УДК 515.165.7

Собственные значения оператора Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с четырехмерной подгруппой изотропии

Д.В. Вылегжанин[1], *П.Н. Клепиков*[2], *О.П. Хромова*[2]

[1]Белорусский государственный университет (Минск, Белоруссия)

[2]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Eigenvalues of the Ricci Operator on Four-Dimensional Locally Homogeneous (Pseudo)Riemannian Manifolds with a Four-Dimensional Isotropy Subgroup

D.V. Vylegzhanin[1], *P.N. Klepikov*[2], *O.P. Khromova*[2]

[1]Belarusian State University (Minsk, Belarus)
[2]Altai State University (Barnaul, Russia)

Вопрос о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по заданному оператору Риччи изучался в работах многих математиков. Данная задача была решена О. Ковальским и С. Никшевич для случая трехмерных локально однородных римановых многообразий. В случае трехмерных локально однородных лоренцевых многообразий известна работа Дж. Кальварусо и О. Ковальского, в которой найден ответ на выше поставленный вопрос.

В четырехмерном случае подобные исследования проводились лишь в случае групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В работах А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова определены возможные сигнатуры собственных значений оператора Риччи, однако вопрос о восстановлении четырехмерной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой по заданному оператору Риччи остается открытым.

Данная работа посвящена изучению собственных значений оператора Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с четырехмерной подгруппой изотропии. Приведен алгоритм вычисления собственных значений оператора Риччи. Доказана теорема о восстановлении таких многообразий по заданному оператору Риччи. Установлено, что это возможно лишь в случае, когда предписанный оператор диагонализируем и имеет единственное собственное значение кратности четыре.

Ключевые слова: локально однородные (псевдо)римановы многообразия, оператор Риччи, алгебры Ли.

The problem of restoring a (pseudo)Riemannian manifold from a given Ricci operator was studied in the papers of many mathematicians. This problem was solved by O. Kowalski and S. Nikcevic for the case of three-dimensional locally homogeneous Riemannian manifolds. The work of G. Calvaruso and O. Kowalski contains the answer to the question above for the case of three -dimensional locally homogeneous Lorentzian manifolds.

For the four-dimensional case, similar studies were carried out only in the case of Lie groups with a left-invariant Riemannian metric. The works of A.G. Kremlyov and Yu.G. Nikonorov presented the possible signatures of the eigenvalues of the Ricci operator. However, the question of recovering a four-dimensional Lie group with a left-invariant Riemannian metric from a given Ricci operator remains open.

This paper is devoted to the study of the eigenvalues of the Ricci operator on four-dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with a four-dimensional isotropy subgroup. An algorithm for calculating the eigenvalues of the Ricci operator is presented. A theorem on the restoration of such manifolds from a given Ricci operator is proved. It is established that such possibility can happen only in the case when the prescribed operator is diagonalizable and has a unique eigenvalue of multiplicity four.

Key words: locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds, Ricci operator, Lie algebras.

DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-15

Введение. Задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия является одной из важных проблем римановой геометрии. Связь между кривизной Риччи, одномерной кривизной и топологией однородного риманова пространства изучалась в работах

Дж. Милнора [1], В.Н. Берестовского [2], Ю.Г. Никонорова, Е.Д. Родионова и В.В. Славского [3].

Спектр оператора кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовался Дж. Милнором [1]. В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой им были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. Позднее О. Ковальский, С. Никшевич решили задачу о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных метрических группах Ли, а также трехмерных римановых локально однородных пространствах [4].

В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли известна работа Дж. Кальварусо, О. Ковальского [5], в которой исследуется задача о существовании трехмерной группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданным оператором Риччи.

В четырехмерном случае подобные исследования проводились лишь в случае групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В работах А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова [6,7] определены возможные сигнатуры собственных значений оператора Риччи, однако вопрос о восстановлении четырехмерной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой по заданному оператору Риччи остается открытым.

Отметим, что подобные результаты для операторов одномерной и секционной кривизны на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях были получены в работах [8–11].

1. Определения и предварительные сведения. Пусть $(M = G/H, g)$ — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с четырехмерной подгруппой изотропии, ∇ — связность Леви – Чивита. Оператор Риччи ρ определим равенством

$$g\left(\rho\left(X\right), Y\right) = \operatorname{tr}\left(Z \mapsto \left[\nabla_Z, \nabla_X\right] Y + \nabla_{[X,Z]} Y\right),$$

где X, Y, Z — векторные поля на M.

Классификация четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии была полученна в работе [12]. Далее мы будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру. Например, перечислим номера всех четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с четырехмерной подгруппой изотропии, которые приведены в данной классификации: $4.1^1.1$, $4.1^2.1$, $4.2^1.1$, $4.2^1.2$, $4.2^2.1$, $4.2^2.2$, $4.2^2.3$, $4.2^3.1$, $4.2^3.2$, $4.3^1.1$, $4.3^1.2$.

В соответствии с результатами работы [13], многообразия $4.1^1.1$, $4.1^2.1$, $4.2^1.2$, $4.2^2.3$, $4.2^3.2$, $4.3^1.2$ являются плоскими для любой инвариантной (псевдо)римановой метрики на них, а многообразие $4.3^1.1$ имеет нулевой тензор Риччи для любой инвариантной (псевдо)римановой метрики на нем. Следовательно, собственные значения оператора Риччи на данных многообразиях всегда равны нулю, а оператор Риччи всегда имеет диагональный вид. В силу вышесказанного далее мы будем рассматривать лишь нетривиальные случаи $4.2^1.1$, $4.2^2.1$, $4.2^2.2$ и $4.2^3.1$.

Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять компоненты оператора Риччи ρ на локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с нетривиальной подгруппой изотропии (см., например, [14]).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы изометрий G, $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы изотропии H, $\mathfrak{m}$ — дополнение к $\mathfrak{h}$ до алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\dim \mathfrak{h} = h$ и $\dim \mathfrak{m} = m$ (в нашем случае $h = 4$, $m = 4$). Зафиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ алгебры $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ — базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно.

Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k,$$
$$[h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Представление изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$ задается равенством

$$(\psi_i)_j^k = \left(\psi\left(e_i\right)\right)_j^k = \bar{c}_{ij}^k, \tag{1}$$

тогда условие инвариантности метрического тензора g имеет вид:

$$\left(\psi_i\right)^t \cdot g + g \cdot \psi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, h, \tag{2}$$

где $\left(\psi_i\right)^t$ — транспонированная матрица.

Компоненты связности Леви – Чивита ∇ выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}\right),$$
$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl},$$

где $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{e_i} u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$ и $\left\{g^{ij}\right\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Компоненты тензора кривизны R и тензора Риччи r можно вычислить с помощью следующих формул:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p\right) g_{ps},$$
$$r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

После этого компоненты оператора Риччи ρ вычисляются следующим образом:

$$\rho_i^j = r_{ki} g^{kj}.$$

Таблица

Собственные значения оператора Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с четырехмерной подгруппой изотропии

№	Сигнатура метрического тензора	Собственные значения оператора Риччи
$4.1^1.1$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$0, 0, 0, 0$
$4.1^2.1$	(3,1) при любом $\alpha_{4,4} > 0$	$0, 0, 0, 0$
$4.2^1.1$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$-\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}$
$4.2^1.2$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$0, 0, 0, 0$
$4.2^2.1$	(4,0) при любом $\alpha_{4,4} > 0$	$\frac{6}{\alpha_{4,4}}, \frac{6}{\alpha_{4,4}}, \frac{6}{\alpha_{4,4}}, \frac{6}{\alpha_{4,4}}$
$4.2^2.2$	(4,0) при любом $\alpha_{4,4} > 0$	$-\frac{6}{\alpha_{4,4}}, -\frac{6}{\alpha_{4,4}}, -\frac{6}{\alpha_{4,4}}, -\frac{6}{\alpha_{4,4}}$
$4.2^2.3$	(4,0) при любом $\alpha_{4,4} > 0$	$0, 0, 0, 0$
$4.2^3.1$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$-\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}, -\frac{6}{\alpha_{2,4}}$
$4.2^3.2$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$0, 0, 0, 0$
$4.3^1.1$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$0, 0, 0, 0$
$4.3^1.2$	(2,2) при любом $\alpha_{2,4} \neq 0$	$0, 0, 0, 0$

2. Основной результат. Используем вышеприведенный алгоритм для вычисления компонент оператора Риччи.

Теорема 1. *Пусть $(G/H, g)$ — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с четырехмерной подгруппой изотропии. Тогда оператор ρ для каждого возможного случая имеет диагональный вид. Кроме того, оператор Риччи имеет собственные значения, приведенные в таблице.*

Доказательство. Подробно рассмотрим случай $4.2^1.1$. Скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы изометрий, в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_3] = 2e_3, \quad [e_1, e_4] = -2e_4, \quad [e_1, u_1] = u_1,\\
&[e_1, u_2] = -u_2, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [e_1, u_4] = u_4,\\
&[e_2, u_1] = u_1, \quad [e_2, u_2] = u_2, \quad [e_2, u_3] = -u_3,\\
&[e_2, u_4] = -u_4, \quad [e_3, e_4] = e_1, \quad [e_3, u_2] = u_1,\\
&[e_3, u_3] = -u_4, \quad [e_4, u_1] = u_2, \quad [e_4, u_4] = -u_3,\\
&[u_1, u_3] = e_1 + 3e_2, \quad [u_1, u_4] = 2e_3,\\
&[u_2, u_3] = 2e_4, \quad [u_2, u_4] = -e_1 + 3e_2,
\end{aligned}$$

где $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Представление изотропии (1) имеет вид:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть компоненты инвариантного метрического тензора заданы следующим образом

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{1,4} & \alpha_{2,4} & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (2) имеет вид:

$$\begin{gathered}
\alpha_{1,1} = 0, \quad \alpha_{1,2} = 0, \quad \alpha_{1,4} = 0, \quad \alpha_{2,2} = 0,\\
\alpha_{2,3} = 0, \quad \alpha_{3,3} = 0, \quad \alpha_{3,4} = 0, \quad \alpha_{4,4} = 0,\\
\alpha_{2,4} - \alpha_{1,3} = 0.
\end{gathered}$$

Решая данную систему уравнений, получим, что инвариантный метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{2,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{2,4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что данный метрический тензор имеет нейтральную сигнатуру $(2, 2)$ и в силу невырожденности метрического тензора $\alpha_{2,4} \neq 0$.

Далее вычислим символы Кристоффеля Γ^k_{ij} и $\bar{\Gamma}^k_{ij}$. В данном случае все Γ^k_{ij} равны нулю, а нетривиальные $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^1_{11} = 1, \quad \bar{\Gamma}^1_{21} = 1, \quad \bar{\Gamma}^1_{32} = 1, \quad \bar{\Gamma}^2_{12} = -1,\\
&\bar{\Gamma}^2_{22} = 1, \quad \bar{\Gamma}^2_{41} = 1, \quad \bar{\Gamma}^3_{13} = -1, \quad \bar{\Gamma}^3_{23} = -1,\\
&\bar{\Gamma}^3_{44} = -1, \quad \bar{\Gamma}^4_{14} = 1, \quad \bar{\Gamma}^4_{24} = -1, \quad \bar{\Gamma}^4_{33} = -1.
\end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить компоненты тензора Римана R. Нетривиальные элементы приведены ниже:

$$R_{1313} = R_{2424} = 4\alpha_{2,4}, \quad R_{1324} = R_{2314} = 2\alpha_{2,4}.$$

Далее, тензор Риччи r имеет вид:

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а оператор Риччи:

$$\rho = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\alpha_{2,4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{\alpha_{2,4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{\alpha_{2,4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{\alpha_{2,4}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор Риччи имеет диагональный вид с собственными значениями на главной диагонали.

Вычисления для оставшихся случаев проводятся аналогично.

Как следствие вышеприведенной теоремы получим следующую.

Теорема 2. *Пусть $(G/H, g)$ — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с четырехмерной подгруппой изотропии. Тогда оператор ρ может быть оператором Риччи многообразия $(G/H, g)$ для некоторой инвариантной метрики тогда и только тогда, когда оператор ρ диагонализируем и имеет одно собственное значение кратности 4. При этом, если дополнительно потребовать, что g — лоренцева метрика (сигнатуры (3,1)), то оператор ρ обязан быть нулевым. Другие сигнатуры метрического тензора не накладывают дополнительных ограничений на оператор ρ.*

Заключение. Полученные в данной работе теоремы и разработанные мотоды позволяют решить задачу о восстановлении четырехмерного локально однородного (псевдо)риманова многообразия с подгруппой изотропии произвольной размерности по предписанному оператору Риччи.

Библиографический список

1. Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Advances in mathematics. 1976. Vol. 21, № 3. DOI: 10.1016/S0001-8708(76)80002-3.

2. Berestovskii V.N. Homogeneous Riemannian manifolds of positive Ricci curvature // Mathematical Notes. 1995. Vol. 55. № 3. DOI: 10.1007/BF02304766.

3. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. 2006. Т. 37.

4. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. 1996. № 62. DOI: 10.1007/BF00240002.

5. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. 2009. Vol. 7. DOI: 10.2478/s11533-008-0061-5

6. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Математические труды. 2009. Т. 11. № 2.

7. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Математические труды. 2010. Т. 12. № 1.

8. Воронов Д.С., Гладунова О.П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия АлтГУ. 2010. № 1-2.

9. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия АлтГУ. 2013. № 1/1.

10. Клепиков П.Н. О допустимых значениях спектра оператора одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сборник трудов всероссийской конференции. Барнаул, 2015.

11. Khromova O.P., Klepikova S.V. On sectional curvature operator of 3-dimensional locally homogeneous Lorentzian manifolds // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники : сборник научных статей международной конференции. Барнаул, 2018.

12. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. 2001. Vol. 8.

13. Клепиков П.Н. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Схоутена – Вейля // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2019. № 5.

14. Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия АлтГУ. 2017. № 1 (93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-28.