УДК 517.545

О функции δ-защемленности секционной кривизны компактной связной группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой и связностью с векторным кручением

Е.Д. Родионов, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the δ-Pinching Function of the Sectional Curvature of a Compact Connected Lie Group G with a Bi-Invariant Riemannian Metric and a Vectorial Torsion Connection

E.D. Rodionov, O.P. Khromova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Одной из важных проблем римановой геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологией риманова многообразия и, в частности, влияние знака секционной кривизны на топологическое строение риманова многообразия. Особое значение в данных исследованиях имеет вопрос о влиянии δ-защемленности римановых метрик положительной секционной кривизны на геометрическое и топологическое строение риманова многообразия. Наиболее исследован данный вопрос в однородном римановом случае. В этом направлении хорошо известна классификация однородных римановых многообразий положительной секционной кривизны, полученная М. Берже, Н. Уоллачем, Л. Бержери, а также ряд результатов по δ-защемленности однородных римановых метрик положительной секционной кривизны.

Исследуются римановы многообразия, метрическая связность которых является связностью с векторным кручением. В данный класс связностей попадает связность Леви-Чивиты. Хотя тензор кривизны этих связностей не обладает симметриями тензора кривизны связности Леви-Чивиты, но определить секционную кривизну представляется возможным. В работе исследована функция δ-защемленности секционной кривизны компактной связной группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой и связностью с векторным кручением. Доказывается, что она принимает значения $\delta(\|V\|) \in (0,1]$.

Ключевые слова: секционная кривизна, связность с векторным кручением, группы Ли.

DOI 10.14258/izvasu(2020)4-19

One of the important problems of Riemannian geometry is the problem of establishing connections between curvature and the topology of a Riemannian manifold, and, in particular, the influence of the sign of sectional curvature on the topological structure of a Riemannian manifold. Of particular importance in these studies is the question of the influence of δ-pinching of Riemannian metrics of positive sectional curvature on the geometric and topological structure of the Riemannian manifold. This question is most studied for the homogeneous Riemannian case. In this direction, the classification of homogeneous Riemannian manifolds of positive sectional curvature, obtained by M. Berger, N. Wallach, L. Bergeri, as well as a number of results on δ- pinching of homogeneous Riemannian metrics of positive sectional curvature, is well known.

In this paper, we investigate Riemannian manifolds with metric connection being a connection with vectorial torsion. The Levi-Civita connection falls into this class of connections. Although the curvature tensor of these connections does not possess the symmetries of the Levi-Civita connection curvature tensor, it seems possible to determine sectional curvature. This paper studies the δ-pinch function of the sectional curvature of a compact connected Lie group G with a bi-invariant Riemannian metric and a connection with vectorial torsion. It is proved that it takes the values $\delta(\|V\|) \in (0,1]$.

Key words: sectional curvature, connection with vectorial torsion, Lie groups.

Введение. Одной из важных проблем римановой геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологией риманова многообразия и, в частности, влияние знака секционной кривизны на топологическое строение риманова многообразия. В этом направлении хорошо известен ряд теорем римановой геометрии: теорема Адамара–Картана о полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны, теорема М. Громова о римановом многообразии неотрицательной кривизны Риччи [1], теорема сравнения углов треугольника А.Д. Александрова—В.А. Топоногова, теорема о сфере, экстремальные теоремы в римановой геометрии, ряд других результатов [2]. Наиболее исследован данный вопрос в однородном римановом случае. Если секционная кривизна $K_\sigma > 0$, то однородное риманово многообразие либо диффеоморфно КРОСПу (компактному симметрическому пространству ранга один), либо одному из пространств Алоффа–Берже–Уоллача, каждое из которых не гомеоморфно ни одному из симметрических пространств [3–5]. В случае неположительной секционной кривизны хорошо известны результаты работ [6, 7].

Другие результаты о секционной кривизне однородных римановых многообразий содержатся в обзорах [8, 9].

В статье исследуются римановы многообразия, метрическая связность которых является связностью с векторным кручением. В данный класс связностей попадает связность Леви-Чивиты. Хотя тензор кривизны этих связностей не обладает симметриями тензора кривизны связности Леви-Чивиты, но определить секционную кривизну представляется возможным.

Приведем необходимые нам определения и факты.

Пусть (M, g) — риманово многообразие, ∇^g — связность Леви-Чивиты, ∇ — связность с векторным кручением, определяемая по формуле

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \qquad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X, Y — произвольные векторные поля.

Рассмотрим на M тензор кривизны $R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ и положим $R(X,Y,Z,U) = g(R(X,Y)Z,U)$ для любых векторных полей X, Y, Z, U на M.

Из свойств тензора кривизны метрических связностей и определения связности с векторным кручением (1) несложно заметить, что

$$\begin{aligned} &R(X,Y,Z,T) = R^g(X,Y,Z,T)+ \\ &g(X,Z)[g(\nabla^g_Y V,T) + \pi(T)\pi(Y) - \frac{1}{2}g(Y,T)\pi(V)]+ \\ &g(Y,T)[g(\nabla^g_X V,Z) + \pi(Z)\pi(X) - \frac{1}{2}g(X,Z)\pi(V)]- \\ &g(Y,Z)[g(\nabla^g_X V,T) + \pi(T)\pi(X) - \frac{1}{2}g(X,T)\pi(V)]- \\ &g(X,T)[g(\nabla^g_Y V,Z) + \pi(Z)\pi(Y) - \frac{1}{2}g(Y,Z)\pi(V)], \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\pi(X) = g(X,V)$ и $R^g(X,Y,Z,T)$ — тензор кривизны относительно связности Леви-Чивиты.

Определим на M секционную кривизну в направлении линейно независимых векторов X и Y равенством

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2} \qquad (3)$$

и заметим, что это определение корректно (см. [10]).

Далее будем рассматривать площадки, построенные на ортонормальных векторах X, Y, для которых в силу (2) выполняется

$$\begin{aligned} &K(X,Y) = K^g(X,Y) + g(\nabla^g_Y V,Y)+ \\ &g(\nabla^g_X V,X) - \pi(V) + \pi^2(X) + \pi^2(Y). \end{aligned} \qquad (4)$$

О δ-защемленности секционной кривизны связностей с векторным кручением на группах Ли с биинвариантной римановой метрикой. Всюду далее будем предполагать, что $(M,g) = (G,g)$ является компактной связной группой Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим класс связностей с векторным кручением для групп Ли. Определим оператор $u(X,Y) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ равенством

$$2g(u(X,Y),Z) = g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X) \qquad (5)$$

для всех векторных полей $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Отсюда заключаем, что $g(u(X,V),X) = \frac{1}{2}g([V,X],X)$. И поскольку $\nabla^g_X V = \frac{1}{2}[X,V] - u(X,V)$, то (4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} &K(X,Y) = K^g(X,Y) + g([Y,V],Y)+ \\ &g([X,V],X) - \pi(V) + \pi^2(X) + \pi^2(Y). \end{aligned} \qquad (6)$$

Пусть далее метрика g биинвариантна. Тогда справедлива

Лемма. *Пусть (G,g) — связная компактная группа Ли G с биинвариантной римановой метрикой g, ∇ — связность с векторным кручением. Тогда имеет место формула*

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2 + \|V\|^2(\cos^2\varphi - \sin^2\psi), \qquad (7)$$

где φ и ψ углы между X, Y и V соответственно.

Доказательство. Действительно, если метрика g биинвариантна, то $u(X,Y) = 0$, $g([X,Y],X) = 0$ и $K^g(X,Y) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2$, где $\|X\|^2 = g(X,X)$ (см., например, [1, с. 51]). Таким образом, для секционной кривизны биинваринтной метрики справедливо $K(X,Y) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2 - \pi(V) + \pi^2(X) + \pi^2(Y)$.

Обозначим через φ угол между X и V, а через ψ — угол между Y и V. Тогда по определению формы π на ортонормальных векторах X, Y выполняется: $\pi^2(X) + \pi^2(Y) - \pi(V) = (\|V\|\cos\varphi)^2 + (\|V\|\cos\psi)^2 - \|V\|^2$. Откуда следует утверждение леммы. □

Введем понятие δ–защемленности секционной кривизны K_σ на связном компактном римановом многообразии (M,g) положительной секционной кривизны в точке $p \in M$, как отношение минимального и максимального значений функции секционной кривизны в этой точке на множестве всех двумерных направлений: $\delta(p) = \dfrac{K_{\min}}{K_{\max}}$.

Теорема. *Пусть (G,g) — компактная связная группа Ли G с биинвариантной римановой метрикой g, ∇ — связность с векторным кручением. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если секционная кривизна $K > 0$, универсальная накрывающая группы G изоморфна $SU(2)$. Более того, для таких групп Ли $K > 0$ в том и только том случае, если $\|V\| < 1/2$.*
2. *Функция δ–защемленности секционной кривизны принимает значения $\delta(\|V\|) \in (0,1]$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{rk}G > 1$, тогда существуют элементы $X, Y \in \mathfrak{g}$ такие, что $[X,Y] = 0$. Ортонормируя базис $\{X,Y\}$ и пользуясь условием $[X,Y] = 0$, а также формулой (7), получаем: $K(X,Y) = \|V\|^2(\cos^2\varphi - \sin^2\psi)$, где φ и ψ углы между X, Y и V соответственно. Рассмотрим два подпространства алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $V^\perp$ — ортогональное вектору V и L — порожденное векторами X и Y. По формуле Грассмана для вычисления размерности суммы подпространств получаем, что $\dim(V^\perp \cap L) \geq 1$. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $X \in V^\perp \cap L$, а значит, $K(X,Y) = -\|V\|^2\sin^2\psi$.

Пусть $\mathrm{rk}G = 1$, т.е. универсальная накрывающая группы G изоморфна $SU(2)$. Тогда, пользуясь простотой алгебры Ли $su(2)$, можем считать без ограничения общности рассуждений, что метрика g порождена формой Киллинга. В этом случае имеем: $K(X,Y) = \dfrac{1}{4} + \|V\|^2(\cos^2\varphi - \sin^2\psi)$ и минимум функции $K(X,Y)$ равен $\frac{1}{4} - \|V\|^2$. Таким образом, $K(X,Y) > 0$ в том и только том случае, если $\|V\| < 1/2$. Заметим, что $K(X,Y)$ достигает максимума $K_{\max}(X,Y) = \frac{1}{4} + \|V\|^2$ в случае, когда X коллинеарен, а Y ортогонален V, поэтому

$$\delta(\|V\|) = \frac{\frac{1}{4} - \|V\|^2}{\frac{1}{4} + \|V\|^2} = \frac{1 - 4\|V\|^2}{1 + 4\|V\|^2} = \frac{2}{1 + 4\|V\|^2} - 1$$

при условии, что $0 \leq \|V\| < 1/2$. Откуда нетрудно видеть, что $\delta(\|V\|) \in (0,1]$. □

Заключение. Заметим, что в классическом случае связность фиксирована и является связностью Леви-Чивиты ∇^g, метрика g является произвольной левоинвариантной римановой метрикой положительной секционной кривизны на группе Ли G. Тогда универсальная накрывающая группы G изоморфна $SU(2)$ (см., например, [4] и δ-защемленность секционной кривизны можно оценить, используя базис Дж. Милнора алгебры Ли группы $SU(2)$ [11].

В данной работе исследована функция δ-защемленности секционной кривизны компактной связной группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой и произвольной связностью с векторным кручением. Доказано, что она принимает значения $\delta(\|V\|) \in (0,1]$.

Библиографический список

1. Громов М. Знак и геометрический смысл кривизны. Ижевск, 1999.

2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971.

3. Berger M. Les varietes riemannienes homogenes normales a courbure strictement positive // Ann. Sc. Norm. Pisa. 1961. Vol. 15.

4. Wallach N.R. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. Math. 1972. Vol. 2(96).

5. Bérard Bergery L. Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive // J. Math. Pures Appl. 1976. Vol. 55.

6. Алексеевский Д.В. Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Матем. сб. 1975. Т. 96(138). № 1.

7. Bérard Bergery L. Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1978. Vol. (4)11.

8. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups. // Advances in mathematics. 1976. Vol. 21.

9. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D. Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // J. Math. Sci. 20007. Vol. 146(6).

10. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О секционной кривизне метрических связностей с векторным кручением // Известия Алт. гос. ун-та. 2020. № 1(111).

11. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application: Proceeding of the 7^{th} International Conference, Brno, Masaryk University in Brno (Czech Republic). 1999.