УДК 514.765

О секционной кривизне метрических связностей с векторным кручением*

Е.Д. Родионов[1], *В.В. Славский*[2], *О.П. Хромова*[1]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Югорский государственный университет (Ханты-Мансийск, Россия)

On Sectional Curvature of Metric Connection with Vectorial Torsion

E.D. Rodionov[1], *V.V. Slavsky*[2], *O.P. Khromova*[1]

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

Исследованию полусимметрических связностей, или метрических связностей с векторным кручением, на римановых многообразиях посвящены работы многих математиков. Данный тип связностей является одним из трех основных типов, открытых Э. Картаном, и находит приложение в современной физике, геометрии и топологии многообразий. Геодезические линии и тензор кривизны данной связности изучались И. Агриколой, К. Яно, другими математиками. В частности, К. Яно была доказана важная теорема о связи конформных деформаций и метрических связностей с векторным кручением. А именно: риманово многообразие допускает метрическую связность с векторным кручением, тензор кривизны которой равен нулю тогда и только тогда, когда оно является конформно плоским. Хотя тензор кривизны полусимметрической связности обладает меньшим числом симметрий по сравнению со связностью Леви-Чивиты, однако все еще можно определить понятие секционной кривизны в этом случае. Естественно, возникает вопрос об отличии секционной кривизны полусимметрической связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты.

Данная работа посвящена исследованию этого вопроса, авторы находят необходимые и достаточные условия для совпадения секционной кривизны полусимметрической связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты. Построены нетривиальные примеры полусимметрических связностей, когда это возможно.

Ключевые слова: секционная кривизна, метрическая связность, векторное кручение.

Papers of many mathematicians are devoted to the study of semisymmetric connections or metric connections with vector torsion on Riemannian manifolds. This type of connectivity is one of the three main types discovered by E. Cartan and finds its application in modern physics, geometry, and topology of manifolds. Geodesic lines and the curvature tensor of a given connection were studied by I. Agricola, K. Yano, and other mathematicians. In particular, K. Yano proved an important theorem on the connection of conformal deformations and metric connections with vector torsion. Namely: a Riemannian manifold admits a metric connection with vector torsion and the curvature tensor being equal to zero if and only if it is conformally flat. Although the curvature tensor of a hemisymmetric connection has a smaller number of symmetries compared to the Levi-Civita connection, it is still possible to define the concept of sectional curvature in this case. The question naturally arises about the difference between the sectional curvature of a semisymmetric connection and the sectional curvature of a Levi-Civita connection.

This paper is devoted to the study of this issue, and the authors find the necessary and sufficient conditions for the sectional curvature of the semisymmetric connection to coincide with the sectional curvature of the Levi-Civita connection. Non-trivial examples of hemisymmetric connections are constructed when possible.

Key words: sectional curvature, metric connection, vectorial torsion.

DOI 10.14258/izvasu(2020)1-21

1. Введение. Метрические связности с векторным кручением (или полусимметрические связности) являеются одним из трех основных типов, открытых Э. Картаном [1], и находит приложение в современной физике, геометрии и топологии многообразий [2–6]). В частности,

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

К. Яно установлено, что риманово многообразие допускает метрическую связность с векторным кручением, тензор кривизны которой равен нулю тогда и только тогда, когда оно является конформно плоским [7]. И. Агрикола исследовала вопрос о поведении геодезических линий полусимметрических связностей при конформных деформациях исходной римановой метрики [4, 8].

Хотя тензор кривизны полусимметрической связности обладает меньшим числом симметрий по сравнению со связностью Леви-Чивиты (римановой связностью), однако все еще можно определить понятие секционной кривизны в этом случае [9–11]. Естественно, возникает вопрос об отличии секционной кривизны полусимметрической связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия для совпадения секционной кривизны полусимметрической связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты. Построены нетривиальные примеры полусимметрических связностей, когда это возможно. Кроме того, приведена математическая модель, позволяющая вычислять секционную кривизну метрической связности с векторным кручением через секционную кривизну связности Леви-Чивиты в случае локально однородных (псевдо)римановых многообразий.

2. Метрические связности. Пусть (псевдо)риманово многообразие (M, g) допускает линейную связность ∇. Определим на M тензор кривизны $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ и положим $R(X,Y,Z,U) = g(R(X,Y)Z,U)$ для любых векторных полей X, Y, Z, U на M. Напомним, что тензор кривизны обладает следующими симметриями:

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z \qquad (1)$$

для любой линейной связности, и

$$R(X,Y,Z,U) = -R(X,Y,U,Z) \qquad (2)$$

для любой метрической связности, т.е. для связности, удовлетворяющей условию $\nabla g = 0$.

Определим на M секционную кривизну в направлении линейно независимых векторов X и Y

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2}. \qquad (3)$$

Покажем, что данное определение корректно для любой метрической связности.

Пусть α, β, λ, $\mu \in \mathbb{R}$. В силу линейности тензора кривизны выполняется: $R(\alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y, \alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) = \alpha\lambda R(X, X, \alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) + \alpha\mu R(X, Y, \alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) + \beta\lambda R(Y, X, \alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) + \beta\mu R(Y, Y, \alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y)$. Исходя из (1), первое и последнее слагаемое в данной сумме тривиальны. Далее, используя линейность тензора кривизны, заключаем $R(\alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y, \alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) = \alpha^2\lambda\mu R(X,Y,X,X) + \alpha^2\mu^2 R(X,Y,X,Y) + \alpha\beta\lambda\mu R(X,Y,Y,X) + \alpha\beta\mu^2 R(X,Y,Y,Y) + \alpha\beta\lambda^2 R(Y,X,X,X) + \alpha\beta\lambda\mu R(Y,X,X,Y) + \beta^2\lambda^2 R(Y,X,Y,X) + \beta^2\lambda\mu R(Y,X,Y,Y)$. Принимая во внимание (2), имеем $R(\alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y, \alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) = (\alpha^2\mu^2 - \alpha\beta\lambda\mu) R(X,Y,X,Y) + (\alpha\beta\lambda\mu - \beta^2\lambda^2) R(Y,X,X,Y)$. Отсюда, применяя (1), получаем $R(\alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y, \alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) = (\alpha\mu - \beta\lambda)^2 R(X,Y,X,Y)$.

Нетрудно проверить, что $g(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) g(\lambda X + \mu Y, \lambda X + \mu Y) - (g(\alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y))^2 = (\alpha\mu - \beta\lambda)^2 (g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2)$.

Таким образом, $K(\alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) = \frac{R(\alpha X+\beta Y, \lambda X+\mu Y, \alpha X+\beta Y, \lambda X+\mu Y)}{g(\alpha X+\beta Y, \alpha X+\beta Y) g(\lambda X+\mu Y, \lambda X+\mu Y) - (g(\alpha X+\beta Y, \lambda X+\mu Y))^2} = \frac{(\alpha\mu-\beta\lambda)^2 R(X,Y,X,Y)}{(\alpha\mu-\beta\lambda)^2 (g(X,X)g(Y,Y)-(g(X,Y))^2)} = K(X,Y)$, что доказывает корректность определения (3).

3. Связности с векторным кручением. Пусть (псевдо)риманово многообразие (M, g) допускает метрическую связность ∇ с векторным кручением, т.е. связность вида

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \qquad (4)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивита на M.

Замечание 1. *Связности с векторным кручением также называют полусимметрическими связностями (с точностью до направления V).*

Замечание 2. *Поскольку связность (4) является метрической, то определение (3), как было замечено выше, для нее корректно.*

Нетрудно проверить (см. подробнее [8]), что тензор кривизны связности (4) определяется формулой:
$R(X,Y)Z = R^g(X,Y)Z + g(X,Z)\nabla^g_Y V - g(Y,Z)\nabla^g_X V + (g(Y,Z)|V|^2 - g(\nabla^g_Y V, Z) - g(V,Y)g(V,Z))X - (g(X,Z)|V|^2 - g(\nabla^g_X V, Z) - g(V,X)g(V,Z))Y + (g(Y,V)g(X,Z) - g(X,V)g(Y,Z))V$, где $R^g(X,Y)Z$ — тензор кривизны связности Леви-Чивита, $|V|^2 = g(V,V)$.

Тогда для секционной кривизны (3) будет выполнено

$$K(X,Y) = K^g(X,Y) + \frac{\alpha(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2}, \qquad (5)$$

где $K^g(X,Y)$ — секционная кривизна относительно связности Леви-Чивита, и

$\alpha(X,Y,X,Y) = |X|^2 g(\nabla^g_Y V,Y) + |Y|^2 g(\nabla^g_X V,X) - -g(X,Y)[g(\nabla^g_X V,Y) + g(\nabla^g_Y V,X)] + |V|^2[g(X,Y)^2 - |X|^2|Y|^2] + |X|^2 g(V,Y)^2 - 2g(X,Y)g(V,X)g(V,Y) + |Y|^2 g(V,X)^2$.

Ясно, что совпадение кривизн $K(X,Y) = K^g(X,Y)$ равносильно условию

$$\alpha(X,Y,X,Y) = 0. \tag{6}$$

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — локальный базис, и $X = x^i e_i$, $Y = y^j e_j$, $V = v^k e_k$, $\alpha(e_i,e_j,e_k,e_t) = \alpha_{ij}$, $g(e_i,e_j) = g_{ij}$, $\nabla^g_{e_i} e_j = (\Gamma^g)^k_{ij}\, e_k$, где $(\Gamma^g)^k_{ij}\, e_k$ — символы Кристоффеля 2 рода связности Леви-Чивита ∇^g, и $i,j,k,t = 1,2,\ldots,n$. Тогда (6) примет вид:

$0 = x^i x^r y^j y^s \alpha_{ijrs} = x^i x^r y^j y^s v^k \{(\Gamma^g)^p_{jk}\, g_{ir} g_{ps} + (\Gamma^g)^p_{ik}\, g_{js} g_{pr}] - g_{ir}[(\Gamma^g)^p_{rk}\, g_{ps} + (\Gamma^g)^p_{sk}\, g_{pr}] + +v^l(g_{kl}[g_{ij}g_{rs} - g_{ir}g_{js}] + [g_{ir}g_{jk}g_{sl} - 2g_{ij}g_{kr}g_{sl} + g_{js}g_{ik}g_{rl})\}$.

Данное равенство имеет место в двух очевидных случаях.

1) $v^k = 0$, что соответствует тривиальности векторного поля V, определяющего связность с векторным кручением. И как следствие влечет совпадение связностей ∇ и ∇^g. Этот случай не представляет интереса.

2) Это обнуление выражения, стоящего в фигурных скобках, т.е. выполнение равенства вида

$$\begin{gathered}(\Gamma^g)^p_{jk}\, g_{ir} g_{ps} + (\Gamma^g)^p_{ik}\, g_{js} g_{pr}] - g_{ir}[(\Gamma^g)^p_{rk}\, g_{ps} + \\ + (\Gamma^g)^p_{sk}\, g_{pr}] + v^l(g_{kl}[g_{ij}g_{rs} - g_{ir}g_{js}]) + \\ +v^l([g_{ir}g_{jk}g_{sl} - 2g_{ij}g_{kr}g_{sl} + g_{js}g_{ik}g_{rl}) = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

4. Пример. Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинваринтной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируем базис $e_1, \ldots, e_n$ левоинваринтных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k, \quad g(e_i,e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c^k_{ij} g_{ks},$$

где c^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Компоненты связности Леви-Чивита ∇^g выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$(\Gamma^g)^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(c_{ijs} - c_{jsi} + c_{sij}\right),$$

где $\nabla^g_{e_i} e_j = (\Gamma^g)^k_{ij}\, e_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Таким образом, зная структурные константы алгебры Ли группы G и компоненты метрического тензора, мы можем решать систему (7) относительно компонент векторного поля V, определяющего связность ∇.

Пусть далее $n = 3$. Соответствующая классификация трехмерных групп Ли получена Дж. Милнором в [12]. Если G — унимодулярная группа Ли, то система равенств (7) не имеет нетривиальных решений.

Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\langle \cdot, \cdot)\rangle$ — скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует положительно ориентированный ортонормированный базис $\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ такой, что [12]:

$$\begin{gathered}[e_1, e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2,\, [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta\, e_3, \\ [e_2, e_3] = 0,\end{gathered}$$

где $\alpha + \delta = 2$.

Используя указанный базис, записываем систему (7):

$$\begin{gathered}\alpha v^1 + (v^3)^2 = 0, \\ \delta v^1 + (v^2)^2 = 0, \\ (\alpha + \delta + v^1)v^1 = 0\end{gathered}$$

и находим ее решение, отличное от тривиального:

$$V = \{-2, \pm\sqrt{2\delta}, \pm\sqrt{4 - 2\delta}\},$$

где $\delta \in [0,2]$ — структурная константа неунимодулярной алгебры Ли G.

Полученное векторное поле V определяет метрическую связность с векторным кручением, для которой секционная кривизна совпадает с секционной кривизной относительно связности Леви-Чивита, т.е. имеет место

$$K(X,Y) = K^g(X,Y), \text{ но } \nabla_X Y \neq \nabla^g_X Y.$$

5. Заключение. В результате проведенных исследований найдены нетривиальные условия для совпадения секционных кривизн относительно связностей с векторным кручением и Леви-Чивита в случае однородных пространств. Кроме того, получена метрическая связность с векторным кручением, отличная от связности Леви-Чивита, для которой секционная кривизна совпадает с секционной кривизной относительно связности Леви-Чивита.

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. Vol. 42.

2. Schouten J.A. Ricci-Calculus.An introdustion to tensor analisis and geometrical Application Springer-Verlag. Berlin-Cöttingen-Heidelberg, 1954.

3. Ivanov S., Parton M., Piccinni P. Loccaly conformal parallel G_2- and $Spin(7)$-structures // Math. Res. Lett. 2006. Vol. 13.

4. Agricola I. The Srni lectures on non-integable geometries with torsion // Arch. Math. 2006. Vol. 42.

5. Галаев С.В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Сарат. ун-та. 2015. Т. 15. Вып. 3.

6. Паньженский В.И, Климова Т.Р. Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга // Изв. вузов. Матем. 2018. № 11.

7. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. 1970. Vol. 15.

8. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 46.

9. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. 1985. Vol. 16, No 7.

10. De U. C., De B. K. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold // Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. 1995. Vol. 54.

11. Manuraj D. Manifolds Admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Shur's theorem // Int. J. Contemp. Math. Scientes. 2018. Vol. 3, No 25.

12. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups. // Advances in mathematics. 1976. V. 21.