

УДК 517.7

Численное решение двумерной задачи фильтрации жидкости в деформируемой пористой среде*

Р.А. Вирц

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Numerical Solution of a Two-Dimensional Problem of Fluid Filtration in a Deformable Porous Medium

R.A. Virts

Altai State University (Barnaul, Russia)

В работе рассматривается двумерная математическая модель фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде. В основу модели положены уравнения сохранения массы для жидкой и твердой фаз, закон Дарси, реологическое соотношение для пористой среды и закон сохранения баланса сил. В данной статье уравнение баланса сил берется в полном виде, т.е. учитываются вязкие и упругие свойства среды. Целью работы является численное исследование модельной начально-краевой задачи. В пункте 1 даны постановка задачи и краткий обзор литературы по близким к данной теме работам. В пункте 2 проводится преобразование исходной системы уравнений. В случае медленных течений, когда конвективным слагаемым можно пренебречь, возникает система, состоящая из параболического уравнения второго порядка для эффективного давления среды и уравнения первого порядка для пористости. В пункте 3 предложен алгоритм численного решения полученной начально-краевой задачи. Для численной реализации используется схема переменных направлений для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, а также схема Рунге — Кутты четвертого порядка аппроксимации.

Ключевые слова: фильтрация, пористость, вязкость, численные методы, разностная схема, аппроксимация.

DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-14

Введение. В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа [1, 2]:

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}_f \rho_f) = 0, \quad (1)$$

The paper considers a two-dimensional mathematical model of filtration of a viscous incompressible fluid in a deformable porous medium. The model is based on the equations of conservation of mass for liquid and solid phases, Darcy's law, the rheological relationship for a porous medium, and the law of conservation of the balance of forces. In this article, the equation of the balance of forces is taken in full form, i.e. the viscous and elastic properties of the medium are taken into account. The aim of the work is a numerical study of a model initial-boundary value problem. Section 1 gives a statement of the problem and a brief review of the literature on works related to this topic. In item 2, the original system of equations is transformed. In the case of slow flows, when the convective term can be neglected, a system arises that consists of a second-order parabolic equation for the effective pressure of the medium and the first-order equation for porosity. Section 3 proposes an algorithm for the numerical solution of the resulting initial-boundary value problem. For the numerical implementation, a variable direction scheme for the heat equation with variable coefficients is used, as well as the Runge — Kutta scheme of the fourth order of approximation.

Key words: filtration, porosity, viscosity, numerical methods, difference scheme, approximation.

$$\frac{\partial \rho_s (1 - \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi) \vec{v}_s \rho_s) = 0, \quad (2)$$

$$\phi (\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi) (\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e \right), \quad (4)$$

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации («Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» тема, № FZMW-2020-0008).

$$\rho_{tot}\vec{g} + \nabla \cdot \left((1 - \phi)\eta \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right) - \nabla p_{tot} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$ — соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, ϕ — пористость, p_f, p_s — соответственно давления жидкой и твердой фаз, $p_e = p_{tot} - p_f$ — эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi)p_s$ — общее давление, $\rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi)\rho_s$ — плотность двухфазной среды, $\vec{g} = (0, -g)$ — вектор силы тяжести; $k(\phi) = k\phi^\alpha/\mu$ — коэффициент фильтрации, k — проницаемость пористой среды, μ — динамическая вязкость жидкости; $a_1(\phi) = \phi^m/\eta$ — коэффициент объемной вязкости, η — динамическая вязкость твердой фазы; $a_2(\phi) = \phi^b\beta_\phi$ — коэффициент объемной сжимаемости, β_ϕ — коэффициент сжимаемости пор; $m \in [0, 2], b = 1/2, \alpha = 3$ — параметры среды. Плотности жидкой и твердой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, y, t) \in Q_T$.

Модель, представленная в работе, может быть применима для описания процессов фильтрации жидкостей в пористых средах, например: движение магмы в земной коре, движение грунтовых вод, нефти и газа [2–5]. В настоящей работе пористость является искомой функцией.

Близкие по структуре системы уравнений рассматривались в работах [6–14]. В работе [6] выполнено численное решение неизоэтермической фильтрации вязкой несжимаемой жидкости. В [7] для системы уравнений одномерного нестационарного движения жидкости в теплопроводной вязкой пористой среде доказана разрешимость начально-краевой задачи. В работе [8] проведено численное исследование одномерной изотермической задачи фильтрации жидкости. В [9] предложен алгоритм численного решения начально-краевой задачи в неизоэтермическом случае. Вопросы обоснования моделей фильтрации в деформируемой пористой среде в модельных случаях исследованы в [15–18].

1. Постановка начально-краевой задачи. Из (1) и (2) следует уравнение

$$\nabla \cdot (\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) + \vec{v}_s) = 0,$$

которое с помощью закона Дарси (3) и реологического соотношения (4) сводится к уравнению для нахождения p_f

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k(\phi)(\nabla p_f - \rho_f \vec{g})) = \\ = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f) - a_2(\phi) \frac{d(p_{tot} - p_f)}{dt}. \end{aligned}$$

Используя реологическое соотношение (4) и закон сохранения массы для твердой фазы, получим следующее уравнение для p_{tot}

$$\frac{1}{1 - \phi} \frac{d\phi}{dt} = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f) - a_2(\phi) \frac{d(p_{tot} - p_f)}{dt}.$$

Уравнение для нахождения пористости можно представить в виде

$$\frac{1}{1 - \phi} \frac{d\phi}{dt} = \nabla \cdot \vec{v}_s,$$

и, наконец, уравнение для нахождения \vec{v}_s имеет вид (5). Здесь $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v}_s \cdot \nabla$. Предположим, что скорость течения твердой фазы пренебрежимо мала, тогда $d/dt \sim \partial/\partial t$ и (1)–(5) сводится к следующей системе уравнений для нахождения эффективного давления и пористости соответственно:

$$\nabla \cdot (k(\phi)(-\nabla p_e + (1 - \phi)\vec{g}\Delta\rho)) = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{1 - \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (7)$$

где $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$. Система (6)–(7) решается в области $(x, y, t) \in Q_T = \Omega_1 \times \Omega_2 \times (0, T)$, $\Omega_1 = (0, L), \Omega_2 = (0, H), \Omega \in R^2$ при следующих начальных и краевых условиях:

$$p_e(x, y, 0) = p_e^0(x, y), \quad \phi(x, y, 0) = \phi^0(x, y),$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial x} \Big|_{x=0, x=L} = 0, \quad p_e \Big|_{y=0} = P, \quad p_e \Big|_{y=H} = P_{атм}.$$

Перейдем к безразмерным переменным $x' = x/L^*, y' = y/H^*, t' = t/T^*, p'_e = p_e/P^*$, следовательно, область изменения x', y', t' есть единичный отрезок $[0, 1]$ и система уравнений (6)–(7) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} e(\phi, p_e) + a(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial t} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(b(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) + \frac{\partial d(\phi)}{\partial y}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (-\phi^m p_e - \omega \phi^b \frac{\partial p_e}{\partial t})(1 - \phi) = F(\phi, p_e), \quad (9)$$

где $a(\phi) = \beta\phi^b, b(\phi) = \phi^\alpha, c(\phi) = \varepsilon\phi^\alpha, d(\phi) = \varepsilon\phi^\alpha(1 - \phi), e(\phi, p_e) = \lambda\phi^m p_e, \beta = L^2\beta_\phi\mu P^*/(k\eta), \varepsilon = L^2/H^2, \lambda = L^2\mu/(k\eta), \omega = \beta_\phi P^*$ — безразмерные параметры. Масштабы времени и давления принимают вид $T^* = \frac{\eta}{P^*}, P^* = H^*g\Delta\rho$.

Если $b = 1$ и $m = 1$, то из (9) вытекает следующее представление для пористости

$$\frac{\phi}{1-\phi} = \frac{\phi^0}{1-\phi^0} \exp\left(-\int_0^t p_e(x, y, \tau) d\tau - \wedge_{yy} p_{i,j}^{n+1} = \left[c_{i,j+0.5}^n \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{h_y^2} - c_{i,j-0.5}^n \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right], \right. \\ \left. -\omega(p_e(x, y, t) - p_e^0(x, y))\right),$$

гарантирующее выполнение физического принципа максимума $0 < \phi < 1$ при $\phi^0 \in (0, 1)$ и достаточной гладкости p_e .

2. Численное исследование. В этом разделе предлагается неявная разностная дискретизация уравнений (8)–(9). В области $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ построим равномерную сетку $\bar{\omega}_{h_x h_y \tau} = \bar{\omega}_{h_x} \times \bar{\omega}_{h_y} \times \bar{\omega}_\tau : \bar{\omega}_{h_x} = \{x_i = ih_x, i = 0, 1, \dots, N_x, N_x h_x = 1\}, \bar{\omega}_{h_y} = \{y_j = jh_y, j = 0, 1, \dots, N_y, N_y h_y = 1\}, \bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, M, M\tau = 1\}, h_x, h_y$ – шаги по пространственным координатам, τ – шаг по времени.

Численные решения в узлах сетки (x_i, y_j, t_n) обозначаются через $\phi_{i,j}^n = \phi(x_i, y_j, t_n), p_{i,j}^n = p_e(x_i, y_j, t_n)$. Следуя [19, 20], уравнения (8) и (9) приближаются схемой переменных направлений и схемой Рунге – Кутты четвертого порядка точности. В результате получаем систему разностных уравнений:

$$a_{i,j}^n \frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^n}{0.5\tau} = \wedge_{xx} p_{i,j}^{n+1/2} + \wedge_{yy} p_{i,j}^n + f_{i,j}^n, \\ \frac{p_{1,j}^{n+1/2} - p_{0,j}^{n+1/2}}{h_x} = 0, \quad \frac{p_{N_x,j}^{n+1/2} - p_{N_x-1,j}^{n+1/2}}{h_x} = 0, \\ i = 1, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, \dots, N_y - 1, \quad (10)$$

$$a_{i,j}^n \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1/2}}{0.5\tau} = \wedge_{xx} p_{i,j}^{n+1/2} + \wedge_{yy} p_{i,j}^{n+1} + f_{i,j}^n, \\ p_{i,0}^{n+1} = P, \quad p_{i,1}^{n+1} = P_{\text{атм}}, \\ p_{0,j}^{n+1} = p_{1,j}^{n+1}, \quad p_{N_x,j}^{n+1} = p_{N_x-1,j}^{n+1}, \\ i = 1, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, \dots, N_y - 1, \quad (11)$$

$$\frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (12)$$

где операторы $\wedge_{xx} p_{i,j}^{n+1/2}$ и $\wedge_{yy} p_{i,j}^{n+1}$ аппроксимируются следующим образом:

$$\wedge_{xx} p_{i,j}^{n+0.5} = \left[b_{i+0.5,j}^n \frac{p_{i+1,j}^{n+0.5} - p_{i,j}^{n+0.5}}{h_x^2} - b_{i-0.5,j}^n \frac{p_{i,j}^{n+0.5} - p_{i-1,j}^{n+0.5}}{h_x^2} \right],$$

$$b_{i+0.5,j}^n = \frac{b_{i,j}^n + b_{i+1,j}^n}{2}, \quad b_{i-0.5,j}^n = \frac{b_{i,j}^n + b_{i-1,j}^n}{2}, \\ c_{i,j+0.5}^n = \frac{c_{i,j}^n + c_{i,j+1}^n}{2}, \quad c_{i,j-0.5}^n = \frac{c_{i,j}^n + c_{i,j-1}^n}{2}, \\ k_1 = F(\phi_{i,j}^n, p_{i,j}^n), \quad k_2 = F(\phi_{i,j}^n + \tau k_1/2, p_{i,j}^n),$$

$$k_3 = F(\phi_{i,j}^n + \tau k_2/2, p_{i,j}^n), \quad k_4 = F(\phi_{i,j}^n + \tau k_3, p_{i,j}^n).$$

Здесь $f_{i,j}^n = (d_{i,j+1}^n - d_{i,j-1}^n)/2h_y - e_{i,j}^n, a_{i,j}^n = \beta(\phi_{i,j}^n)^b, b_{i,j}^n = (\phi_{i,j}^n)^\alpha, c_{i,j}^n = \varepsilon(\phi_{i,j}^n)^\alpha, d_{i,j}^n = \varepsilon(\phi_{i,j}^n)^\alpha(1 - \phi_{i,j}^n), e_{i,j}^n = \lambda(\phi_{i,j}^n)^m p_{i,j}^n$.

Каждый из дробных шагов реализуется прогонками [21]. На первом шаге для вычисления $p_{i,j}^{n+1/2}$ используется продольная прогонка (прогонка по x при каждом фиксированном $j = 1, \dots, N_y - 1$), а на втором шаге с помощью поперечной прогонки находим $p_{i,j}^{n+1}$. Для нахождения $p_{i,j}^1$ по схемам (10) и (11) используется $p_{i,j}^0$ и $\phi_{i,j}^0$. Далее по схеме (12) находим пористость на следующем временном слое. Повторяем алгоритм M раз для нахождения искоемых функций на всем временном интервале.

Тестирование численного алгоритма для рассматриваемых разностных схем проводилось на последовательностях сеток. Также для проверки численной реализации был произведен расчет уравнения (8) по явной схеме с шагами $h_x = h_y = 0.01$ и шагом $\tau = 10^{-5}$. Численные эксперименты показали незначительную разницу в полученных значениях искоемых величин.

Предполагается, что на глубине H м под землей эффективное давление среды намного больше, чем на поверхности. В качестве твердой фазы и жидкости рассматриваются грунт и вода соответственно со следующими значениями величин [1, с. 563]: $\eta = 10^{10}$ Па · с, $\beta_\phi = 10^{-8}$ Па $^{-1}$, $k = 10^{-8}$ м 2 , $L = 50$ м, $H = 1000$ м, $\mu = 8.9 \cdot 10^{-4}$ Па · с, $g = 10$ м/с 2 , $\rho_s = 2 \cdot 10^3$ кг/м 3 , $\rho_f = 1000$ кг/м 3 , $b = 1/2, \alpha = 3, m = 1$. Тогда $P^* = 10^7$ Па и $T^* = 1000$ с. Начальное условие для p_e возьмем равным $p_e^0 = P(1 - y) + P_{\text{атм}} y$.

Положим $P = AP_{\text{атм}}/P^*$, где $P_{\text{атм}} = 101325$ Па – атмосферное давление. Рассмотрим зависимость изменения пористости от параметра A . Положим $A = 1$, тогда давления на границах

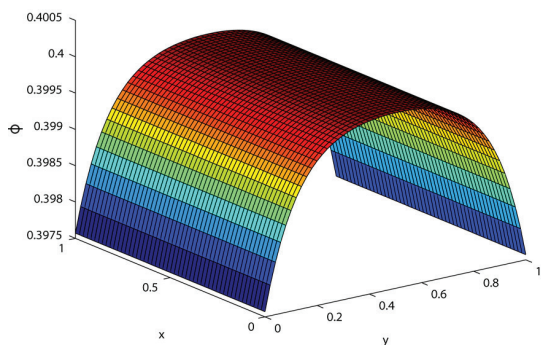


Рис. 1. Пористость при $t = 1, A = 1, \phi^0 = 0.4$

рассматриваемой области Ω_2 равны, следовательно пористость при $t = 1$ здесь практически не меняется от начального значения (рис. 1).

Пусть $A = 100$. Тогда пористость на нижней границе $y = 0$ области Ω_2 уменьшается. Связано это, по-видимому, с тем, что под действием большого давления поры грунта уменьшаются в размерах (рис. 2).

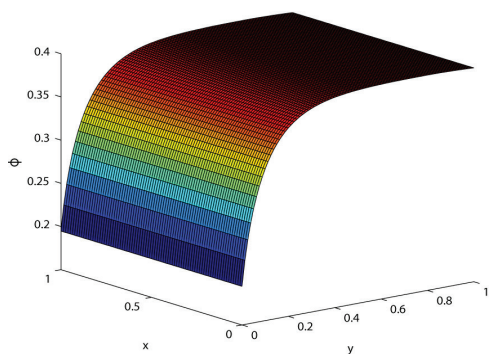


Рис. 2. Пористость при $t = 1, A = 100, \phi^0 = 0.4$

И, наконец, при $A = 300$ на нижней границе области Ω_2 в силу большого давления наблюдается максимальное уплотнение грунта, следовательно, его пористость в этой области минимальна (рис. 3).

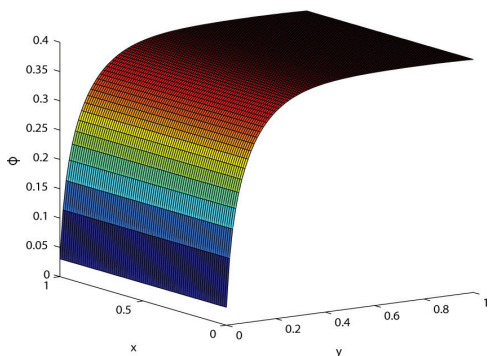


Рис. 3. Пористость при $t = 1, A = 300, \phi^0 = 0.4$

Эффективное давление и пористость в различные моменты времени показаны на рис. 4 и 5. Пористость при $t = 1, x = 1$ при различных значениях параметра A представлена на рис. 6.

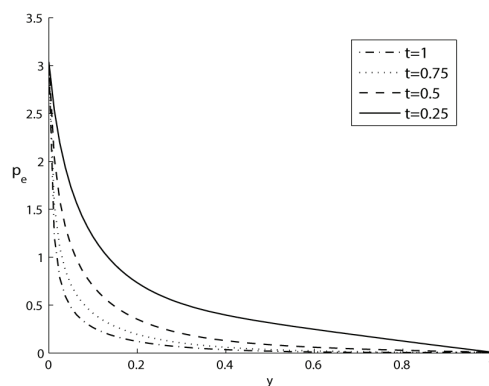


Рис. 4. Эффективное давление в различные моменты времени при $x = 1, A = 300, \phi^0 = 0.4$

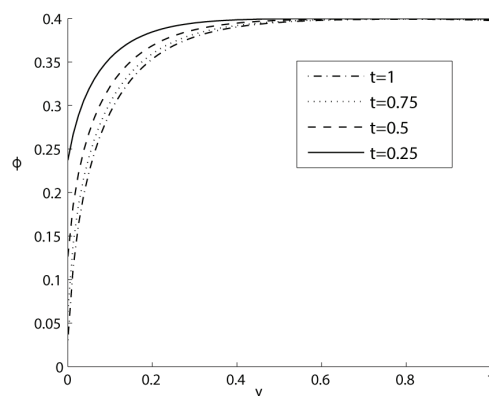


Рис. 5. Пористость в различные моменты времени при $x = 1, A = 300, \phi^0 = 0.4$

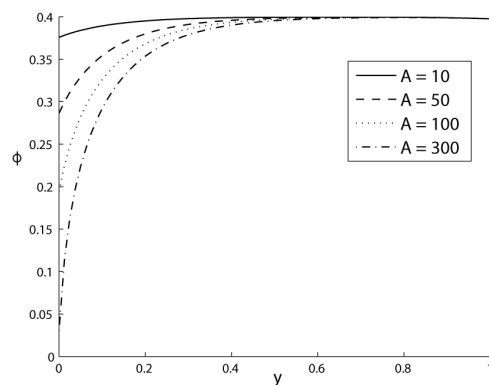


Рис. 6. Пористость при $x = 1, t = 1, \phi^0 = 0.4$

Закключение. В работе проведено численное исследование двумерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде. Проведены расчеты с различными значениями эффективного давления среды на глубине. В ходе расчетов выяснилось, что с увеличением эффективного давления, пористость

грунта уменьшается.

Численный эксперимент выполнен на вычислительном кластере ЦКП «Сибирский суперкомпьютерный центр» (Вычислительный комплекс РСК «Торнадо») согласно Плану мероприятий по реализации соглашения между ИГиЛ СО РАН и АлтГУ на 2020–2023 гг.

Библиографический список

1. Fowler A. *Mathematical Geoscience* // Springer-Verlag London Limited. 2011. DOI: 10.1007/s11004-012-9399-0.
2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. *Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock* // *Geodinamica Acta*. 1998. Vol. 11. №. 2-3. DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5.
3. Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York, 1972.
4. Morency S., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P. *A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability* // *Journal of Geophysical Research*. 2007. Vol. 112, B10407. DOI: 10.1029/2006JB004701.
5. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред*. М., 1987. Ч. 1.
6. Virts R.A., Papin A.A., Tokareva M.A. *Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium* // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1666. № 1. DOI: 10.1088/1742-6596/1666/1/012041.
7. Papin A.A., Tokareva M.A., Virts R.A. *Filtration of Liquid in a Non-isothermal Viscous Porous Medium* // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2020. Vol. 13. № 6. DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773.
8. Вирц Р.А., Папин А.А., Вайгант В.А. *Численное решение одной задачи фильтрации жидкости в вязкоупругой пористой среде* // *Известия Алт. гос. ун-та*. 2020. № 1 (111). DOI: 10.14258/izvasu(2020)1-11.
9. Вирц Р.А. *Одномерная задача неизотермической фильтрации жидкости в вязкой пористой среде* // *Труды семинара по геометрии и математическому моделированию*. 2019. № 5.
10. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein C.I. *Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics* // *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20. № 1. DOI: 10.1088/0951-7715/20/1/003.
11. Abourabia A.M., Hassan K.M., Morad A.M. *Analytical solutions of the magma equations for molten rocks in a granular matrix* // *Chaos Solutions Fract.* 2009. Vol. 42. № 2. DOI: 10.1016/j.chaos.2009.03.078.
12. Geng Y., Zhang L. *Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equations* // *Applied Mathematics and Computation*. 2010. Vol. 217. № 4. DOI: 10.1016/j.amc.2009.11.035.
13. Koleva M.N., Vulkov L.G. *Numerical analysis of one dimensional motion of magma without mass forces* // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2020. Vol. 366. DOI: 10.1016/j.cam.2019.07.003.
14. Байкин А.Н. *Динамика трещины гидро-разрыва пласта в неоднородной пороупругой среде* : дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2016.
15. Вирц Р.А., Папин А.А. *Обоснование одной модели одномерной фильтрации в деформируемой пористой среде* // *Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники*. Барнаул, 2018.
16. Tokareva M.A. *Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration poroelastic media* // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. Vol. 722. № 1. DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012037.
17. Токарева М.А. *О глобальной разрешимости задачи о движении вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде* // *Известия Алт. гос. ун-та*. 2020. № 1 (111). DOI: 10.14258/izvasu(2020)1-23.
18. Tokareva M.A., Papin A.A. *Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium* // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2019. Vol. 13. № 2. DOI: 10.1134/S1990478919020169.
19. Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. *Методы вычислений ; ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов*. Новосибирск, 2008.
20. Калиткин Н.Н. *Численные методы*. М., 1978.
21. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. М., 1977.