УДК 519.63+536

О глобальной разрешимости задачи о движении вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде

М.А. Токарева

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On Global Solvability of a Problem of a Viscous Liquid Motion in a Deformable Viscous Porous Medium

M.A. Tokareva

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается начально-краевая задача для системы одномерного движения вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде. Во введении проанализированы актуальность теоретического исследования данной задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, обзор публикаций по данной тематике. В первом пункте приведен вывод модели и постановка задачи. В пункте 2 рассмотрен случай движения вязкой сжимаемой жидкости в пороупругой среде, доказана локальная теорема существования и единственности задачи. В случае несжимаемой жидкости теорема глобальной разрешимости во времени доказана в гельдеровских классах в пункте 3. В пункте 4 дан алгоритм численного решения задачи. Актуальность теоретического исследования задач фильтрации в пористых средах связана с их широким применением в решении важных практических задач. Примерами являются: фильтрация вблизи речных плотин, водохранилищ и других гидротехнических сооружений; ирригация и дренаж сельскохозяйственных полей; нефтегазодобыча, в частности, динамика трещины гидроразрыва пласта, проблемы дегазации угольных и сланцевых месторождений с целью извлечения метана; движение магмы в земной коре; геотектоника при исследовании проседания земной коры; процессы, происходящие в осадочных бассейнах, и т.д. Особенностью рассматриваемой в данной работе модели фильтрации жидкости в пористой среде является учет подвижности твердого скелета и его пороупругих свойств.

Ключевые слова: закон Дарси, пороупругость, фильтрация, глобальная разрешимость, пористость.

DOI 10.14258/izvasu(2020)1-23

The initial-boundary value problem for the system of one-dimensional motion of viscous liquid in a deformable viscous porous medium is considered. The introduction presents the relevance of a theoretical study of this problem, scientific novelty, theoretical and practical significance, methodology and research methods, a review of publications on this topic. The first paragraph shows the conclusion of the model and the statement of the problem. In paragraph 2, we consider the case of motion of a viscous compressible fluid in a poroelastic medium and prove the local theorem on the existence and uniqueness of the problem. In the case of an incompressible fluid, the global solvability theorem is proved in the Holder classes in paragraph 3. In paragraph 4, an algorithm for the numerical solution of the problem is given. Mathematical models of fluid filtration in a porous medium apply to a broad range of practical problems. The examples include but are not limited to filtration near river dams, irrigation, and drainage of agricultural fields, oil and gas production, in particular, the dynamics of hydraulic fractures, problems of degassing coal and shale deposits in order to extract methane; magma movement in the earth's crust, geotectonics in the study of subsidence of the earth's crust, processes occurring in sedimentary basins, etc. A feature of the model of fluid filtration in a porous medium considered in this paper is the inclusion of the mobility of the solid skeleton and its poroelastic properties.

Key words: Darcys law, poroelasticity, filtration, global solvability, porosity.

Введение. Процессам фильтрации жидкости в пористых средах посвящена обширная литература (см. [1], [2] и приведенные там ссылки). Параметры, входящие в определяющие уравнения, существенным образом зависят как от свойств флюидов, так и вмещающей среды. Поэтому в настоящее время существует множество различных моделей пористых сред. Однако в большинстве из них принимается, что твердый пористый скелет неподвижен, т.е. пористость является заданной функцией. Тем самым они могут быть отнесены к теории фильтрации Маскета-Леверетта [3]. В случае двухфазного движения несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде математическая теория процесса построена в работах С.Н. Антонцева, В.Н. Монахова [3], численным исследованиям посвящено большое число работ в (см. например [5]).

Концепция Терцаги эффективного напряжения для одномерной модели деформации пористой среды является одним из первых инструментов построения моделей пороупругих сред, в которых учитываются подвижность скелета и его пороупругие свойства. В данном подходе эффективное напряжение определяется как разница между общим напряжением и давлением жидкой фазы [6]. Это положение отражает тот факт, что жидкость несет на себе часть нагрузки. В этом подходе основополагающей является связь между деформацией скелета твердой матрицы и процессами течения жидкости. В дальнейшем теория Терцаги была развита Био [7], который представил совместную модель деформирования насыщенной флюидом пористой среды и явился основоположником теории пороупругости. Практически одновременно и независимо близкая теория была развита Френкелем [8]. Позднее аналогичные модели были предложены в работах В.Н. Николаевского, П.П. Золотарева и Х.А. Рахматуллина [9, 10, 11].

В работе [12] пористость зависела от давления (но деформация пористого скелета не рассматривалась). В работе [13] предложена модель двухфазной фильтрации в деформируемой пористой среде, в которой движение твердого скелета описывалось на основе аналога принципа Терцаги и модифицированного линейного закона Гука. Вопросы обоснования в этой работе не рассматривались. Это было сделано в работах [14, 15], где были построены частные решения.

Все эти модели являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении их использования для решения конкретных прикладных задач. На сегодняшний день существуют единичные работы, посвященные обоснованию моделей фильтрации в деформируемых пористых средах. Выполненные в этом направлении математические работы основаны, как правило, на классической теории фильтрации, а вопросы обоснования исследованы только в отдельных модельных случаях. Строгие математические результаты в области фильтрации в деформируемых пористых средах представлены только в нескольких работах, посвященных проблемам существования и единственности решений таких задач. Так, например, в работах [16, 17, 18] на основе ряда упрощающих предположений исходные системы сводились к одному уравнению высокого порядка. В [18] установлена локальная разрешимость задачи Коши в пространствах С.Л. Соболева. В работах [16, 17] исследованы решения типа «простой волны». Численные исследования такого рода задач проведены, например, в [19].

1. Постановка задачи. Для каждой составляющей двухфазной среды (скелета s и содержащейся в ней жидкой фазы f) вводятся понятия объемов твердого скелета V_s и пор V_p. Тогда удельный объем пор (пористость, доля объема среды, приходящаяся на пустоты) $\phi = \frac{V_p}{V_t}$, где общий объем $V_t = V_p + V_s$.

Скорость Дарси (удельный расход на единицу площади поверхности) определяется следующей формулой: $\vec{q}_D = \phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s)$, где $\vec{v}_f, \vec{v}_s$ — скорости жидкости и скелета соответственно [20].

Закон сохранения массы для жидкости и твердой фазы в отсутствие фазовых переходов выглядит следующим образом [21]:

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \bigtriangledown\cdot(\rho_f\phi\vec{v}_f) = 0,$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \bigtriangledown\cdot((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0,$$

где t — время, ρ_f — плотность жидкости, ρ_s — плотность твердой фазы, $\bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ — оператор градиента, (x_1, x_2, x_3) — переменные Эйлера.

Закон сохранения массы можно записать в терминах материальной производной ($\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\bigtriangledown$). Откуда для жидкости получим

$$\frac{d\rho_f\phi}{dt} = -\bigtriangledown\cdot(\rho_f(\vec{q}_D + \phi\vec{v}_s).$$

При движении жидкости в деформируемой среде постулируется [21, 22]:

1. девиатором тензора напряжения в жидкой фазе пренебрегают ($S_f = 0$), потому что вязкость жидкости много меньше, чем сдвиговая вязкость скелета;

2. общий тензор напряжения σ определяется через тензор напряжения твердой фазы σ_s и жидкой σ_f по правилу: $\sigma = (1-\phi)\sigma_s + \phi\sigma_f = (1-\phi)(S_s - p_sI) - \phi p_f I$, а полное (общее) давление есть $p_{tot} = (1-\phi)p_s + \phi p_f$, где σ_s, p_s — соответственно тензор напряжения и давление твердой фазы, $S_s = 2\eta\dot{\varepsilon}_D$ — девиатор тензора напряжений, $\dot{\varepsilon}_D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_s}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial \vec{x}}\right)^*\right)$ — тензор скоростей деформации, η — динамическая вязкость твердой фазы, σ_f, p_f — тензор напряжения и давление жидкой фазы.

В соответствии с принципом Терцаги [6] деформация двухфазной среды определяется через эффективное напряжение $\sigma_e = \sigma + p_f I$. Тогда в случае полного насыщения среды динамическое эффективное давление $p_e = p_{tot} - p_f$ [23].

Заметим, что

$$d\phi = \frac{dV_p}{V_t} - V_p\frac{dV_t}{V_t^2} = \frac{dV_p}{V_t} - \phi\frac{dV_t}{V_t}. \qquad (1)$$

Если плотность ρ_s твердой фазы постоянна, то $dV_s = 0$ и $dV_t = dV_p$. Из уравнения (1) получим

$$d\phi = (1-\phi)\frac{dV_t}{V_t}. \qquad (2)$$

В работе [24] было использовано предположение, что пористость является функцией эффективного давления $\phi = \phi(p_e)$, в частности: $\phi = \phi_0 \exp\{-bp_e\}$. В подходе, используемом в [24], объемная сжимаемость двухфазной среды β_t определяется как относительное суммарное изменение объема, реагирующее на изменение приложенного эффективного динамического давления: $\beta_t = -\frac{1}{V_t}(\frac{\partial V_t}{\partial p_e})$. Уравнение (2) в этом случае примет вид $d\phi = -(1-\phi)\beta_t dp_e$. Объемная сжимаемость также является функцией пористости, например [25]: $\beta_t(\phi) = \phi^b\beta_\phi$, где β_ϕ — коэффициент сжимаемости, b — положительная постоянная $\beta_\phi = -1/V_p(\partial V_p/\partial p_e)$. Тогда изменение пористости в случае упругого сжатия может быть записано следующим образом: $1/(1-\phi)d\phi/dt = -\beta_t(\phi)dp_e/dt$ [26]. При этом закон вязкой деформации может быть записан в виде $1/(1-\phi)d\phi/dt = -p_e/\xi$, где ξ — объемная вязкость [27], [28]. Аналогичное соотношение используется при изучении переноса магмы в мантии Земли [29]. Объемная вязкость, как правило, зависит от ϕ, например: $\xi(\phi) = \frac{\eta}{\phi^m}$, где m — положительная постоянная [30].

Таким образом, постулируется реологический закон, объединяющий упругую и вязкую сжимаемость [25, 27]:

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\beta_t(\phi)\frac{dp_e}{dt} - \frac{p_e}{\xi(\phi)}.$$

Уравнение сохранения импульса для жидкости берется в форме закона Дарси $\vec{q}_D = -K \bigtriangledown (P_{ex}/(\rho_f g))$, где K — гидравлическая проводимость (тензор фильтрации), $K = (k'\rho_f g)/\mu$, k', μ — проницаемость и динамическая вязкость жидкости, g — ускорение силы тяжести ($\vec{g} = (0,0,-g)$), P_{ex} — избыточное давление жидкости, определяемое как разность между давлением жидкости и гидростатическим давлением:$P_{ex} = p_f - p_h$ [20], [31]. Отсюда получаем, что

$$\vec{q}_D = -\frac{k'}{\mu}(\bigtriangledown p_f + \rho_f\vec{g}).$$

В некоторых случаях коэффициенты k', β_t, ξ могут быть опытным путем определены несколько иначе. В частности, они могут иметь следующий вид: $\beta_t = \phi^b\beta_\phi, \xi = \eta/\phi^m, k' = k\phi^n$, где k — проницаемость, $b = 1/2, m \in [0,2], n = 3$ [25].

Законы сохранения импульса для каждой из фаз имеют вид [32]:

$$\nabla\cdot(\phi\sigma_f) - \rho_f\phi\vec{g} + M = 0,$$

$$\nabla\cdot((1-\phi)\sigma_s) - \rho_s(1-\phi)\vec{g} - M = 0,$$

где M — межфазный обмен импульсом.

Складывая эти уравнения, получим уравнение сохранения импульса системы «твердая матрица — поровая жидкость» [26, 21, 22], а именно: уравнение несжимаемой деформации твердого скелета с учетом влияния порового давления жидкости: $\nabla\cdot\sigma + \rho_{tot}\vec{g} = 0$, где $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f$ — средняя плотность среды.

В развернутой форме предыдущее уравнение принимает вид [32]:

$$\rho_{tot}\vec{g} + div\left((1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}} + (\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}})^*\right)\right) - \nabla p_{tot} = 0.$$

В некоторых прикладных задачах уравнение баланса сил используется в виде $\nabla p_{tot} - \rho_{tot}\vec{g} = 0$ [21, 32].

Таким образом, уравнения модели при отсутствии фазовых переходов имеют вид [21, 22, 25, 32]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{v_s}) = 0,\\ \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + div(\rho_f\phi\vec{v_f}) = 0,\end{gathered} \qquad (3)$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \qquad (4)$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\nabla p_e), \qquad (5)$$

$$\nabla\cdot\sigma + \rho_{tot}\vec{g} = 0, \quad \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s, \qquad (6)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, p_e = (1-\phi)(p_s - p_f). \qquad (7)$$

Данная квазилинейная система составного типа описывает пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой среде. Здесь $k(\phi)$, $a_1(\phi), a_2(\phi)$ — параметры пороупругой среды.

Численные исследования различных начально-краевых задач для системы уравнений (3)–(7) проводились в работах [25, 22, 33]. Вопросы обоснования в этих работах не рассматривались. В некоторых частных случаях вопросы обоснования данной модели рассмотрены в [34–37].

Система уравнений, описывающая одномерное нестационарное движение сжимаемой жидкости в вязкой пористой среде в области $(x,t)\in Q_T = \Omega\times(0,T), \Omega = (0,1)$, выглядит следующим образом [32, 22]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0,\\ \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi v_f) = 0,\end{gathered} \qquad (8)$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g), \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e, \quad (10)$$

$$p_e = p_{tot} - p_f, p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = \rho_{tot} g + \frac{\partial p_{tot}}{\partial x}, \quad (11)$$

$$\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s.$$

Задача записана в эйлеровых координатах x, t. Истинная плотность твердой фазы ρ_s считается постоянной, а для жидкости принимается зависимость Клапейрона $p_f = R\rho_f, R = const > 0$. На границе области Ω задаются скорости фаз v_s, v_f, а в начальный момент времени — плотность $\rho_f^0(x)$ и пористость $\phi^0(x)$.

Следуя [3, 38], перепишем систему (8)–(11) в переменных Лагранжа:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f \frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi(v_f - v_s)) = 0, \quad (13)$$

$$\phi(v_s - v_f) = k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g), \quad (14)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \quad (15)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial}{\partial x}\left((1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = \rho_{tot} g + (1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}. \quad (16)$$

Преобразуя исходную систему уравнений (12)–(16), получаем систему для нахождения пористости и плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\phi)\rho_f) - \frac{\partial}{\partial x}(K(\phi) b(\rho_f)\frac{\partial \rho_f}{\partial x} - \frac{K(\phi)}{1-\phi}\rho_f^2 g) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = p_f(\rho_f) - p^0 + \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi, \quad (18)$$

где

$$a(\phi) = \frac{\phi}{1-\phi}, K(\phi) = k(\phi)(1-\phi), b(\rho_f) = \rho_f \frac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial \rho_f},$$

$$p^0 = (\int\limits_0^1 (\frac{1}{(1-\phi)(\xi(\phi)+1-\phi)}(p_f(\rho_f) +$$

$$+ \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi))dx - v_s(1,t) + v_s(0,t))\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-\phi)(\xi(\phi)+1-\phi)} dx\right)^{-1} \equiv P^0(\phi, \rho_f).$$

Функция G определяется следующим образом:

$$\frac{\partial G}{\partial \phi} = 1 + \frac{\xi(\phi)}{1-\phi}.$$

2. Случай сжимаемой жидкости. Для системы (17), (18) начально-краевые условия примут вид

$$\begin{aligned} &((1-\phi)\tfrac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial x} - \rho_f g)\mid_{x=0,x=1} = 0, \\ &\rho_f \mid_{t=0} = \rho^0(x), \quad \phi\mid_{t=0} = \phi^0(x). \end{aligned} \quad (19)$$

В обозначениях функциональных пространств следуем [39].

Теорема 1. Пусть данные задачи (17–19) подчиняются следующим условиям:
1. функции $k(\phi), \xi(\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi \in (0,1), \rho_f > 0$ и удовлетворяют условиям $k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \le k(\phi) \le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4}, 1/\xi(\phi) = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2 - 1}, 0 < R_1 \le a_0(\phi) \le R_2,$ где $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1,2$ – положительные постоянные, $q_1, ..., q_4$ – фиксированные вещественные числа;
2. начальные условия ϕ^0, ρ^0 и функция g удовлетворяют следующим условиям гладкости: $\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \rho^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), g \in C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ и условиям согласования $((1-\phi^0)dp_f(\rho^0)/dx - \rho^0 g(x,0)) \mid_{x=0,x=1} = 0$, а также удовлетворяют неравенствам $0 < m_0 \le \phi^0(x) \le M_0 < 1, x \in \overline{\Omega}, 0 < m_1 \le \rho^0(x) \le M_1 < \infty, 0 < g(x,t) \le g_0 < \infty$, где m_0, M_0, m_1, M_1, g_0 — известные положительные постоянные.
Тогда задача (17)–(19) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение $t_0 \in (0,T)$ такое, что $(\phi(x,t), \rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Более того, $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_{t_0}$.

3. Случай несжимаемых сред. В случае постоянства плотности жидкой фазы ($\rho_f = const$) в безразмерных переменных Лагранжа система уравнений (17)–(18) сводится к одному уравнению для пористости ϕ вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}) = \frac{\partial}{\partial x}(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_{tot} + \rho_f))). \quad (20)$$

Это уравнение дополняется следующими начально-краевыми условиями:

$$\phi|_{t=0} = \phi^0, \quad (21)$$

$$(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_{tot} + \rho_f)))|_{x=0,1} = 0.$$

Теорема 2. Пусть данные задачи (20)–(21) подчиняются следующим условиям:

1. функции $k(\phi), \xi(\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi \in (0,1)$ и удовлетворяют условиям теоремы 1;

2. функция g и начальная функция ϕ^0 удовлетворяют следующим условиям гладкости $g \in C^{1+\alpha,1+\beta}(\bar{Q}_T)$, $\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T)$, а также функции ϕ^0 и g удовлетворяют неравенствам $0 < m_0 \leq \phi^0(x) \leq M_0 < 1, |g(x,t)| \leq g_0 < \infty, x \in \bar{\Omega}$, где m_0, M_0, g_0 — известные положительные константы.

Тогда задача (20)–(21) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение t_0 такое, что $\phi(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\beta}(\bar{Q}_{t_0})$. Более того, $0 < \phi(x,t) < 1$ в $\bar{Q}_{t_0}$.

Теорема 3. Пусть дополнительно к условиям теоремы 2 функции $k(\phi), \xi(\phi)$ удовлетворяют условиям $k(\phi) = k/\mu\phi^n$, $\xi(\phi) = \eta\phi^{-m}, n \geq 1, m \geq 1$, где k, μ, η — положительные постоянные.

Тогда для всех $t \in [0,T]$, $T < \infty$ существует единственное решение задачи (20)–(21), причем существуют числа $0 < m_1 < M_1 < 1$ такие, что $m_1 \leq \phi(x,t) \leq M_1$, $(x,t) \in Q_T$.

Теоремы доказываются с помощью теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке [3], а также с использованием теории параболических и эллиптических уравнений [39].

4. Алгоритм численного решения. Изложенные теоремы служат обоснованием математической модели фильтрации вязкой жидкости в деформируемой пористой вязкой среде и обоснованием численных методов. Алгоритм численного решения следующий: в качестве первого приближения берутся начальные значения плотности и пористости, которые подставляются в уравнение (17). Из этого линейного уравнения находится плотность жидкой фазы, а затем из уравнения состояния для жидкой фазы — давление жидкости. Имея новое значение плотности и начальную пористость, из уравнения (18) находится пористость. Из уравнения (12) находится скорость твердой фазы, а из уравнения (14) — скорость жидкой. Наконец, из уравнения (15) находится давление твердой фазы. Примером численного исследования данной модели в случае отсутствия силы тяжести и девиаторов тензоров напряжений фаз служит работа [40].

Заключение. В работе приведена математическая постановка задачи фильтрации вязкой жидкости в вязкой пороупругой среде, проведено обоснование модели, а также предложен алгоритм нахождения искомых функций для численного решения задачи.

Библиографический список

1. Poromechanics IV: Proceedings of the Fourth Biot Conference on Poromechanics, Including the Second Frank L. DiMaggio Symposium / Edited by: Hoe I. Ling, Andrew Smyth, and Raimondo Betti. 2009.

2. Poromechanics VI : proceedings of the sixth Biot Conference on Poromechanics / Edited by Matthieu Vandamme; Patrick Dangla; Jean-Michel Pereira; and Siavash Ghabezloo. 2017.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.

4. Meirmanov, A. Mathematical Models for Poroelastic Flows, Atlantis Studies in Differential Equations. V. 1. 2014.

5. Коновалов А.Н. О некоторых вопросах, возникающих при численном решении задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 122.

6. Terzaghi K. Theoretical Soil Mechanics. New York, 1943.

7. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. Vol.12. № 2.

8. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. Акад. наук СССР. 1944. Т. VIII, № 4.

9. Золотарев П.П. Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом // Инженерный журнал. 1964. Т. IV.

10. Николаевский В.Н. О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах// Инженерный журнал. 1963. Т. III. Вып. 2.

11. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. XX. Вып. 2.

12. Бочаров О.Б. О фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в сжимаемом пласте // Динамика сплошной среды : сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 50.

13. Vedernikov V.V., Nikolaevskii V.N. Mechanics equations for porous medium saturated by a two-phase liquid // Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza. 1978. № 5.

14. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2014. № 2.

15. Rudyak V.Ya., Bocharov O.B., Seryakov A.V. Hierarchical sequence of models

and deformation peculiarities of porous media saturated with fluids // Proceedings of the XLI Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2013), 1-6 July, St-Petersburg, 2013.

16. Abourabia A.M., Hassan K.M., Morad A.M. Analytical solutions of the magma equations for rocks in a granular matrix // Chaos Solutions Fract. 2009. Vol. 42.

17. Geng Y., Zhang L. Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equation // Applied Mathematics and computation. 2010. Vol. 217.

18. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein M.I. Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics // Nonlinearity. 2007. V. 20. Issue 1.

19. Saad A.S., Saad B., Saad M. Numerical study of compositional compressible degenerate two-phase flow in saturated–unsaturated heterogeneous porous media // Computers and Mathematics with Applications. 2016. Vol. 71. Issue 2.

20. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. New York, 1972.

21. Coussy O. Poromechanics. John Wiley and Sons, Chichester, U.K., 2004.

22. Morency C., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. 2007. Vol. 112.

23. Scempton A.W. Effective stress in soils, concrete and ricks // Proceeding of the Conference on Pore Pressure and Suction in soils. 1960.

24. Athy L.F. Density, porosity, and compaction of sedimentary rocks // Amer. Ass. Petrol. Geol. Bull. 1930. Vol. 14.

25. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y., Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. 1998. Vol. 11.

26. Audet D.M., Fowler A.C. A mathematical for compaction in sedimentary basins // Geophys. J. Int. 1992. Vol. 110.

27. Fowler A.C., Yang X. Pressure solution and viscous compaction in sedimentary basins // J. Geophys. Res. 1999. Vol. 104.

28. Schneider F., Potdevin J.L., Wolf S., Faille I. Mechanical and chemical compaction model for sedimentary basin simulators // Tectonophysics. 1996. Vol. 263.

29. McKenzie D.P. The generation and compaction of partial melts // J. Petrol. 1984. Vol. 25.

30. Birchwood R.A., Turcotte D.L. A unified approach to geopressuring, low-permeability zone formation, and secondary porosity generation in sedimentary basins // J. Geophys. Res. 1994. Vol. 99.

31. Massey B.S. Mechanics of fluids, 6th ed. Chapman and Hall, Boston, Mass, 1989.

32. Fowler A. Mathematical Geoscience. Springer-Verlag London Limited. 2011.

33. Yang X.S. Nonlinear viscoelastic compaction in sedimentary basins // Nonlinear Proceeses in Geophysics. 2000. Vol. 7.

34. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2015. Vol. 8(4).

35. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // Journal of Physics: Conference Series. 2017. T. 894. № 1.

36. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 722.

37. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local Solvability of the System of the Equations of One Dimensional Motion of Magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2017. Vol. 10(3).

38. Papin A.A., Tokareva M.A. Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium //Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2019. Vol. 13(2).

39. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.

40. Koleva M.N., Vulkov L.G. Numerical analysis of one dimensional motion of magma without mass forces // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 366. 1.