УДК 519.8:514.7

Математическое моделирование при исследовании оператора Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с изотропным тензором Вейля

С.В. Клепикова[1], *Т.П. Махаева*[2]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Алтайский государственный педагогический университет (Барнаул, Россия)

Mathematical Modeling in the Study of the Ricci Operator on Four-Dimensional Locally Homogeneous (Pseudo)Riemannian Manifolds with Isotropic Weyl Tensor

S.V. Klepikova[1], *T.P. Makhaeva*[2]

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Altai State Pedagogical University (Barnaul, Russia)

Известно, что из локально конформно однородного (псевдо)риманова пространства можно с помощью конформной деформации получить локально однородное пространство, если тензор Вейля (или тензор Схоутена-Вейля в трехмерном случае) имеет ненулевой квадрат длины. Таким образом, возникает задача об изучении (псевдо)римановых локально однородных и локально конформно однородных многообразий, тензор Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам не равен нулю (в этом случае тензор Вейля называется изотропным).

Одним из важных аспектов при изучении таких многообразий является изучение операторов кривизны на них, а именно задача о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по заданному оператору Риччи.

Задача о предписанных значениях оператора Риччи на 3-мерных локально однородных римановых пространствах была решена О. Ковальским и С. Никшевич. Аналогичные результаты для операторов одномерной и секционной кривизны были получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой.

Данная работа посвящена описанию примера изучения вопроса о предписанном операторе Риччи для четырехмерных локально однородных (псевдо) римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля.

Ключевые слова: локально однородные пространства, оператор Риччи, изотропный тензор Вейля, алгебры Ли.

DOI 10.14258/izvasu(2020)4-14

It is known that a locally homogeneous manifold can be obtained from a locally conformally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds by a conformal deformation if the Weyl tensor (or the Schouten-Weyl tensor in the three-dimensional case) has a nonzero squared length. Thus, the problem arises of studying (pseudo)Riemannian locally homogeneous and locally conformally homogeneous manifolds, the Weyl tensor of which has zero squared length, and itself is not equal to zero (in this case, the Weyl tensor is called isotropic).

One of the important aspects in the study of such manifolds is the study of the curvature operators on them, namely, the problem of restoring a (pseudo)Riemannian manifold from a given Ricci operator.

The problem of the prescribed values of the Ricci operator on 3-dimensional locally homogeneous Riemannian manifolds has been solved by O. Kowalski and S. Nikcevic. Analogous results for the one-dimensional and sectional curvature operators were obtained by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, and O.P. Khromova.

This paper is devoted to the description of an example of studying the problem of the prescribed Ricci operator for four-dimensional locally homogeneous (pseudo) Riemannian manifolds with a nontrivial isotropy subgroup and isotropic Weyl tensor.

Key words: locally homogeneous spaces, Ricci operator, isotropic Weyl tensor, Lie algebras.

Введение, определения, постановка задачи. Актуальным направлением в исследовании операторов кривизны является задача о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по заданному оператору кривизны. Трехмерные локально однородные (псевдо)римановы пространства с предписанными значениями спектра оператора Риччи были исследованы в [1, 2]. В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой известны работы [3–6] о восстановлении данных групп Ли по заданным собственным значениям операторов одномерной или секционной кривизны.

Кроме случая локально однородных пространств также исследовался вопрос о собственных значениях оператора Риччи в случае трехмерных кривизно однородных пространств (см., например, [7–10]).

Пусть (M, g) — n-мерное (псевдо)риманово многообразие, ∇ — связность Леви–Чивита. Оператор Риччи ρ определим равенством

$$g\left(\rho\left(X\right), Y\right) = \operatorname{tr}\left(Z \mapsto \left[\nabla_Z, \nabla_X\right] Y + \nabla_{[X,Z]} Y\right).$$

Целью данной работы является описание алгоритма, который позволит изучить вопрос о восстановлении четырехмерного локально однородного (псевдо)риманова многообразия с изотропным тензором Вейля по предписанному оператору Риччи.

Пример вычислений. В данном разделе мы расмотрим пример применения математического и компьютерного моделирования к исследованию оператора Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля, классификация которых была получена в работах [11, 12].

Теорема 1. *Пусть $(G/H, g)$ есть случай "$1.3^1.2$" ($\alpha_{44} \neq 0$, $\alpha_{23} \neq 0$, $\lambda \neq 0$). Тогда оператор ρ может быть оператором Риччи $(G/H, g)$ для некоторой инвариантной метрики тогда и только тогда, когда ρ имеет тип Сегре $\{(22)\}$ с нулевым собственным значением.*

Доказательство. В случае "$1.3^1.2$" скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, имеют вид

$$\begin{aligned} &[e_1, u_3] = u_1, && [e_1, u_4] = u_2, \\ &[u_1, u_3] = -\lambda e_1 + (\lambda + 1) u_1 + \lambda u_2, && [u_2, u_4] = u_2, \end{aligned}$$

где $\lambda \neq 0$. Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии задается равенствами

$$\langle u_2, u_3 \rangle = -\langle u_1, u_4 \rangle = \alpha_{23},\ \langle u_3, u_3 \rangle = \alpha_{33},$$
$$\langle u_3, u_4 \rangle = \alpha_{34},\ \langle u_4, u_4 \rangle = \alpha_{44},$$

где $\alpha_{44} \neq 0$, $\alpha_{23} \neq 0$.

Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k,$$
$$[e_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров. Компоненты связности Леви-Чивита выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}\right),$$
$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl},$$

где $\left\{g^{ij}\right\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Вычислим оператор Риччи с помощью формулы

$$\rho_k^i = \left(\Gamma_{tk}^l \Gamma_{pl}^p - \Gamma_{pk}^l \Gamma_{tl}^p + c_{tp}^l \Gamma_{lk}^p + C_{tp}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p\right) g^{ti}.$$

В данном базисе оператор Риччи имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{2\alpha_{23}} & \frac{1}{2\alpha_{23}} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2+1}{2\alpha_{23}} & \frac{\lambda+1}{2\alpha_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\lambda \neq 0$, то оператор Риччи имеет следующую жорданову форму:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $(G/H, g)$ есть случай "$1.4^1.2$" ($\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$, $p \neq 3$). Тогда оператор ρ может быть оператором Риччи $(G/H, g)$ для некоторой инвариантной метрики тогда и только тогда, когда*

- *если $p \neq 1$ и $p \neq 5/3$: оператор ρ имеет тип Сегре (22) с ненулевым собственным значением;*
- *если $p = 1$: оператор ρ имеет тип Сегре (22) с нулевым собственным значением.*
- *если $p = 5/3$: оператор ρ имеет тип Сегре (1111) с ненулевым собственным значением.*

Доказательство. В случае "$1.4^1.2$" скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, имеют вид

$$\begin{aligned} &[e_1, u_2] = u_1, && [e_1, u_3] = u_2, \\ &[e_1, u_4] = e_1, && [u_1, u_4] = p\, u_1, \\ &[u_2, u_4] = (p-1) u_2, && [u_3, u_4] = (p-2) u_3, \end{aligned}$$

где $p \neq 3$. Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии задается равенствами

$$\langle u_2, u_2\rangle = -\langle u_1, u_3\rangle = \alpha_{22},\ \langle u_3, u_3\rangle = \alpha_{33},$$
$$\langle u_3, u_4\rangle = \alpha_{34},\ \langle u_4, u_4\rangle = \alpha_{44},$$

где $\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$.

Аналогично доказательству предыдущей теоремы вычислим матрицу оператора Риччи в данном базисе:

$$\rho = \begin{pmatrix} -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}} & 0 & -\frac{\alpha_{33}(3p-5)}{\alpha_{44}\alpha_{22}} & 0 \\ 0 & -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}} \end{pmatrix}.$$

Если $p \neq 5/3$, то оператор Риччи имеет следующую жорданову форму:

$$\rho = \begin{pmatrix} -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3(p-1)^2}{\alpha_{44}} \end{pmatrix},$$

где элементы на диагонали могут принимать любые значения, но равны нулю лишь при $p = 1$.

Если $p = 5/3$, то оператор Риччи имеет следующую жорданову форму:

$$\rho = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\alpha_{44}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3\alpha_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3\alpha_{44}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3\alpha_{44}} \end{pmatrix},$$

где элементы на диагонали могут принимать любые ненулевые значения.

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $(G/H, g)$ есть случай "$2.2^1.4$" ($\alpha_{23} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$). Тогда оператор ρ может быть оператором Риччи $(G/H, g)$ для некоторой инвариантной метрики тогда и только тогда, когда ρ имеет тип Сегре $\{(22)\}$ с нулевым собственным значением.*

Доказательство. В случае "$2.2^1.4$" скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, имеют вид

$$\begin{aligned} &[e_1, u_1] = u_1, && [e_1, u_2] = u_2, \\ &[e_1, u_3] = -u_3, && [e_1, u_4] = -u_4, \\ &[e_2, u_2] = u_1, && [e_2, u_3] = -u_4, \\ &[u_1, u_3] = e_2, && [u_2, u_3] = e_1, \\ &[u_2, u_4] = e_2. && \end{aligned}$$

Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии задается равенствами

$$\langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_4\rangle = \alpha_{24},\ \langle u_2, u_3\rangle = \alpha_{23},$$

где $\alpha_{23} \neq 0$.

Аналогично доказательству теоремы 1 вычислим матрицу оператора Риччи в данном базисе:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\alpha_{24}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\alpha_{24}} & 0 \end{pmatrix}.$$

При любых значениях α_{24} оператор Риччи имеет жорданову форму:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $(G/H, g)$ есть случай "$2.5^2.2$" ($\alpha_{44} \neq 0$, $s \neq 0$). Тогда оператор ρ может быть оператором Риччи $(G/H, g)$ для некоторой инвариантной метрики тогда и только тогда, когда*

- *если $r^2 + p \neq 0$: оператор ρ имеет тип Сегре (22) с нулевым собственным значением;*
- *если $r^2 + p = 0$: оператор ρ имеет тип Сегре (1111) с нулевым собственным значением.*

Доказательство. В случае "$2.5^2.2$" скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, имеют вид

$$[e_1, u_2] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_2,$$
$$[e_2, u_3] = u_4, \quad [e_2, u_4] = -u_1,$$
$$[u_1, u_3] = u_1, \quad [u_2, u_4] = 2r\, u_1,$$
$$[u_2, u_3] = (p+s)e_1 + r\, e_2 + u_2 - 2r\, u_4,$$
$$[u_3, u_4] = -r\, e_1 + (p-s)e_2 - 2r\, u_2 - u_4.$$

Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии задается равенствами

$$\langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_4, u_4\rangle = \alpha_{44},$$
$$\langle u_3, u_3\rangle = \alpha_{33},$$

где $\alpha_{44} \neq 0$.

Аналогично доказательству теоремы 1 вычислим матрицу оператора Риччи в данном базисе:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2(r^2+p)}{\alpha_{44}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $r^2 + p \neq 0$, то оператор Риччи имеет следующую жорданову форму:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $r^2 + p$, то оператор Риччи тривиален, а значит, имеет тип Сегре $\{(1111)\}$ с нулевым собственным значением.

Таким образом, теорема доказана.

Заключение. Отметим, что рассмотренный в статье пример можно обобщить для остальных случаев четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля.

Библиографический список

1. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3–manifolds // Geom. Dedicata. 1996. No. 1. DOI: 10.1007/BF00240002.

2. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3–manifolds // Cent. Eur. J. Math. 2009. Vol. 7(1). DOI: 10.2478/s11533-008-0061-5.

3. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. 2013. Т. 450, № 3. DOI: 10.7868/S0869565213140077.

4. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О вычислении спектра оператора кривизны конформно (полу)плоских римановых метрик // Известия АлтГУ. 2013. № 1–2(77). DOI: 10.14258/izvasu(2013)1.2-04.

5. Клепикова С.В., Хромова О.П. Об операторе секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Известия АлтГУ. 2017. № 1(93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-17.

6. Клепиков П.Н. О допустимых значениях спектра оператора одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Сборник трудов всероссийской конференции «Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники». Барнаул, 2015.

7. Kowalski O. Nonhomogeneous Riemannian 3–manifolds with distinct constant Ricci eigenvalues // Nagoya Math. J. 1993. Vol. 132.

8. Bueken P. On curvature homogeneous three–dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. 1997. Vol. 22.

9. Calvaruso G. Pseudo–Riemannian 3–manifolds with prescribed distinct constant Ricci eigenvalues // Diff. Geom. Appl. 2008. Vol. 26. DOI: 10.1016/j.difgeo.2007.11.031.

10. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous Lorentzian metrics with prescribed Ricci tensor // Journal of Mathematical Physics. 2007. Vol. 48. DOI: 10.1063/1.2825176.

11. Клепикова С.В., Хромова О.П. Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля // Известия Алт. ун-та. 2018. № 1(99). DOI: 10.14258/izvasu(2018)1-17.

12. Клепикова С.В. Изотропный тензор Вейля на четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразиях // Известия Алт. ун-та. 2019. № 1(105). DOI: 10.14258/izvasu(2019)1-13.