УДК 514.764.2

Математическое моделирование в задачах однородной (псевдо)римановой геометрии*

П.Н. Клепиков

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Mathematical Modeling in Problems of Homogeneous (Pseudo)Riemannian Geometry

P.N. Klepikov

Altai State University (Barnaul, Russia)

В настоящее время математическое и компьютерное моделирование, а также системы символьных вычислений активно используются во многих областях математики. Такие популярные системы компьютерной математики, как Maple, Mathematica, MathCad, MatLab, позволяют не только проводить вычисления с использованием символьных выражений, но и решать алгебраические и дифференциальные уравнения (как численно, так и аналитически), а также визуализировать полученные результаты.

Дифференциальная геометрия, как и другие области современной математики, использует новые компьютерные технологии для решения своих задач. Применение не ограничивается только численными расчетами, все чаще системы компьютерной математики используются для аналитических вычислений. На данный момент существует множество примеров, которые подтверждают эффективность систем аналитических вычислений при доказательстве теорем дифференциальной геометрии.

В данной работе приводится пример того, как, используя пакеты символьных вычислений, можно получить классификацию четырехмерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи с нулевым тензором Схоутена-Вейля, которые не являются ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными.

Ключевые слова: математическое и компьютерное моделирование, системы символьных вычислений, группы и алгебры Ли.

Currently, mathematical and computer modeling, as well as systems of symbolic calculations, are actively used in many areas of mathematics. Popular computer math systems as Maple, Mathematica, MathCad, MatLab allow not only to perform calculations using symbolic expressions but also solve algebraic and differential equations (numerically and analytically) and visualize the results.

Differential geometry, like other areas of modern mathematics, uses new computer technologies to solve its own problems. The applying is not limited only to numerical calculations; more and more often, computer mathematics systems are used for analytical calculations. At the moment, there are many examples that prove the effectiveness of systems of analytical calculations in the proof of theorems of differential geometry.

This paper demonstrates how symbolic computation packages can be used to classify neither conformally flat nor Ricci parallel four-dimensional Lie groups with left-invariant (pseudo)Riemannian metric of the algebraic Ricci soliton with the zero Schouten-Weyl tensor..

Key words: mathematical and computer modeling, symbolic computing systems, Lie groups and Lie algebras.

DOI 10.14258/izvasu(2020)1-15

1. Введение. Системы компьютерной математики позволяют решать широкий круг задач в самых различных областях науки. В эти системы входит множество процедур для численных и аналитических расчетов, решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений, а также различные средства для программирования, визуализации и представления результатов. В настоящее время повсеместно используются такие популярные системы, как *Maple*, *Mathematica*,

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

MathCad, *MatLab* и другие. Они обладают универсальными математическими возможностями, постоянно совершенствуются, развивая аппарат и пополняя ресурсы, имеют возможность взаимной интеграции.

Так же как и другие области математики, современная геометрия использует новые компьютерные тенхнологии для решения своих задач. Применение не ограничивается только численными расчетами, все чаще системы компьютерной математики используются для аналитических вычислений. На данный момент существует множество примеров, которые доказывают эффективность систем аналитических вычислений при доказательстве теорем дифференциальной геометрии.

Например, Б.Б. Комраковым [1] была получена классификация четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространств с нетривиальной подгруппой изотропии, которая содержит 186 различных типов многообразий. Данная классификация позволяет использовать системы компьютерной математики для изучения различных свойств таких многообразий. Так, Дж. Кальварузо (G. Calvaruso) и А. Заем (A. Zaeim) [2] использовали данную классификацию для получения списка всех конформно плоских четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий. Кроме того, этими же авторами были классифицированы все четырехмерные псевдоримановы геодезически орбитальные пространства [3]. Стоит также отметить классификацию нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях [4] и классификацию эйнштейново подобных метрик локально однородных псевдоримановых многообразий [5], получение которых напрямую использует системы компьютерной математики.

Следует также упомянуть работы [6, 7], в которых, основываясь на вычислениях, сделанных в системе аналитических расчетов, О.П. Гладунова и В.В. Славский, Д.С. Воронов и Е.Д. Родионов получили классификации четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля в унимодулярном и неунимодулярном случаях соответственно.

Налицо не только рост числа задач, решенных с помощью компьютера и систем аналитических вычислений, но и разработка новых программ и алгоритмов для решения разнообразного круга задач, и сейчас трудно оценить до конца тот вклад, который привносится в математику новыми компьютерными технологиями.

2. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли. В данном разделе мы рассмотрим пример математического и компьютерного моделирования на примере классификации четырехмерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи с нулевым тензором Схоутена–Вейля, которые не являются ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными. Все вычисления будем проводить в соответствующей метрической алгебре Ли.

Определение. *Метрической алгеброй Ли* называется тройка $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$, где $\mathfrak{g}$ — векторное пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ — билинейное отображение удовлетворяющее следующим двум аксиомам:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$;
2. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Зафиксируем некоторый базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ в $\mathfrak{g}$ (в данном разделе нас интересуют четырехмерные алгебры Ли). Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять компоненты оператора Риччи ρ через структурные константы C_{ij}^k (которые определяются разложением скобки Ли по базису $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$) и метрический тензор $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ метрической алгебры Ли (подробнее см. [8–10]):

1. Вычисляем символы Кристоффеля:
$$\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2}\left(C_{ij}^s - C_{jk}^l g_{li} g^{ks} + C_{ki}^l g_{lj} g^{ks}\right).$$
2. Определяем компоненты тензора кривизны:
$$R_{ijkt} = C_{ij}^s \Gamma_{sk}^l g_{lt} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l g_{lt} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l g_{lt}.$$
3. Вычисляем компоненты тензора Риччи с помощью свертки тензора кривизны с метрическим тензором:
$$r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}.$$
4. Компоненты оператора Риччи вычисляются через поднятие индекса у тензора Риччи:
$$\rho_k^i = r_{tk} g^{it}.$$

Определение. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если в соответствующей метрической алгебре Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ выполняется уравнение:
$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D,$$
где ρ — оператор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — тождественный оператор, D — оператор дифференцирования алгебры Ли, т.е. оператор, удовлетворяющий условию:
$$D_i^t C_{tj}^k + D_j^t C_{it}^k = D_t^k C_{ij}^t,\ i, j, k = 1, 2, 3, 4. \qquad (1)$$

Таблица 1

Метрические алгебры Ли четырехмерных групп Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которых не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(112)\}$ или $\{(22)\}$

№	Таблица умножения	Нетривиальные скалярные произведения
	Тип Сегре $\{(112)\}$	
1	$[e_1,e_2]=-e_1+e_2$, $[e_1,e_3]=e_3$, $[e_2,e_3]=e_3$, $[e_2,e_4]=-\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3$, $[e_3,e_4]=\varepsilon_1\varepsilon_3e_1-\varepsilon_1\varepsilon_3e_2+\frac{\alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3\neq 0$	$g_{11}=\varepsilon_1$, $g_{22}=-\varepsilon_1$, $g_{34}=\varepsilon_3$
2	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3$, $[e_1,e_4]=-\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_1}e_3$, $[e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_2}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_2^2+2\varepsilon_3\neq 0$	$g_{11}=\varepsilon_1$, $g_{22}=-\varepsilon_1$, $g_{34}=\varepsilon_3$
3	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1+\alpha_3e_2$, $[e_2,e_4]=-\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_2e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3\geqslant 0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3+2\alpha_2^2\varepsilon_3+1\neq 0$, $\alpha_3^2+\left(2\alpha_1^2-2\alpha_2^2-\varepsilon_3\right)^2\neq 0$	$g_{11}=\varepsilon_1$, $g_{22}=\varepsilon_2$, $g_{34}=\varepsilon_3$
4	$[e_1,e_4]=\alpha_1e_1+(\alpha_2+\alpha_3)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_2-\alpha_3)e_1+\alpha_1e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2-2\alpha_3^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_3>0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3-2\alpha_3^2\varepsilon_3+1\neq 0$, $\alpha_2^2+\left(2\alpha_1^2+2\alpha_3^2-\varepsilon_3\right)^2\neq 0$	$g_{11}=1$, $g_{22}=-1$, $g_{34}=\varepsilon_3$
5	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+1)e_1+(\alpha_2-1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_2+1)e_1+(\alpha_1-1)e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1\neq 0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3+1\neq 0$, $2\alpha_1^2+4\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3\neq 0$	$g_{11}=1$, $g_{22}=-1$, $g_{34}=\varepsilon_3$
6	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1-\frac{2\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_2+e_3$, $[e_2,e_4]=\frac{2\alpha_1\alpha_2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2+e_3$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2\neq 0$, $2\alpha_1^2+\varepsilon_3\neq 0$	$g_{11}=1$, $g_{22}=-1$, $g_{34}=\varepsilon_3$
7	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+\alpha_1e_2$, $[e_2,e_4]=-\alpha_1e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2>0$	$g_{11}=\varepsilon_1$, $g_{22}=\varepsilon_1$, $g_{34}=-1$
8	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{6}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{6}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\neq 0$	$g_{11}=1$, $g_{22}=-1$, $g_{34}=-1$
9	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_2>0$	$g_{11}=1$, $g_{22}=1$, $g_{34}=1$
	Тип Сегре $\{(22)\}$	
10	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $[e_2,e_3]=-\alpha_1e_1+\left(\alpha_1-\sqrt{2}\right)e_3$, $[e_1,e_4]=\left(\alpha_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_2e_1$, $[e_3,e_4]=\alpha_1e_1+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $\alpha_2\neq 0$	$g_{12}=-1$, $g_{34}=1$
11	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2-\varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3$, $[e_2,e_3]=\alpha_2e_1$, $[e_1,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_1$, $[e_2,e_4]=\alpha_3e_1$, $[e_3,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_3$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3\neq 0$	$g_{12}=\varepsilon_1$, $g_{34}=\varepsilon_2$
12	$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1$, $[e_2,e_3]=-\frac{2\alpha_1^2+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_3$, $[e_1,e_4]=\alpha_1e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_2e_3+\frac{2\alpha_1^2-\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4$, $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_1\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_2\neq 0$, $6\alpha_1^2+\varepsilon_1\neq 0$	$g_{12}=\varepsilon_1$, $g_{34}=\varepsilon_2$
13	$[e_1,e_2]=-\frac{\sqrt{6}}{3}e_1$, $[e_2,e_3]=\frac{2\sqrt{6}}{3}e_3$, $[e_1,e_4]=\frac{\sqrt{6}}{6}e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_3+\frac{\sqrt{6}}{3}e_4$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2\neq 0$	$g_{12}=-1$, $g_{34}=\varepsilon_2$

Также назовем алгебраический солитон Риччи *тривиальным*, если он изометричен многообразию Эйнштейна или прямому произведению эйнштейнового многообразия и (псевдо)евклидова пространства.

В работе [11] была доказана следующая

Теорема 1. *Пусть (G,g) — четырехмерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи и тензор Схоутена–Вейля SW тривиален. Тогда $\Lambda=0$ и оператор Риччи ρ имеет тип Сегре либо $\{(112)\}$, либо $\{(22)\}$ с единственным собственным значением, равным нулю.*

В работе [12] получена классификация метрических алгебр Ли четырехмерных групп Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которых не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Случаи, в которых оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(112)\}$ или $\{(22)\}$, приведены в таблице 1. В ней используются обозначения $\varepsilon_i=\pm1$, $\delta_1=\pm1$.

Теорема 2. *Пусть (G,g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Тогда (G,g) является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда метрическая алгебра Ли группы (G,g) содержится в таблице 1 под номерами 2–9.*

Доказательство. В силу теоремы 1, нам необходимо проверить выполнение условия (1) для оператора Риччи лишь для таких метрических алгебр Ли, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{(112)\}$ или $\{(22)\}$.

Используя вышеприведенную математическую модель, найдем вид оператора Риччи. В случаях 1–9 из таблицы 1 оператор Риччи ρ равен

$$\rho=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

а в случаях 10–13 имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее необходимо проверить выполнение системы уравнений (1) для оператора Риччи.

В случае 1 система уравнений (1) состоит из единственного уравнения: $1 = 0$. Поэтому группа Ли (G, g), алгебра Ли которой имеет вид 1, не является алгебраическим солитоном Риччи.

В случаях 2–9 система уравнений (1) выполняется тривиальным образом. Поэтому группа Ли (G, g), алгебра Ли которой имеет вид 2–9, является алгебраическим солитоном Риччи при любых значениях параметров.

В случае 10 система уравнений (1) состоит из единственного уравнения: $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Поэтому группа Ли (G, g), алгебра Ли которой имеет вид 10, не является алгебраическим солитоном Риччи.

В случае 11 система уравнений (1) состоит из единственного уравнения: $\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_2} = 0$, которое не может выполняться, т.к. $\varepsilon_2 = \pm 1$. Поэтому группа Ли (G, g), алгебра Ли которой имеет вид 11, не является алгебраическим солитоном Риччи.

В случае 12 система уравнений (1) состоит из единственного уравнения: $\frac{\varepsilon_1}{2\alpha_1} = 0$, которое не может выполняться, т.к. $\varepsilon_1 = \pm 1$. Поэтому группа Ли (G, g), алгебра Ли которой имеет вид 12, не является алгебраическим солитоном Риччи.

В случае 13 система уравнений (1) состоит из единственного уравнения: $\frac{\sqrt{6}}{2} = 0$. Поэтому группа Ли (G, g), алгебра Ли которой имеет вид 13, не является алгебраическим солитоном Риччи.

3. Заключение. В результате проведенных исследований построена математическая и компьютерная модель, которая позволяет вычислять компоненты тензора Риччи метрических групп Ли. Кроме того, в работе получена классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи с нулевым тензором Схоутена-Вейля, которые не являются ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными.

Библиографический список

1. Komrakov B.B. Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. 2001. V. 8.

2. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Tohoku Math. J. 2014. V. 66.

3. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional pseudo-Riemannian g.o. spaces and manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2018. V. 130.

4. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2011. V. 12, No 5.

5. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four // Mediterranean Journal of Mathematics. 2016. V. 13(5).

6. Гладунова О.П., Славский В.В. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Математические труды. 2011. Т. 14. № 1.

7. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Доклады академии наук. 2010. Т. 432, № 3.

8. Gladunova O.P., Slavskii V.V. Harmonicity of the Weyl tensor of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups // Siberian Advances in math. 2013. V. 23. № 1.

9. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. 2013. № 1/1(77).

10. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Математические труды. 2006. Т. 9. № 1.

11. Клепиков П.Н. Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли // Математические заметки. 2018. Т. 104. № 1.

12. Клепиков П.Н. Четырехмерные метрические группы Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16.