МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 514.742.4

Конформно киллинговы векторные поля на 2-симметрических пятимерных лоренцевых многообразиях

Т.А. Андреева[1], В.В. Балащенко[2], Д.Н. Оскорбин[1], Е.Д. Родионов[1]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

[2]Белорусский государственный университет (Минск, Белоруссия)

Conformally Killing Fields on 2-Symmetric Five-Dimensional Lorentzian Manifolds

T.A. Andreeva[1], V.V. Balashchenko[2], D.N. Oskorbin[1], E.D. Rodionov[1]

[1] Altai State University (Barnaul, Russia)
[2] Belarusian State University (Minsk, Belarus)

Исследованию конформно киллинговых векторных полей посвящены работы многих математиков. Являясь естественным обобщением понятия векторных полей Киллинга, данные поля порождают алгебру Ли, соответствующую группе Ли конформных преобразований многообразия. Кроме того, они порождают класс локально конформно однородных (псевдо)римановых многообразий, которые изучались В.В. Славским и Е.Д. Родионовым. Другим важным приложением являются солитоны Риччи, которые впервые были рассмотрены Р. Гамильтоном. Солитоны Риччи являются обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях. Уравнение солитона Риччи изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, было найдено общее решение уравнения солитона Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности, доказана разрешимость этого уравнения в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, однако для различных значений константы Эйнштейна роль полей Киллинга играют конформно киллинговы векторные поля.

В данной работе исследованы конформно киллинговы векторные поля на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. В локальных координатах, открытых А.С. Галаевым и Д.В. Алексеевским, описано общее решение конформного аналога уравнения Киллинга на пятимерных локально неразложимых 2-симметрических лоренцевых многообразиях.

Ключевые слова: конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k-симметрические пространства, киллинговы векторные поля, солитоны Риччи.

DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-11

The papers of many mathematicians are devoted to the study of conformally Killing vector fields. Being a natural generalization of the concept of Killing vector fields, these fields generate a Lie algebra corresponding to the Lie group of conformal transformations of the manifold. Moreover, they generate the class of locally conformally homogeneous (pseudo) Riemannian manifolds studied by V.V. Slavsky and E.D. Rodionov. Ricci solitons, which R. Hamilton first considered, are another important area of research. Ricci solitons are a generalization of Einstein's metrics on (pseudo) Riemannian manifolds. The Ricci soliton equation has been studied on various classes of manifolds by many mathematicians. In particular, a general solution of the Ricci soliton equation was found on 2-symmetric Lorentzian manifolds of low dimension, and the solvability of this equation in the class of 3-symmetric Lorentzian manifolds was proved. The Killing vector fields make it possible to find the general solution of the Ricci soliton equation in the case of the constancy of the Einstein constant in the Ricci soliton equation. However, the role of the Killing fields is played by conformally Killing vector fields for different values of the Einstein constant.

In this paper, we investigate conformal Killing vector fields on 5-dimensional 2-symmetric Lorentzian manifolds. The general solution of the conformal analog of the Killing equation on five-dimensional locally indecomposable 2-symmetric Lorentzian manifolds is described in local coordinates, discovered by A.S. Galaev and D.V. Alekseevsky.

Key words: conformol Killing vector fields, Lorentzian manifolds, k-symmetric spaces, Killing vector fields, Ricci solitons.

Введение. Векторные поля Киллинга порождают алгебру Ли группы движений многообразия и традиционно привлекают внимание математиков. Естественным обобщением данных полей являются конформно киллинговы векторные поля, алгебра Ли которых соответствует группе конформных преобразований многообразия. В работах В.В. Славского и Е.Д. Родионова с помощью конформно киллинговых векторных полей было введено понятие локально конформно однородных (псевдо)римановых многообразий, исследовалась их структура [1]. Другим важным приложением конформно киллинговых векторных полей являются солитоны Риччи, которые впервые были рассмотрены Р. Гамильтоном в результате исследования потоков Риччи на многообразиях. Солитоны Риччи являются обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях, и их уравнение изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, было найдено общее решение уравнения солитона Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности, доказана локальная разрешимость этого уравнения в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий [2]. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе [3].

Однако для различных значений константы Эйнштейна роль полей Киллинга играют конформно киллинговы векторные поля. Поэтому возникает потребность в их изучении. В данной работе исследованы конформно киллинговы векторные поля на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. В локальных координатах, открытых А.С. Галаевым и Д.В. Алексеевским, описано общее решение конформного аналога уравнения Киллинга на пятимерных локально неразложимых 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Дана оценка размерности пространства этих полей. Приведем предварительные определения и факты.

1. Основные определения и обозначения. Определение. *Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие M, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g.* Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то (M, g) называется лоренцевым многообразием. **Определение.** Псевдориманово многообразие (M, g) называется симметрическим порядка k, если

$$\nabla^k R = 0, \;\; \nabla^{k-1} R \neq 0,$$

где $k \geq 1$ и R — тензор кривизны (M, g).

Для римановых многообразий из условия $\nabla^k R=0$ вытекает $\nabla R=0$. Однако лоренцевы k-симметрические пространства существуют при всех $k \geq 2$.

Локально неразложимые 1-симметрические лоренцевы многообразия описаны Кахеном и Уоллахом в [4], 2-симметрические лоренцевы многообразия исследованы в работах [5–7]. Отметим, что они являются многообразиями Уокера [8, 9].

Определение. Векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется *полем Киллинга*, если выполняется равенство

$$L_K g = 0, \tag{1}$$

где $L_K g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля K.

Определение. Векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется *конформно киллинговым* векторным полем, если выполняется равенство

$$L_K g = f(p) g, \tag{2}$$

где $L_K g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля K, $c \in M$,а $f(p)$ — гладкая вещественная функция на многообразии.

Из теоремы Ву (см. [10]) следует, что любое лоренцево многообразие локально может быть представлено в виде прямого произведения некоторого риманова многообразия (M_1, g_1) и локально неразложимого лоренцева многообразия (M_2, g_2). Все рассматриваемые далее лоренцевы многообразия предполагаются локально неразложимыми.

С помощью теоремы А.С. Галаева и Д.В. Алексеевского (см. [5]) можно выбрать систему локальных координат на M.

Теорема 1. Пусть (M, g) — неразложимое лоренцево многообразие размерности 5. Тогда (M, g) 2-симметрично тогда и только тогда, когда локально существуют координаты v, x^1, x^2, x^3, u такие, что

$$\begin{aligned} g = 2dudv + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 + (H_{110}(x^1)^2 \\ + 2H_{120}x^1x^2 + 2H_{130}x^1x^3 + H_{220}(x^2)^2 \\ + 2H_{230}x^2x^3 + H_{330}(x^3)^2 + \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 u H_{ii1}) du^2, \end{aligned}$$

где H_{ii1} — ненулевые действительные числа, а H_{ij0} — произвольные константы.

2. Конформно киллинговы векторные поля. Для решения уравнения конформно киллингова поля сначала построимчастное решение этого уравнения. Ограничимся случаем, когда $f(p)$ — постоянная функция.

Теорема 2. *Векторное поле*

$$K = (2f\upsilon + c)\frac{d}{d\upsilon} + fx^1\frac{d}{dx^1} + fx^2\frac{d}{dx^2} + fx^3\frac{d}{dx^3},$$

где c, f — некоторые постоянные, на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии M с метрикой

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 + (H_{110}(x^1)^2 + 2H_{120}x^1x^2 + 2H_{130}x^1x^3 + H_{220}(x^2)^2 + 2H_{230}x^2x^3 + H_{330}(x^3)^2 + \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2uH_{ii1})du^2,$$

где H_{ii1} — ненулевые действительные числа, а H_{ij0} — произвольные константы, является конформно киллинговым.

Доказательство. *Для системы координат из теоремы 1 запишем уравнение $L_K g = fg$, в результате получим систему:*

$$\left\{\begin{array}{r}
2\frac{dU}{dv} = 0\\
-f + \frac{dX_j}{dx^j} = 0\\
\frac{dU}{dx^j} + \frac{1}{2}\frac{dX_j}{dv} = 0\\
\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{dX_2}{dx^1} = 0\\
\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx^3} + \frac{1}{2}\frac{dX_3}{dx^1} = 0\\
\frac{1}{2}\frac{dX_2}{dx^3} + \frac{1}{2}\frac{dX_3}{dx^2} = 0\\
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(H_{ii1}u + H_{ii0})(x^i)^2\frac{dU}{dv} + H_{120}x^1x^2\frac{dU}{dv}\\
+(H_{130}x^1\frac{dU}{dv} + H_{230}x^2\frac{dU}{dv})x^3\\
-2f + \frac{dU}{du} + \frac{dV}{dv} = 0\\
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(H_{ii1}u + H_{ii0})(x^i)^2\frac{dU}{dx^j}\\
+H_{120}x^1x^2\frac{dU}{dx^j} + (H_{130}x^1\frac{dU}{dx^j}\\
+H_{230}x^2\frac{dU}{dx^j})x^3 + \frac{dV}{dx^j} + \frac{1}{2}\frac{dX_2}{du} = 0\\
-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(2H_{ii1}fu + 2H_{ii0}f - H_{ii1}U - 2(H_{ii1}u\\
+H_{ii0})\frac{dU}{du})(x^i)^2 + ((H_{111}u + H_{110})X_1\\
+H_{120}X_2 + H_{130}X_3 - (2(H_{120}f - H_{120}\frac{dU}{du})x^1\\
-H_{120}X_1, u) - (H_{221}u + H_{220})X_2 - H_{230}X_3)x^2\\
-(2(H_{130}f - H_{130}\frac{dU}{du})x^1 + 2(H_{230}f - H_{230}X_2\\
-(H_{331}u + H_{330})X_3))x^3 + 2\frac{dV}{du} = 0
\end{array}\right.$$

где $V(v, x^1, x^2, x^3, u)$, $X_i(v, x^1, x^2, x^3, u)$, $U(v, x^1, x^2, x^3, u)$ — компоненты векторного поля K ($i = 1, 2, 3$).

Все уравнения, кроме последнего, очевидно, выполнены, последнее уравнение выполнено, так как после подстановки значений V, Xi, U и рас крытия всех скобок мы получаем уравнение

$$\begin{aligned}
&- H_{111}f(x^1)^2u - H_{110}f(x^1)^2 - H_{221}f(x^2)^2u\\
&- H_{220}f(x^2)^2 - H_{331}f(x^3)^2u - H_{330}f(x^3)^2\\
&+ H_{111}f(x^1)^2u + H_{110}f(x^1)^2 + H_{120}fx^1x^2\\
&+ H_{130}fx^1x^3 - 2H_{120}fx^1x^2 + H_{120}fx^1x^2\\
&+ H_{221}f(x^2)^2u + H_{220}f(x^2)^2 + H_{230}fx^2x^3\\
&- 2H_{130}fx^1x^3 - 2H_{230}fx^2x^3 + H_{130}fx^1x^3\\
&+ H_{230}fx^2x^3 + H_{331}f(x^3)^2u + H_{330}f(x^3)^2 = 0,
\end{aligned}$$

убедиться в справедливости которого не составляет труда. Теорема доказана.

Заметим, что в нашем случае любые два конформно киллингова векторных поля отличаются на киллингово. Поэтому для описания всех конформно киллинговых полей достаточно использовать общий вид киллингова поля, который устанавливает теорема 3 (см. [3]). Отметим, что неразложимые 2-симметрические лоренцевы многообразия являются пространствами Кахена — Уоллаха CW_d^{n+2} при d=1.

Теорема 3. *Пусть X — векторное поле Киллинга с координатами $V(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $Xj(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $U(v, x^1, \dots, x^n, u)$ (V, Xj, U — гладкие функции), на обобщенном многообразии Кахена — Уоллаха (CW_d^{n+2}, g) размерности $n+2 \geq 4$, с метрикой*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(u)x^ix^j)(du)^2.$$

Общее решение уравнения Киллинга имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{r}
U = 0\\
X_i = b_i(u) + f_{ik}x^k\\
V = -\dot{b}_i(u)x^i + c
\end{array}\right.,$$

где $c \in \mathbb{R}$ — произвольная константа, функции $b_i(u)$ определяются системой дифференциальных уравнений $\ddot{b}_i(u) = a_{ij}(u)b_j(u)$, ($f_{ik}$) — постоянная кососимметричная матрица, коммутирующая с $A = (a_{ij})$. Размерность пространства полей Киллинга не меньше $2n+1$ и не больше $2n+1+\frac{n(n-1)}{2}$.

В нашемслучае $a_{ij}(u) = H_{ij0} + H_{ij1}u$. Используя утверждение теоремы 2 и теоремы 3 при $n = 3$, $d = 1$, получаем:

Теорема 4. *Пусть X — конформно киллингово векторное поле с координатами $V(v, x^1, x^2, x^3, u)$, $X_i(v, x^1, x^2, x^3, u)$, $U(v, x^1, x^2, x^3, u)$ (V, X^j, U — гладкие функции, $i = 1, 2, 3$), на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии M с метрикой*

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 + (H_{110}(x^1)^2 + 2H_{120}x^1x^2 + 2H_{130}x^1x^3 + H_{220}(x^2)^2 + 2H_{230}x^2x^3 + H_{330}(x^3)^2 + \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2uH_{ii1})du^2,$$

где H_{ii1} *— ненулевые действительные числа, а* H_{ij0} *— произвольные константы.*

Общее решение уравнения конформно киллингова поля имеет вид:

$$\begin{cases} U = 0 \\ X_i = b_i(u) + f_{ik}x^k + fx^i \\ V = -\dot{b}_i(u)x^i + 2fv + c \end{cases},$$

где $c \in \mathbb{R}$ *— произвольная константа, функции* $b_i(u)$ *определяются системой дифференциальных уравнений* $\ddot{b}_i(u) = a_{ij}(u)b_j(u)$, (f_{ik}) *— постоянная кососимметричная матрица, коммутирующая с* $A = (a_{ij})$, *где* $a_{ij}(u) = H_{ij0} + H_{ij1}u$. *Размерность пространства конформно киллинговых полей не меньше 8 и не больше* 11.

Заключение. В результате проведенных исследований найдено общее решение конформного аналога уравнения Киллинга на пятимерных локально неразложимых 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Указаны оценки размерности пространства конформно киллинговых векторных полей на данных многообразиях.

Библиографический список

1. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. 2006. Т. 37.

2. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. 2010. Vol. 11.

3. Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci solitons and killing fields on generalized Cahen–Wallach manifolds // Siberian Mathematical Journal. 2019. Vol. 60. DOI: 10.1134/S0037446619050136.

4. Cahen M., Wallach N. Lorentzian symmetric spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 76. DOI: 10.1090/S0002-9904-1970-12448-X.

5. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Twosymmetric Lorentzian manifolds // J. Geom. Physics. 2011. Vol. 61. № 12. DOI: 10.1016/j.geomphys.2011.07.005.

6. Blanco O.F., Sanchez M., Senovilla J.M. Structure of second-order symmetric Lorentzian manifold // Journal of the European Mathematical Society. 2013. Vol. 15. DOI: 10.4171/JEMS/368.

7. Galaev A.S., Leistner T. Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications // Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry.ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc. Zürich, 2008.

8. Walker A.G. On parallel fields of partially null vector spaces // Quart. J. Math., Oxford Ser. 1949. Vol. 20. DOI: 10.1093/qmath/os-20.1.135.

9. Brozos-Vázquez M., García-Río E., Gilkey P., Nikcevic S., Vazquez-Lorenzo R. The geometry of Walker manifolds. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics. Morgan & Claypool Publ. 2009. DOI: 10.2200/S00197ED1V01Y200906MAS005.

10. Wu H. On the de Rham decomposition theorem // Illinois Journal of Mathematics. 1964. Vol. 8. Issue 2. DOI: 10.1215/ijm/1256059674.

11. Hall G.S. Symmetries and Curvature Structure in General Relativity. World Scientific Publishing Co. Re. Ltd, 2004 DOI: 10.1142/1729.