3} = \frac{(R - 2r)(7R - 2r)}{R^3}.$$

Далее, $\dfrac{1}{R - r_a} + \dfrac{1}{R - r_b} + \dfrac{1}{R - r_c} \le$

$$\le \frac{(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 6Rr + r^2)^2 - 24R^2r^2 + 16Rr^3}{4R^3r^2} =$$
$$= \frac{4R^4 + 3R^2r^2 - 4R^3r + 4r^4}{R^3r^2}$$

и $\left(\dfrac{1}{R - r_a} + \dfrac{1}{R - r_b} + \dfrac{1}{R - r_c}\right) - \dfrac{12}{R} \le$

$$\le \frac{4R^4 + 3R^2r^2 - 4R^3r + 4r^4}{R^3r^2} - \frac{12}{R} =$$
$$= \frac{(R - 2r)(4R^3 + 4R^2r - Rr^2 - 2r^3)}{R^3r^2}.$$

Докажем теперь второе неравенство. Имеем, что

$$\frac{a}{R - r_a} + \frac{b}{R - r_b} + \frac{c}{R - r_c} - 12\sqrt{3} =$$
$$= \frac{p(p^2 - 6Rr + r^2)}{R^2r} - 12\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{R - r_a} + \frac{1}{R - r_b} + \frac{1}{R - r_c}\right) - \frac{12}{R} \le$$
$$\le \frac{3\sqrt{3}(R - 2r)(2R - r)}{Rr}.$$

Теорема доказана.

В лемме 4 найдено выражение величины

$$(1 + \cos(\beta - \gamma))(1 + \cos(\alpha - \gamma))(1 + \cos(\alpha - \beta))$$

через R, p, r. Интересно найти аналогичное выражение для произведения

$$(1 - \cos(\beta - \gamma))(1 - \cos(\alpha - \gamma))(1 - \cos(\alpha - \beta)).$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Для любого треугольника справедливо равенство*

$$(1 - \cos(\beta - \gamma))(1 - \cos(\alpha - \gamma))(1 - \cos(\alpha - \beta)) =$$
$$= \frac{4R(R - 2r)^3 - (p^2 - (2R^2 + 10Rr - r^2))^2}{8R^4}. \quad (3)$$

Доказательство. По лемме 2 имеем, что

$$\begin{gathered}(1-\cos(\beta-\gamma))(1-\cos(\alpha-\gamma))(1-\cos(\alpha-\beta)) = \\ = 1-(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma))+ \\ +(\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)+ \\ +\cos(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\gamma))- \\ -\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\gamma) = \\ = 1-\frac{p^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}+ \\ +\frac{p^2(R+6r)-4R^3-16R^2r-11Rr^2-2r^3}{4R^3}- \\ -\left(p^4-p^2(6R^2+8Rr-2r^2)+8R^4+24R^3r+\right. \\ \left.(+22R^2r^2+8Rr^3+r^4\right)/(8R^4) = \\ = \frac{4R(R-2r)^3-(p^2-(2R^2+10Rr-r^2))^2}{8R^4}.\end{gathered}$$

Теорема доказана.

Из теоремы 4 мы получаем новое доказательство так называемого *фундаментального неравенства треугольника.*

Следствие 2 (*фундаментальное неравенство треугольника* [4]). *Для любого треугольника справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\le p^2\le \\ \le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}. \quad (4)\end{gathered}$$

Доказательство. Действительно, левая часть равенства (3) неотрицательна. Поэтому правая часть тоже неотрицательна, то есть

$$\begin{gathered}4R(R-2r)^3-(p^2-(2R^2+10Rr-r^2))^2 = \\ = \left(2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}+2R^2+10Rr-r^2-p^2\right)\cdot \\ \cdot\left(p^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}-\right. \\ \left.-(2R^2+10Rr-r^2)\right)\ge 0.\end{gathered}$$

Следовательно, оба множителя в этом произведении имеют одинаковый знак или один из них равен нулю. Если они оба неположительные, то

$$\begin{gathered}2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}+2R^2+10Rr-r^2\le p^2\le \\ \le 2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}.\end{gathered}$$

Это означает, что $R-2r=0$ и исходный треугольник является правильным [4]. В этом случае неравенство (4) очевидно. Если оба множители положительны, то

$$\begin{gathered}2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}<p^2< \\ < 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}.\end{gathered}$$

Следствие доказано.

Заметим, что равенство в одном из неравенств (4) возникает в случае, если исходный треугольник является равнобедренным. В работе [5] доказано, что

$$\begin{gathered}2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\cos\varphi\sqrt{R^2-2Rr}\le p^2\le \\ \le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\cos\varphi,\end{gathered}$$

где $\varphi = min\,\{|\alpha-\beta|,|\alpha-\gamma|,|\beta-\gamma|\}$, а в работе [6] доказано, что $cos\,(\angle ION)=\dfrac{(2R^2+10Rr-r^2)-p^2}{2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}}$, где исходный треугольник ABC не является правильным, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, а N — точка Нагеля треугольника ABC. Другие доказательства *фундаментального неравенства треугольника* можно посмотреть в [7–10].

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи статьи и полезные замечания.

Библиографический список

1. Andrica D., Marinescu D.S. New interpolation inequalities to Euler's $R \ge 2r$ // Forum Geometricorum. 2017. Vol. 17.

2. Isaev I., Maltsev Yu., Monastyreva A. On some relations in geometry of a triangle // Journal of Classical Geometry. 2018. Vol. 4.

3. Maltsev Yu., Monastyreva A. On some relations for a triangle // International Journal of Geometry. 2019. Vol. 8(1).

4. Soltan V., Maidman S. Identities and inequalities in a triangle. Kishinev, 1982 (in Russian).

5. Wu S. A sharpened version of the fundamental triangle inequality // Mathematical Inequalities and Applications. 2008. Vol. 11(3).

6. Andrica D., Barbu C., Piscoran L. The geometric proof to a sharp version of Blundon's inequalities // Journal of Mathematical Inequalities. 2017. Vol. 17(4).

7. Bottema O., Djordjevic R., Janic R., Mitrinovic D., Vasic P. Geometric Inequalities. Groningan, 1969.

8. Mitrinovic D. Recent Advances in Geometric Inequalities. Netherlands, Dordrecht, 1989.

9. Blundon W. On cirtain polynomial associated with a triangle // Math. Mag. 1963. Vol. 36.

10. Blundon W. Inequalities associated with a triangle // Canadian Math.Bull. 1965. Vol. 8.