УДК 514.172

# Центральная симметрия звездных плоских тел

*И.В. Поликанова*

Алтайский государственный педагогический университет (Барнаул, Россия)

# Central Symmetry of Star-Shaped Flat Bodies

*I.V. Polikanova*

Altai State Pedagogical University (Barnaul, Russia)

Известные критерии центральной симметричности сформулированы для выпуклых тел. Наше исследование относится к более широкому классу звездных тел, но ограничено размерностью 2.

В статье вводятся понятия сектора и сегмента плоского звездного тела.

Основной результат. Пусть плоское тело *K* звездно относительно своей внутренней точки *o*. На множестве секторов и сегментов тела *K* задан просто-аддитивный, монотонный, инвариантный относительно центральной симметрии с центром *o* функционал *F*. Тело *K* центрально-симметрично относительно центра о тогда и только тогда, когда всякая проходящая через точку *o* хорда делит *K* на 2 сектора с равными значениями функционала *F* на них.

Метод доказательства — «от противного».

Рассматривая в качестве таких функционалов величины, имеющие геометрический смысл (центральные геометрические моменты, площадь), получаем как новые, так и известные (для площади) утверждения для плоских выпуклых тел. Небольшое видоизменение доказательства позволяет получить аналогичное утверждение и для периметра (аддитивного, но не просто аддитивного функционала на множестве выпуклых плоских тел): плоское выпуклое тело центрально симметрично тогда и только тогда, когда все хорды, делящие пополам периметр, проходят через одну точку.

***Ключевые слова:*** центральная симметрия, площадь, периметр, центральные моменты плоского множества, звездное множество, выпуклое тело.

**DOI 10.14258/izvasu(2020)1-20**

Well-known criteria for the central symmetry are formulated for convex bodies. This study relates to a broader class of star-shaped bodies but is limited by the dimension of 2. The paper introduces the concepts of a sector and a segment of a flat star-shaped body.

The basic result is the following. Let a flat body *K* be star-shaped with respect to its interior point *o*. On the set of sectors and segments of *K*, a simply additive, monotonic, and invariant with respect to central symmetry with the center o functional *F* is given. The body *K* is centrally symmetric with respect to the center o if and only if every chord passing through the point *o* divides K into two sectors with equal values of the functional *F*.

The method of proof is — "on the contrary".

When considering quantities having geometric meaning (central geometric moments, area) as such functionals, we get both new and known (for an area) statements for flat convex bodies. A slight modification of the proof allows us to obtain a similar statement for the perimeter (an additive functional, but simply not an additive functional on the set of convex flat bodies): flat convex body has its central symmetry if and only if all the chords, dividing the perimeter into halves, pass through one point.

***Key words***: central symmetry, area, perimeter, central moments of a flat set, star-shaped set, convex body.

**1. Введение.** Множество $K$ *центрально симметрично относительно точки* $o$ (*центра симметрии*), если образ его $Z_o(K)$ при центральной симметрии $Z_o$ с центром $o$ совпадает с $K$.

Известны критерии центральной симметричности выпуклых тел в n-мерном евклидовом пространстве $E^n$, обусловленной:

1) центральной симметричностью следов тела на плоскостях разных размерностей: а) в виде ортогональных проекций на плоскости фиксированной размерности $2 \leq k \leq n$ [1-5]; б) в виде пересечений с этими плоскостями [2];

2) центральной симметричностью $\varepsilon$- окрестности выпуклого тела при фиксированном $\varepsilon$ [5];

3) свойством тела содержать вместе с каждым трехточечным подмножеством и симметричное ему подмножество относительно некоторого центра [5];

4) свойством тела содержаться в центрально-симметричном множестве по отношению ко всякому множеству некоторого класса, содержащего данное выпуклое тело ($n$-мерного симплекса [4], призмы, построенной над симплексом [6]).

Ряд критериев центральной симметричности, определяемой посредством «мер симметрии», суммированы в обзоре Б. Грюнбаума [7]. Все они относятся к выпуклым телам.

Цель данного исследования — получить некоторые критерии центральной симметричности звездных множеств.

Звездные и симметричные относительно одной и той же точки плоские тела оказываются важными при изучении задач достижимости гарантированного оценивания и синтеза управлений для класса билинейных по состоянию и управлению систем [8]. Нам представляется, что установленный критерий симметричности согласуется с результатами П.С. Новикова об единственности решения обратной задачи потенциала [9, 10]. К данной теме примыкают и исследования А. Канете и С. Сегура Гомес о минимизации функционала, определенного как максимум диаметров двух множеств, получающихся при разбиении плоского компактного центрально-симметричного множества хордой на 2 части. Показана множественность решений, однако минимизация всегда достигается на разбиениях хордами, проходящими через центр симметрии [11–12].

**2. Функционалы на множестве $\Omega_o$.** Уточним основные понятия и условимся относительно обозначений.

Под *телом* понимаем компактное множество в $E^n$ с непустой внутренностью. Тела в евклидовой плоскости $E^2$ будем называть *плоскими.* В дальнейшем будем рассматривать плоские тела.

Используем *обозначения* $intK$, $clK$, $\partial K$ для внутренности, замыкания и границы множества $K$ в топологии, порожденной евклидовой метрикой. Символы $\cup$, $\cap$, $\setminus$ обозначают объединение, пересечение и разность множеств.

Множество $K$ называется *звездным относительно точки $o$* (*центра звездности*), если вместе с каждой своей точкой $x$ оно содержит и отрезок $[ox]$ [8]. Из определения следует, что $o \in K$, и всякий исходящий из точки $o$ луч пересекает $K$ по связному множеству: точке, отрезку или лучу.

**Замечание 1.** Для плоского тела $K$, звездного относительно точки $o \in intK$, потребуем, чтобы всякий исходящий из $o$ луч пересекал его границу в единственной точке, что соответствует определению звездного множества в [10]. Данное условие позволяет задать границу $\partial K$ в полярной системе координат, полюс которой помещен в центр звездности, а координаты обозначены $(r, \phi)$ посредством непрерывной функции

$$r = g(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi],$$

*определяющей звездное тело.* Продолжим эту функцию по периодичности на всю числовую прямую $R$ с минимальным периодом $2\pi$.

*Сектор с центром $o$* определим как множество

$$\{(r, \phi) |\ 0 \le r \le g(\phi), \phi \in [\alpha, \beta]\}.$$

Согласно данному определению, тело $K$ само является сектором.

*Сегмент с центром $o$* — множество

$$\{(r, \phi) |\ g_1(\phi) \le r \le g_2(\phi), \phi \in [\alpha, \beta]\}, \qquad (1)$$

где непрерывные функции $g_1(\phi)$ и $g_2(\phi)$ таковы, что $0 < g_1(\phi) \le g_2(\phi)$, причем $g_1(\phi) = g_2(\phi)$ разве лишь при $\phi = \alpha$ или $\phi = \beta$.

Обозначим множество всех секторов и сегментов с центром $o$ через $\Omega_o$, а множество всех плоских выпуклых тел через $\Omega$. Ясно, что $\Omega \subset \Omega_o$ при всех $o \in E^2$.

**Замечание 2.** Всякое множество из $\Omega_o$ может быть описано соотношениями (1), если условиться, что для сектора функция $g_1(\phi)$ тождественно равна 0, а $g_2(\phi) > 0$ при всех $\phi \in [\alpha, \beta]$.

Будем говорить, что простая (без самопересечений) *линия* $\gamma$, концы которой лежат на границе плоского тела $K$, *разбивает (или делит) $K$ на два подмножества* $K_1$ и $K_2$, и писать $K_1 + K_2 = K$, если $K = K_1 \cup K_2$ и $K_1 \cap K_2 = \gamma$.

Функцию $F$, сопоставляющую каждому множеству из $\Omega_o$ действительное число, назовем *функционалом* на $\Omega_o$.

Функционал называется [13, с. 277–278]

1) *неотрицательно (положительно) определенным*, если

$$\forall_{K \in \Omega_o}\ F(K) \ge 0 \quad (\text{соответственно} \quad F(K) > 0);$$

2) *аддитивным*, если

$$F(K_1 \cup K_2) = F(K_1) + F(K_2) - F(K_1 \cap K_2);$$

3) *просто-аддитивным*, если

$$F(K_1 + K_2) = F(K_1) + F(K_2);$$

4) *монотонным*, если

$$K \subset S \ \Rightarrow\ F(K) < F(S);$$

5) *инвариантным относительно преобразования $f$* или, короче, $f$ - инвариантным, если

$$F(K) = F(f(K));$$

6) *непрерывным*, если

$$K_n \to K \ \Rightarrow\ F(K_n) \to F(K).$$

Понятие непрерывного функционала мы рассматриваем на множестве $\Omega$ выпуклых плоских тел, для которых определена сходимость, например в метрике Хаусдорфа [13]. В определении (просто) аддитивного функционала предполагается, что множества $K_1 \cup K_2$, $K_1 + K_2$, $K_1 \cap K_2$ принадлежат множеству, на котором определен функционал.

Приведем примеры некоторых функционалов.

**Теорема 1** [13, с. 283]. *Периметр $P$, как функция на $\Omega$, является положительно определенным, аддитивным, монотонным, инвариантным относительно движений (в частности, $Z_o$-инвариантным) и непрерывным функционалом.*

**Замечание 3.** Аддитивность периметра $P$ в предельном случае, когда пересечение $K_1 \cap K_2 = \gamma$ представляет собой отрезок, дает:

$$P(K_1 + K_2) = P(K_1) + P(K_2) - 2l(\gamma), \qquad (2)$$

где $l(\gamma)$ — длина отрезка. Поэтому аддитивность не влечет простую аддитивность.

**Теорема 2** [13, с. 283]. *Площадь $S$, как функция на $\Omega$, является положительно определенным, просто аддитивным, монотонным, инвариантным относительно движений (в частности, $Z_o$-инвариантным) и непрерывным функционалом.*

Определим на $\Omega_o$ функционал

$$M_f(K) = \int_K f(\rho) d\sigma, \qquad (3)$$

где $f(\rho)$ — положительная непрерывная функция от расстояния $p = |ox|$, $d\sigma$ — элемент площади плоского тела.

**Теорема 3.** *Функционал (3) на $\Omega_o$:*
1) *положительно определен;*
2) *аддитивен* и *просто аддитивен;*
3) *монотонен;* 4) *$Z_o$-инвариантен.*

**Доказательство.** Положительная определенность, аддитивность и простая аддитивность функционала (3) вытекают из соответствующих свойств интеграла. Простая аддитивность и положительная определенность обеспечивают монотонность функционала. Остается проверить свойство 4).

Пусть $S^* = Z_o(S)$, где множество $S$, ввиду замечания 3, может быть описано соотношениями (1). Преобразование $Z_o$ в полярных координатах задается формулами: $r^* = r$, $\phi^* = \phi + \pi$. Тогда $S^*$ задается так:

$$g_1(\phi - \pi) \le r \le g_2(\phi - \pi), \ \phi \in [\alpha + \pi, \beta + \pi].$$

Так как элемент площади в полярных координатах имеет вид $d\sigma = \rho d\rho d\phi$, то:

$$M_f(S^*) = \int_{S^*} f(\rho) \rho d\rho d\phi =$$

$$= \int_{\alpha+\pi}^{\beta+\pi} d\phi \int_{g_1(\phi-\pi)}^{g_2(\phi-\pi)} f(\rho) \rho d\rho = |\phi - \pi = \psi| =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\psi \int_{g_1(\psi)}^{g_2(\psi)} f(\rho) \rho d\rho = \int_S f(\rho) \rho d\rho d\phi = M_f(S).$$

Показали, что $M_f(S^*) = M_f(S)$.

**Замечание 4.** В случае $f(\rho) = \rho^i$, где $i$ — натуральное число, функционал (3) называется *$i$-ым геометрическим центральным моментом.* Если $f(\rho) \equiv 1$, то функционал (3) выражает *площадь тела $K$.*

**3. Критерий центральной симметричности звездного плоского тела.** Отрезок, по которому звездное тело $K$ пересекается с прямой, проходящей через центр звездности $o \in intK$, назовем *бисектором.*

**Теорема 4.** *Пусть $F$ — монотонный, просто аддитивный, инвариантный относительно центральной симметрии $Z_o$ функционал на $\Omega_o$. Плоское, звездное относительно своей внутренней точки $o$ тело $K$ центрально-симметрично относительно центра $o$ тогда и только тогда, когда всякий бисектор делит $K$ на 2 сектора с равными значениями функционала $F$ на них.*

**Доказательство.** 1. Пусть звездное относительно своей внутренней точки $o$ плоское тело $K$ одновременно является центрально-симметричным относительно $o$; $K_1$, $K_2$ — секторы тела $K$, определяемые произвольным бисектором. Поскольку, $Z_o(K) = K$, то и $Z_o(K_1) = K_2$. Тогда в силу $Z_o$-инвариантности функционала $F$ справедливо: $F(K_2) = F(K_1)$.

**2.** Пусть теперь плоское тело $K$, звездное относительно точки $o \in intK$, обладает тем свойством, что всякий бисектор делит тело $K$ на 2 сектора с равными значениями функционала $F$ на них. Предположим, что $o$ не является центром симметрии. Тогда найдется бисектор $[a, b]$ такой, что $|oa| < |ob|$. Пусть $a^*$, $b^*$ образы точек $a$ и $b$ при преобразовании $Z_o$. Они лежат на прямой $ab$, причем $|oa^*| = |oa|$, $|ob^*| = |ob|$. Значит, $|oa^*| < |ob|$ и $|oa| < |ob^*|$. Из того, что $K$ звездно относительно точки $o \in intK$, следует, что $a^*$ — внутренняя, а $b^*$ — внешняя точки множества $K$. Поэтому каждая из двух дуг границы множества $K^* = Z_o(K)$ с концами $a^*$ и $b^*$ пересекается с $\partial K$ по крайней мере в одной точке. Итак, имеются по меньшей мере 2 точки пересечения границ $\partial K \cap \partial K^*$. Из топологических соображений заключаем о существовании точек $x \in \partial K \cap \partial K^*$ и $y \in \partial K \cap \partial K^*$ таких, что дуга $xb^*y$ границы $\partial K^*$ пересекается с $K$ только в точках $x$ и $y$. Поскольку $x, y \in \partial K \cap \partial K^*$, то симметричные им точки $x^* = Z_o(x)$ и $y^* = Z_o(y)$ также принадлежат пересечению $\partial K \cap \partial K^*$.

Возможны случаи: 1) $y = x^*$ и $x = y^*$ и пересечение $\partial K \cap \partial K^*$ состоит только из одной пары точек $x$ и $x^*$ (рис. 1); 2) $y \neq x^*$ и пересечение $\partial K \cap \partial K^*$ содержит по меньшей мере 2 пары симметричных относительно $o$ точек $x$, $x^*$ и $y$, $y^*$ (рис. 2).

*Случай 1.* Пусть $K_a$, $K_b$ — секторы тела $K$, определяемые бисектором $[x, x^*]$ и содержащие точки $a$ и $b$ соответственно; $K_a^* = Z_o(K_a)$. Так как $a^* \in K_b$, то $K_a^* \subset K_b$ и $cl(K_b \setminus K_a^*) \in \Omega_o$.

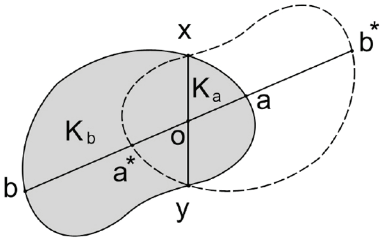


Рис. 1. Случай 1

Вследствие монотонности функционала $F$ $F(K_b) > F(K_a^*)$, а вследствие его инвариантности относительно центральной симметрии $F(K_a^*) = F(K_a)$. Итак, $F(K_b) > F(K_a)$, что противоречит допущению.

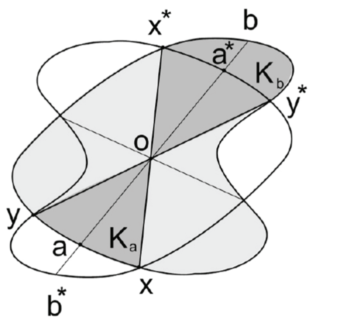


Рис. 2. Случай 2

*Случай 2.* Бисекторы $[x, x^*]$ и $[y, y^*]$ определяют 4 сектора $K_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, тела $K$, занумерованных по ходу часовой стрелки. Принимая во внимание простую аддитивность функционала $F$ и с учетом допущения о разбиении тела бисекторами на секторы с равными значениями функционала $F$ на них, можем записать:

$$F(K_1 + K_2) = F(K_3 + K_4),$$
$$F(K_2 + K_3) = F(K_4 + K_1). \Rightarrow$$
$$F(K_1) + F(K_2) = F(K_3) + F(K_4),$$
$$F(K_2) + F(K_3) = F(K_4) + F(K_1). \Rightarrow$$
$$F(K_1) = F(K_3),\ F(K_2) = F(K_4).$$

Обратим внимание, что значения функционала равны на секторах, расположенных в парах вертикальных углов, образованных бисекторами $[x, x^*]$ и $[y, y^*]$. Пусть $K_a = K_1$ — сектор, содержащий точку $a$, $K_b = K_3$ — сектор, содержащий точку $b$; $K_a^* = Z_o(K_a)$. Далее в отношении секторов $K_a$, $K_b$, $K_a^*$ дословно повторяем рассуждения, относящиеся к *случаю 1* и приводящие к неравенству: $F(K_b) > F(K_a)$. Оно противоречит ранее полученному равенству $F(K_b) = F(K_a)$, что и завершает доказательство теоремы 3.

**4. Следствия из теоремы.** Поскольку выпуклое тело звездно относительно любой своей точки, то из теорем 3 и 4 вытекает

**Следствие 1.** *Пусть $i$ — фиксированное натуральное число. Плоское выпуклое тело $K$ является центрально-симметричным относительно центра $o$ тогда и только тогда, когда всякая проходящая через точку $o$ хорда делит тело $K$ на 2 подмножества с равными $i$-ми геометрическими центральными моментами относительно $o$.*

Известно, что точка, через которую проходят все хорды плоского выпуклого тела, делящие пополам его площадь, совпадает с точкой, обладающей тем свойством, что всякая проходящая через нее хорда делит площадь этого тела пополам [14]. Поэтому из теорем 2 и 3 следует уже известный результат [14–16]:

**Следствие 2.** *Плоское выпуклое тело $K$ центрально-симметрично тогда и только тогда, когда все хорды, делящие его площадь пополам, проходят через одну точку.*

**Теорема 5.** *Плоское выпуклое тело $K$ центрально-симметрично тогда и только тогда, когда все хорды, делящие пополам периметр, проходят через одну точку.*

**Доказательство.** Говоря о делении периметра плоского выпуклого тела $K$ пополам, имеем в виду, что концы хорды разбивают его границу $\partial K$ на 2 дуги равной длины. Периметр $P$, как функционал на $\Omega$, согласно теореме 2, монотонен и $Z_o$-инвариантен, но не является просто-аддитивным: закон аддитивности для него имеет вид (2). Поэтому воспользоваться непосредственно теоремой 4 нельзя, хотя всякая хорда делит периметр выпуклого плоского тела $K$ пополам тогда и только тогда, когда она делит $K$ на 2 сектора с равными периметрами. Подправим доказательство теоремы 2 для получения нужного результата.

1. В одну сторону доказательство очевидно: всякая хорда, проходящая через центр симметрии тела $K \in \Omega$, делит его на 2 симметричных тела $K_1$ и $K_2 = Z_o(K_1)$. В силу $Z_o$-инвариантности периметра имеем $P(K_1) = P(K_2)$. Согласно сделанному выше замечанию следует, что хорда делит периметр тела $K$ пополам.

2. Пусть теперь хорды, делящие пополам периметр тела $K \in \Omega$, проходят через одну точку $o$. Ясно, что $o \in intK$, иначе через $o$ проходила бы единственная хорда, делящая пополам периметр тела $K$, в то время как таких хорд бесконечно много: в силу непрерывности функционала $P$ для всякой прямой в $E^2$ существует параллельная

ей хорда, делящая периметр тела $K$ пополам. Точка $o$ обладает свойством, что всякая проходящая через нее хорда делит периметр тела $K$ пополам [13]. Допустим, что $o$ не является центром симметрии тела $K$. Далее дословно повторяется вторая часть доказательства теоремы 4 с заменой обозначения функционала $F$ на $P$ до рассмотрения *случая 2*, где простая аддитивность функционала $F$ используется для установления равенства его значений на парах секторов, расположенных в вертикальных углах, образованных хордами $[x, x^*]$ и $[y, y^*]$. Покажем, что закон аддитивности для периметра $P$ приводит к тому же результату:

$$P(K_1 + K_2) = P(K_3 + K_4),$$
$$P(K_2 + K_3) = P(K_1 + K_4). \Rightarrow$$
$$P(K_1)+P(K_2)-2|oy| = P(K_3)+P(K_4)-2|oy^*|,$$
$$P(K_2)+P(K_3)-2|ox^*| = P(K_1)+P(K_4)-2|ox|.$$

Но $|oy| = |oy^*|$, $|ox| = |ox^*|$, и значит:

$$P(K_1) + P(K_2) = P(K_3) + P(K_4),$$
$$P(K_2) + P(K_3) = P(K_1) + P(K_4).$$

Тогда $P(K_1) = P(K_3)$, $P(K_2) = P(K_4)$, после чего с соответствующего места и до завершения повторяется доказательство теоремы 4 с указанной выше заменой $F$ на $P$. Теорема доказана.

Б. Грюнбаум ввел понятие непрерывного семейства кривых, для которого установил: если точка $o$, через которую проходят не менее 3 кривых семейства, единственна, то через нее проходят и все кривые данного семейства. А поскольку хорды, делящие пополам периметр выпуклого тела, образуют непрерывное семейство кривых [17, с. 532], то отсюда из теоремы 2 вытекает

**Следствие 3.** *Плоское выпуклое тело $K$ центрально-симметрично тогда и только тогда, когда существует единственная точка, через которую проходят не менее 3 хорд, делящих периметр пополам.*

**5. Заключение.** Установлен критерий центральной симметричности звездного плоского тела относительно его центра звездности, обобщающий аналогичный результат для выпуклого плоского тела (следствие 2). Обобщение осуществлено как за счет расширения класса множеств, на которых распространяется критерий, так и за счет замены площади на произвольный простоаддитивный монотонный $Z_o$-инвариантный функционал. Существенно требование, чтобы хорды, делящие множество на секторы с равными значениями функционала, проходили через одну точку: как показали Циндлер и Ауербах [7, с. 53], существуют примеры плоских выпуклых тел, не имеющих центра симметрии, у которых все делящие пополам площадь хорды делят пополам и периметры. Заметим, что метод прямого доказательства для площадей в [14–16] отличен от нашего и непригоден в случае периметра.

## Библиографический список


1. Süss W. Zusammensetzung von Eikörpern und homothetishen Eiflächen. Tohoku Math. J. 1932. V. 35.

2. Rogers C.A. Sections and projections of convex bodies // Portugal Math. 1965. V. 24.

3. Montejano L. Orthogonal projections of convex bodies and central symmetry // Bol. Soc. Mat. Mex. II. 1993. Ser. 28.

4. Groemer H. On the determination of convex bodies by translates of their projections // Geom. Dedicate. 1997. V. 66.

5. Chakerian G.D., Klamkin M.S. A three point characterization of central symmetry // Amer. Matsh. Monthly. 2004. V. 111.

6. Boltyanski V.G., Jeronimo Castro J. Centrally symmetric convex sets // Journal of Convex Analysis. 2007. V. 14. № 2.

7. Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М., 1971.

8. Синяков В.В. Вычислительные методы для задач достижимости и синтеза управлений в условиях нелинейности : дисс. ... канд. ф.-м.н. М., 2015.

9. Иванов В.К. Теорема единственности обратной задачи логарифмического потенциала для звездных множеств // Изв. МВО. Сер. Мат. : 1958. № 3.

10. Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН ССС. 1938. Т. 18. № 3.

11. Canete A., Segure Gomis S. Bisections of centrally symmetric planar convex bodies minimizing the maximum relative diameter // Math. MG.2018. ArHive: 1803.00321v1.

12. Miori C., Peri C., Segura Gomis S. On fencing problems //J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 300. № 2.

13. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., 1966.

14. Menon V.V. A theorem on partitions of mass-distribution //Pacific J. Math. 1966. V.16.

15. Zarankiewicz K. O prostych połowiacych pola wypukłe //Wiadom. Mat. 1959. V. 2. № 2.

16. Piegat E. O srednicach wypukłych płaskich // Rozsh. Polsk. Towarz. Math. 1963. Ser. 2. № 7.

17. Grunbaum B. Continuous families of curves // Canadian J. of Math. 1966. V. 18. № 3.