УДК 514.76

К геометрии неголономных многообразий Кенмоцу

А.В. Букушева

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Geometry of Nonholonomic Kenmotsu Manifolds

A.V. Bukusheva

Saratov State University (Saratov, Russia)

Вводится понятие внутренней геометрии неголономного многообразия Кенмоцу M, под которой понимается совокупность тех свойств многообразия, которые зависят только от оснащения $D^{\perp}$ распределения D многообразия M, а также от параллельного перенесения векторов, принадлежащих распределению D вдоль кривых, касающихся этого распределения. Инвариантами внутренней геометрии неголономного многообразия Кенмоцу являются: тензор кривизны Схоутена; 1-форма η, порождающая распределение D; производная Ли $L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле Схоутена — Вагнера P, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$. Доказывается, что так же, как и в случае многообразия Кенмоцу, тензор Схоутена — Вагнера многообразия M обращается в нуль. Отсюда, в частности, следует, что тензор Схоутена неголономного многообразия Кенмоцу обладает теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны Римана. Доказывается, что альтернация тензора Риччи — Схоутена совпадает с дифференциалом структурной формы. Это свойство тензора Риччи — Схоутена по существу используется при доказательстве основного результата статьи: неголономное многообразие Кенмоцу не может нести на себе структуру η-Эйнштейнова многообразия.

Ключевые слова: неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связность, тензор Схоутена, η-Эйнштейново многообразие.

The concept of the intrinsic geometry of a nonholonomic Kenmotsu manifold M is introduced. It is understood as the set of those properties of the manifold that depend only on the framing $D^{\perp}$ of the distribution D of the manifold M, on the parallel transformation of vectors belonging to the distribution D along curves tangent to this distribution. The invariants of the intrinsic geometry of the nonholonomic Kenmotsu manifold are: the Schouten curvature tensor; 1-form η generating the distribution D; the Lie derivative $L_{\vec{\xi}}g$ of the metric tensor g along the vector field $\vec{\xi}$; Schouten — Wagner tensor field P, whose components in adapted coordinates are expressed using the equalities $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$. It is proved that, as in the case of the Kenmotsu manifold, the Schouten — Wagner tensor of the manifold M vanishes. It follows that the Schouten tensor of a nonholonomic Kenmotsu mani-fold has the same formal properties as the Riemann curvature tensor. It is proved that the alternation of the Ricci — Schouten tensor coincides with the differential of the structural form. This property of the Ricci — Schouten tensor is used in the proof of the main result of the article: a nonholonomic Kenmotsu manifold cannot carry the structure of an η-Einstein manifold.

Key words: non-holonomic Kenmotsu manifold, interior connection, Schouten tensor, η-Einstein manifold.

DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-13

Введение

Понятие неголономного многообразия Кенмоцу введено в работе [1]. Большой вклад в исследование геометрии многообразий Кенмоцу внесли В.Ф. Кириченко и его ученики [2, 3]. Неголономное многообразие Кенмоцу является естественным обобщением классического многообразия Кенмоцу [4–6]. Наиболее распространенным способом обобщения многообразия Кенмоцу служит ослабление требований к его структурному эндоморфизму [3]. Другой способ обобщения многообразия Кенмоцу основывается на увеличении числа структурных эндоморфизмов [7]. Естественность рассмотрения почти контактных метрических многообразий размерности $n=4m+1$, $m\geq 1$ с тремя структурными эндоморфизмами подтверждается результатами, опубликованными в работах [8–10]. В работе [11] рассматривается случай многообразия размерности $n=4m+3$.

Нормальное почти контактное метрическое многообразие называется многообразием Кенмоцу, если $d\eta=0$, $d\Omega=2\eta\Lambda\Omega$ [2, 3]. Условие $d\eta=0$ означает, что распределение многообразия Кенмоцу интегрируемо. Отказываясь от требования $d\eta=0$, получаем более широкий класс многообразий — неголономные многообразия Кенмоцу. Интересной задачей является задача сравнения геометрических свойств указанных классов почти контактных метрических многообразий. В работе рассматриваются простейшие примеры многообразий Кенмоцу и неголономных многообразий Кенмоцу. Уже из этих примеров видны принципиальные различия в строении основных инвариантов внутренней геометрии изучаемых классов почти контактных метрических многообразий. Почти контактное метрическое многообразие называется η-Эйнштейновым многообразием, если выполняется условие $\tilde{r}=ag+b\eta\otimes\eta$, где $\tilde{r}$ — тензор Риччи, a и b — гладкие функции. Хорошо известно, что в случае многообразия Кенмоцу, если $b=const$, то η-Эйнштейново многообразие Кенмоцу является многообразием Эйнштейна. В настоящей работе показывается, что неголономное многообразие Кенмоцу не может нести на себе структуру η-Эйнштейнова многообразия.

Основные сведения из геометрии неголономных многообразий Кенмоцу. Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n=2m+1$, $m\geq 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ [4]. Здесь, в частности, η — 1-форма и $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающие, соответственно, распределение $D: D=\ker(\eta)$ и оснащение $D^{\perp}$ распределения $D: D^{\perp}=span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D называется распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM=D\otimes D^{\perp}$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_{\varphi}+2d\eta\otimes\vec{\xi}=0$, где $N_{\varphi}(X,Y)=[\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ.

Нормальное почти контактное метрическое многообразие M называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $d\Omega=2\eta\Lambda\Omega$. Легко показать, что для многообразия M также выполняется условие $L_{\vec{\xi}}g=2(g-\eta\otimes\eta)$.

Для проведения необходимых вычислений удобно использовать так называемые адаптированные координаты. Карта $k(x^{\alpha})$ ($\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n$; $a,b,c=1,\dots,n-1$) многообразия M называется адаптированной к распределению D, если $\partial_n=\vec{\xi}$ [5]. Пусть $P:TM\to D$ — проектор, определяемый разложением $TM=D\otimes D^{\perp}$, и $k(x^{\alpha})$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a)=\vec{e}_a=\partial_a-\Gamma^n_a\partial_n$ порождают распределение $D: D^{\perp}=span(\vec{e_a})$. Для неголономного поля базисов $(\vec{e}_{\alpha})=(\vec{e}_a,\partial_n)$ выполняется соотношение $[\vec{e}_a,\vec{e}_b]=2\omega_{ba}\partial_n$. Из условия $\omega(\vec{\xi},\cdot)=0$ следует, что $\partial_n\Gamma^n_a=0$. Пусть $k(x^{\alpha})$ и $k'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a=x^a(x^{a})$, $x^n=x^n+x^n(x^a)$. Равенство $L_{\vec{\xi}}g=2(g-\eta\otimes\eta)$ влечет полезное для дальнейшего координатное равенство $\partial_n g_{ab}=2g_{ab}$.

Внутренней линейной связностью ∇ [6, 7] на почти контактном метрическом многообразии называется отображение $\nabla:\Gamma(D)\times\Gamma(D)\to\Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1X+f_2Y}=f_1\nabla_X+f_2\nabla_Y$, 2) $\nabla_X fY=(Xf)Y+f\nabla_X Y$,

3) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$,

где Γ(D) — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Внутренняя связность определяет дифференцирование допустимых тензорных полей [7]. Вот так, например, определяется ковариантная производная эндоморфизма

$$\varphi:(\nabla_X\varphi)Y=\nabla_X(\varphi Y)-\varphi(\nabla_X Y), X,Y\in\Gamma(\mathrm{D}).$$

Связность ∇ используется для задания параллельного переноса допустимых векторов вдоль допустимых кривых. Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b=\Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем соответственно допустимые тензорные поля:

$$S(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-P[X,Y],$$
$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{P[X,Y]}Z-P[Q[X,Y],Z],$$

где $Q=I-P$, $X,Y,Z\in\Gamma(D)$. Тензор $R(X,Y)Z$ носит название тензора Схоутена. Компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах имеют следующий вид [7]: $R^{d}_{abc}=2\vec{e}_{[a}\Gamma^{d}_{b]c}+2\Gamma^{d}_{[a||e||}\Gamma^{e}_{b]c}$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g: $\widetilde{\nabla},\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Пусть $\psi: D\to D$ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(X,Y)=g(\psi X,Y)$. Имеет место следующее предложение [7].

Предложение. Коэффициенты связности Леви-Чивиты неголономного многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:

$$\widetilde{\Gamma}^{c}_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}(\vec{e}_b g_{ad}+\vec{e}_a g_{bd}-\vec{e}_d g_{ab}),\ \widetilde{\Gamma}^{n}_{ab}=\omega_{ba}-g_{ab},\ \widetilde{\Gamma}^{b}_{an}=\widetilde{\Gamma}^{b}_{na}=\delta^{b}_{a}+\psi^{b}_{a},\ \widetilde{\Gamma}^{n}_{n\alpha}=\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{nn}=0\,.$$

Учитывая, что внутреннюю связность ∇ почти контактного метрического многообразия можно получить с помощью равенства $\nabla_X Y=P(\widetilde{\nabla}_X Y)$, $X,Y\in\Gamma(\mathrm{D})$, легко приходим к равенствам $\nabla g=0$, $S=0$. Коэффициенты внутренней линейной связности при этом находятся по формулам:

$$\Gamma^{c}_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}(\vec{e}_b g_{ad}+\vec{e}_a g_{bd}-\vec{e}_d g_{ab}).$$

Известно, что почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда

$$(\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y=-\eta(Y)\varphi X-g(X,\varphi Y)\vec{\xi}.$$

Аналогичный результат имеет место и в случае неголономного многообразия Кенмоцу.

Теорема 1. Почти контактное метрическое многообразие является неголономным многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда

$$(\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)Y=\eta(Y)(\widetilde{\nabla}_X\varphi)(\vec{\xi})-(\omega(X,\ \varphi Y)+g(X,\ \varphi Y))\vec{\xi}.$$

Доказательство. Пусть M — неголономное многообразие Кенмоцу. Воспользуемся следующим равенством [12]:

$$2g((\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)Y,\ Z)=3(d\Omega(X,\ \varphi Y,\ \varphi Z)-d\Omega(X,\ Y,\ Z))+g(N^{(1)}(Y,\ Z),\ \varphi X)+$$

$$+N^{(2)}(Y,\ Z)\eta(X)+2(d\eta(\varphi Y,\ X)\eta(Z)-d\eta(\varphi Z,\ X)\eta(Y)).$$

Учитывая свойства неголономного многообразия Кенмоцу, последнее равенство переписываем в следующем виде:

$$g((\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y,\ Z)=-\eta(Y)g(Z,\ \varphi X)-\eta(Z)g(X,\ \varphi Y)+2(d\eta(\varphi Y,\ X)\eta(Z)-d\eta(\varphi Z,\ X)\eta(Y))\,.$$

Полагая в последнем равенстве $Y=\vec{\xi}$, получаем:

$$-d\eta(\varphi Z,\ X)=g((\widetilde{\nabla}_X\varphi)\vec{\xi}+\varphi X,\ Z).$$

Подставляя полученное выражение для дифференциала $d\eta(\varphi Z,\ X)$ в предыдущую формулу, окончательно получаем характеристическое уравнение:

$$(\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y=\eta(Y)(\widetilde{\nabla}_X\varphi)(\vec{\xi})-(\omega(X,\ \varphi Y)+g(X,\ \varphi Y))\vec{\xi}.$$

Обратно пусть в почти контактном метрическом многообразии выполняется характеристическое уравнение. Воспользуемся адаптированными координатами. В результате получаем:

1) $L_{\vec{\xi}}\varphi=0$, 2) $\nabla\varphi=0$, 3) $\omega(\varphi X,\ \varphi Y)=\omega(X,\ Y)$, 4) $\partial_n g_{ab}=2g_{ab}$.

Покажем, что это так. Рассмотрим случай, когда в характеристическом уравнении выполнена подстановка $X=\vec{e}_a$, $Y=\vec{e}_b$. В этом случае, с одной стороны, $\nabla\varphi=0$, а с другой — $\partial_n g_{ab}=2g_{ab}$. Выполняя подстановку $X=\partial_n$, $Y=\vec{e}_b$, получаем условия $L_{\vec{\xi}}\varphi=0$, $\omega(\varphi X,\ \varphi Y)=\omega(X,\ Y)$.

Пример неголономного многообразия Кенмоцу.

Пусть $M=R^3$. (∂_α) (α=1, 2, 3) — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая, $\eta=dx^3+x^2dx$. Пусть $\vec{e}_1=\partial_1-x^2\partial_3$, $\vec{e}_2=\partial_3$, $\vec{e}_3=\vec{\xi}=\partial_3$, $D=Span(e_1,\ \partial_2)$. Определим метрический тензор, полагая $g(\vec{e}_1,\ \vec{e}_1)=g(\vec{e}_2,\ \vec{e}_2)=e^{2x^3}$, $g(\vec{e}_3,\ \vec{e}_3)=1$. Тем самым добиваемся выполнения равенства $L_{\vec{\xi}}g=2(g-\eta\otimes\eta)$.

Структурный эндоморфизм зададим равенствами $\varphi(\vec{e}_1)=\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2)=-\vec{e}_1$, $\varphi(\vec{e}_2)=\vec{0}$.

Отсюда непосредственно следует, что $L_{\vec{\xi}}\varphi=0$ и

$$\omega(\varphi(\vec{e}_1),\ \varphi(\vec{e}_2))=-\omega(\vec{e}_2,\ \vec{e}_1)=\omega(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)\,.$$

Последнее означает выполнение равенства $\omega(\varphi X,\ \varphi Y)=\omega(X,\ Y)$.

Проводя непосредственные вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами внутренней связности являются следующие коэффициенты: $\Gamma_{11}^{1} = \Gamma_{21}^{2} = -\Gamma_{22}^{1} = -x^2$. Отсюда, в частности, следует справедливость равенства $\nabla\varphi = 0$. После необходимых вычислений получаем: $R_{212}^{2} = -1$. Если распределение $D = Span(\vec{e}_1, \partial_2)$ в многообразии $M=R^3$ заменить на распределение $D = Span(\partial_1, \partial_2)$, то получим пример многообразия Кенмоцу, для которого коэффициенты внутренней связности равны нулю, и, следовательно, равен нулю тензор Схоутена.

2. Основные результаты. Пусть M — неголономное многообразие Кенмоцу. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Неголономное многообразие Кенмоцу не может нести на себе структуру η-Эйнштейнова многообразия.

Доказательство. Найдем в адаптированных координатах необходимые для дальнейшего компоненты тензора кривизны $\tilde{R}$ связности Леви-Чивиты. Имеем:

$$\tilde{R}_{abc}^{d} = R_{abc}^{d} + (\delta_a^d + \psi_b^d)(\omega_{cb} - g_{cb}) - (\delta_b^d + \psi_b^d)(\omega_{ca} - g_{ca}) - 2\omega_{ba}(\delta_c^d + \psi_c^d),$$

$$\tilde{R}_{anc}^{n} = g_{ca} + \omega_{da}\psi_c^d, \tilde{R}_{nba}^{c} = -\nabla_b\psi_a^c, \ \tilde{R}_{nba}^{c} = \partial n\psi_b^c + \delta_b^c + 2\psi_b^c + \psi_d^c\psi_b^d.$$

Здесь R_{abc}^{d} — компоненты тензора Схоутена [7]:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]}Z - P[Q[X, Y], Z], \ Q = 1 - P.$$

Пусть $\tilde{r}(X, Y)$ — тензор Риччи, $\mathrm{r}(X, Z) = \mathrm{tr}(Y \to \mathrm{R}(X, Y)Z, \ X, Y, Z \in \Gamma(\mathrm{D})$ — тензор Схоутена — Риччи [7]. В адаптированных координатах получаем:

$$\tilde{r}_{ac} = r_{ac} + 2mg_{ca} - 2m\omega_{ca} + \omega_{cd}\psi_a^d + \omega_{ad}\psi_c^d,$$

$$\tilde{r}_{an} = \tilde{r}_{na} = -\nabla_b\psi_a^b,$$

$$\tilde{r}_{nn} = 2m + tr(\psi^2).$$

Предположим, что неголономное многообразие Кенмоцу является η-Эйнштейновым многообразием. Тогда выполняется следующее равенство:

$$\vec{r}_{ac} = r_{ac} + 2mg_{ac} - 2m\omega_{ca} + \omega_{cd}\psi_a^d + \omega_{ad}\psi_c^d = ag_{ac}, \text{или}$$

$$(2m - a)g_{ca} + 2\omega_{cd}\psi_a^d = 2m\omega_{ca} - r_{ac}.$$

Левая часть последнего равенства зависит от координаты x^n, а правая — нет, что и доказывает теорему.

Заметим, что в отличие от классического случая многообразия Кенмоцу тензор Схоутена неголономного многообразия Кенмоцу в нуль не обращается. Это утверждение следует из известной формулы [7]:

$$\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R_{eab}^{d} - g_{bd}R_{eac}^{d}.$$

Библиографический список

1. Букушева А.В. О тензоре Схоутена — Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2019. № 5.

2. Кириченко В.Ф. О геометрии многообразий Кенмоцу // Доклады Академии наук. 2001. Т. 380. № 5.

3. Абу-Салеем А., Рустанов А.Р., Мелехина Т.Л. Обобщенные многообразия Кенмоцу постоянного типа // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 2. DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-7-21.

4. Букушева А.В. Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2020. № 64. DOI: 10.17223/19988621/64/1.

5. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24.

6. De A. On Kenmotsu manifold // Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. 2010. Vol. 2. Issue 3.

7. Attarchi H. 3-Kenmotsu manifolds // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. № 3. DOI: 10.1134/S1995080220030051.

8. Galaev S.V. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39. № 1. DOI: 10.1134/S1995080218010122.

9. Букушева А.В., Галаев С.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. № 48.

10. Галаев С.В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // Вестник Башкирского ун-та. 2016. Т. 21. № 3.

11. Cappelletti-Montano B., De Nicola A., Yudin I. Examples of 3-quasi-Sasakian manifolds // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. 2015. Vol. 73. № 3–4.

12. Pitis G. Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov, 2007.