УДК 514.742.2+519.23

Структура ансамбля целочисленных векторов на многомерной сфере

С.В. Дронов[1], *А.С. Петриков*[2]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Алтайский государственный медицинский университет (Барнаул, Россия)

A Structure of the Ensemble of Integer Vectors on the Multidimensional Sphere

S.V. Dronov[1], *A.S. Petrikov*[2]

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Altai State Medical University (Barnaul, Russia)

Изучаются взаимные расположения многомерных векторов с координатами, являющимися последовательными натуральными числами, максимальное из которых совпадает с размерностью соответствующего евклидова пространства. Набор всех таких векторов мы называем ансамблем целочисленных векторов. Поскольку принадлежность вектора ансамблю означает, что его координаты являются некоторой перестановкой координат любого другого из векторов ансамбля, то все эти векторы имеют одинаковую длину и при помещении их начал в начало координат все их концы оказываются лежащими на сфере с радиусом, равным этой длине. Будем рассматривать вектор (1, 2, …, n) в качестве основного вектора ансамбля. Изучим все возможные углы, которые могут быть образованы векторами целочисленного ансамбля и, в частности, отыщем количества тех из них, которые образуют с основным вектором углы равной величины. Приложением полученных результатов является построение точного распределения коэффициента ранговой корреляции. В заключение рассмотрено применение этого распределения к одной из задач дифференциальной диагностики при анализе тромбозов глубоких вен и тромбоэмболии легочной артерии.

Ключевые слова: целочисленные векторы, многомерная комбинаторная геометрия, ранговые коэффициенты, значимость корреляций.

This paper studies the mutual arrangements of multidimensional vectors with coordinates that are consecutive natural numbers and the maximum of which coincides with the dimension of the corresponding Euclidean space. The set of all such vectors is called an ensemble of integer vectors. Since the membership of a vector in an ensemble means that its coordinates are some permutation of coordinates of any other vectors of the ensemble, all these vectors have the same length and, when they are placed at the origin, all their ends are lying on a sphere with a radius equal to this length. The vector (1, 2, ..., n) is considered as the main vector of the ensemble. All possible angles that can be formed by the vectors of an integer ensemble are studied. In particular, authors are looking for the number of those that form angles of equal magnitude with the main vector. Obtained results can be used in the construction of the exact distribution of the rank correlation coefficient. In conclusion, the application of this distribution to one of the problems of differential diagnosis in the analysis of deep vein thrombosis and pulmonary artery thromboembolism is considered.

Key words: integer vectors, multidimensional combinatorial geometry, rank coefficients, significance of correlations.

DOI 10.14258/izvasu(2020)1-13

1. Обоснование и постановка задачи. Одновременное изучение большого количества числовых показателей становится все более востребованным. Традиционный подход к этому изучению, обзор устоявшихся методов многомерной геометрии содержится в классической монографии [1]. Сегодня же для решения практических задач чаще используются компьютерные методы [2]. Конкретизируем задачу.

Зафиксируем некоторое натуральное число n.

Мы будем изучать взаимное расположение в R^n векторов вида $(x_1, ..., x_n)$, координаты $x_1, ..., x_n$ которых являются различными натуральными числами, образующими некоторую перестановку чисел $1, ..., n$. При этом, если считать, что все эти векторы отложены от начала координат в пространстве соответствующей размерности, то все их концы будут лежать на сфере радиуса $a = \sqrt{n(n+1)(2n+1)/6}$. Набор всех таких векторов условимся называть ансамблем целочисленных векторов, а вектор $\vec{X} = (1, 2, ..., n)$, в некотором смысле наиболее простой из них, — основным вектором ансамбля. Некоторые векторы из рассматриваемых оказываются в определенном смысле одинаково симметрично расположенными относительно основного вектора. Будем говорить, что векторы целочисленного ансамбля $\vec{Y}_1, ..., \vec{Y}_k$ образуют q-слой ансамбля, если

$$\cos(\vec{X},\ \vec{Y}_j) \ = \ q, \quad j = 1, ..., k \tag{1}$$

и в ансамбле нет других векторов, удовлетворяющих (1). Количество векторов, составляющее такой q-слой, назовем q-повторностью.

Поставим задачу при каждом натуральном n определить те возможные значения q, для которых q-слой ансамбля целочисленных векторов будет непустым. Параллельно будем изучать значения соответствующих q-повторностей, связи между ними и закономерности их формирования. Найденное множество возможных значений q будем далее называть диапазоном косинусов.

С геометрической точки зрения вторая часть сформулированной задачи будет соответствовать поиску таких преобразований n-мерного пространства, которые переводят некоторые векторы q_1-слоя ансамбля в векторы его q_2-слоя при заданных значениях q_1, q_2. Алгебраически данная задача близка к известной проблеме определения количества целочисленных решений уравнения:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = a^2$$

при заданном a. При рассмотрении этой проблемы (см., например, [3, 4]) легко прослеживается также связь с так называемыми числами Бернулли второго рода, см. [5].

Но наиболее прямое практическое применение результатов нашего исследования возможно в анализе данных при проверке статистической значимости ранговых коэффициентов корреляции, строгие определения которых вместе с точной постановкой упомянутой задачи можно найти в [6]. Как известно, после центрирования векторов, координатами которых являются элементы двух потенциально связанных выборок, косинус образовавшегося угла становится равным выборочному коэффициенту корреляции между ними. Поскольку в нашем случае у всех векторов целочисленного ансамбля среднее значение их координат одинаково и равно $b = (n+1)/2$, то их центрирование будет равносильно тому, что мы каждый из векторов $\vec{Y}$ целочисленного ансамбля векторов заменяем на вектор $\vec{Y}_b = \vec{Y} - \vec{B}$, где $\vec{B} \ = \ (b, ..., b)$.

После выполненного такого преобразования оказывается, что векторы, ранее образовывавшие q-слой, перейдут в векторы, по-прежнему образующие одинаковые углы с преобразованным основным вектором $\vec{X}_b$: для любого из таких векторов Y справедливо:

$$\cos(\vec{X}_b,\ \vec{Y}_b) \ = \ \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y} - n(n+1)^2/4}{S^2},$$

где

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2 - b^2 \ = \ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 - b^2 \ = \ \frac{n(n^2-1)}{12} -$$

квадрат общей длины всех векторов $\vec{Y}_b$. Производя несложные выкладки, получим:

$$\cos(\vec{X}_b,\ \vec{Y}_b) \ = \ \frac{(n-1)q + 3(n+1)}{4n+2}\,. \tag{2}$$

Полученная формула позволяет перейти далее к изучению коэффициентов корреляции между двумя перестановками чисел $1, ..., n$, что мы и сделаем, поскольку все возможные значения коэффициента корреляции $R(\vec{X}, \vec{Y})$ и условия достижения его наибольшего и наименьшего значения широко известны. При этом повторности каждого из возможных значений такого коэффициента корреляции и пересчитанного согласно (2) значения косинуса угла между соответственными векторами целочисленного ансамбля, очевидно, будут одинаковыми.

Набор всех возможных значений, которые может принимать коэффициент корреляции между изучаемыми перестановками при заданном n, условимся называть n-диапазоном.

2. Вид и свойства n-диапазона. Очевидно, n-диапазон является конечным множеством. Для некоторого $k(n)$ он будет представлять собой убывающий ряд чисел $R_k,\ k = 0, ..., k(n)$. Ясно, что одно и то же значение R_k может получиться на нескольких разных $\vec{Y}$. Назовем то количество раз, которое k-е значение встретится в n-диапазоне при последовательном выборе в качестве координат $\vec{Y}$ всех $n!$ перестановок чисел 1, 2, ..., n, его повторностью и обозначим $s_k(n)$.

Лемма 1. *Набор повторностей n-диапазона симметричен в том смысле, что* $s_k(n) = s_{k(n)-k}(n),\ k = 0, ..., k(n)$.

Доказательство немедленно следует из того, что $R(\vec{X}, \vec{Y})$, оставаясь неизменным по абсолютной величине, меняет свой знак при замене координат y_i вектора $\vec{Y}$ на $n+1-y_i,\ i = 1, ..., n$.

Теорема 1. *Диапазон косинусов содержится в множестве*

$$\hat{\mathbf{R}}(n) = \{q_k = 1 - k\hat{h}, \quad k = 0, 1, ..., k(n)\}, \qquad (3)$$

где

$$\hat{h} \;=\; \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}, \quad k(n) \;=\; \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Заметим, что в силу (2) утверждение (3) эквивалентно тому, что n-диапазон содержится в множестве

$$\mathbf{R}(n) = \{R_k = 1 - kh, \quad k = 0, 1, ..., k(n)\}, \qquad (4)$$

где

$$h = \frac{12}{n(n^2-1)}, \quad k(n) = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

В свою очередь, этот почти очевидный факт следует из того, что в формуле для вычисления коэффициента корреляции

$$R(\vec{X}, \vec{Y}) \;=\; \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y} - b^2}{S^2}$$

при изменении $\vec{Y}$ меняется только скалярное произведение в числителе, причем обязательно на величину, являющуюся целым числом.

Формула (3) описывает все возможные значения косинусов углов, образуемых векторами ансамбля целочисленных векторов с основным его вектором (основных косинусов).

Следствие 1. *Наименьший среди основных косинусов равен* $n/(2n+1)$. *При увеличении* n *наименьший основной косинус монотонно возрастает, причем его предел равен* $1/2$.

Из свойств коэффициента корреляции ясно, что вектор, косинус угла которого с основным вектором минимален (а, следовательно, сам угол максимален), единственен и имеет координаты $(n, n-1, ..., 1)$. Таким образом, все векторы рассматриваемого ансамбля лежат внутри конической гиперповерхности с вершиной в начале координат и диаметральными образующими, направленными по лучам, сонаправленным основному и упомянутому векторам. Плоский угол при вершине этой гиперповерхности не превосходит $\pi/3$ и, монотонно увеличиваясь, стремится к этому значению при увеличении n.

Лемма 1 показывает, что ансамбль векторов с учетом повторностей обладает определенной симметрией относительно некоторого центрального вектора. Этот вектор таков, что коэффициент корреляции между наборами его координат и координат основного вектора равен 0. При этом, конечно же, таких векторов может быть достаточно много, а может получиться так, что в ансамбле целочисленных векторов его нет вовсе.

3. Эффект перестановочного преобразования. Поскольку координаты любого из рассматриваемых векторов $\vec{Y}$ являются перестановкой координат основного вектора $\vec{X}$, можно считать вектор $\vec{Y}$ результатом действия некоторого преобразования на основной вектор. Это преобразование (перестановку координат) мы назовем перестановочным. В работе [7] было введено понятие эффекта перестановки, который мы, следуя этой работе, также будем обозначать $\mathrm{Eff}(Y)$, где под Y уже понимается перестановка, переводящая набор координат основного вектора в координаты $\vec{Y}$. По определению, это такой индекс в n-диапазоне (4), что

$$R(\vec{X}, \vec{Y}) \;=\; R_{\mathrm{Eff}(Y)}.$$

Из вузовских курсов линейной алгебры (например, [8, с. 59 – 71]) известно, что произвольная перестановка может быть разложена в произведение независимых циклов. Более того, практически очевидно, что эффекты независимых (т.е. тех, в которых не участвуют одинаковые элементы) перестановок при их перемножении складываются. Поэтому в первую очередь займемся изучением эффектов циклов.

Сначала рассмотрим произвольный цикл $Y = (a_1, ..., a_s)$ длины $s \le n$. Тогда

$$\mathrm{Eff}(Y) = \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j \notin \{a_1, ... a_s\}} j^2 - a_1 a_s - \sum_{j=1}^{s-1} a_j a_{j+1},$$

откуда получается

$$\mathrm{Eff}(Y) = \sum_{j=1}^{s} a_j^2 - a_1 a_s - \sum_{j=1}^{s-1} a_j a_{j+1}. \qquad (5)$$

Прямым следствием (5) является формула для вычисления эффекта транспозиции:

$$\mathrm{Eff}(\,(i, j)\,) \;=\; (i-j)^2. \qquad (6)$$

Далее предположим, что $s \ge 3$. Еще одним следствием (5) является то, что все циклы длины 3 имеют одинаковые эффекты, — при $s = 3$ эта формула содержит все парные произведения элементов цикла по одному разу.

Пусть x — минимальный элемент цикла $Y = (a_1, ..., a_s)$. За счет возможности циклических перестановок элементов в записи цикла всегда можно считать, что это a_1. Определим последовательные разности элементов цикла:

$$\delta_j \;=\; a_j - a_{j-1}, \; j = 2, ..., s.$$

Тогда

$$a_1 = x, \; a_j \;=\; x + \sum_{i=2}^{j} \delta_i, \quad j = 2, ..., s. \qquad (7)$$

После подстановки этих формул в (5) видим, что результат не зависит от $x = a_1$:

$$\mathrm{Eff}(Y) \; = \; \sum_{j=2}^{s} \delta_j^2 + \sum_{j=2}^{s-1} \sum_{i=j+1}^{s} \delta_j \delta_i, \qquad (8)$$

откуда немедленно вытекает справедливость следующего факта.

Лемма 2. *Эффект цикла полностью определяется последовательными разностями его элементов. При смене порядка следования этих разностей в цикле эффект не меняется.*

Через $a_{(j)}$ будем обозначать j-й по величине элемент набора различных целых чисел $a_1, ..., a_s$.

Теорема 2. *Пусть цикл Y имеет длину s. Тогда*

$$\mathrm{Eff}(Y) \; \geq 2s - 3,$$

причем равенство достигается только для

$$Y = (1,\ 3,\ \dots, 4,\ 2), \quad Y = (2,\ 4,\ \dots, 3,\ 1).$$

Минимальный возможный эффект строго возрастает с ростом длины цикла s.

В процессе доказательства этой теоремы в [7] было показано, что среди циклов с фиксированными элементами $a_1, ..., a_s$ наименьшим эффектом обладают те, которые имеют ту же структуру с максимумом посередине, что и циклы из формулировки теоремы: цикл начинается с $a_{(1)}, a_{(3)}$, а завершается $a_{(4)}, a_{(2)}$, или наоборот.

4. О закономерностях в формировании повторностей диапазона косинусов. Пусть k выбрано так, что $q = q_k$. Из (3) и введенных выше определений тогда следует, что q-повторность равна количеству способов, которыми можно число k представить в виде суммы эффектов независимых циклов, составленных из $1, ..., n$. Имея в виду (8) для каждого из возможных циклов, мы приходим к исследованию количества решений диофантова уравнения:

$$\sum_{j=2}^{s} \delta_j^2 + \sum_{j=2}^{s-1} \sum_{i=j+1}^{s} \delta_j \delta_i \; = \; \hat{k} \qquad (9)$$

для известного $\hat{k}$. При этом следует учитывать, что не все решения такого уравнения нас устраивают.

Назовем те наборы чисел $\delta_2, ..., \delta_s$, которые действительно могут являться последовательными разностями элементов у какого-либо цикла длины s, составленного из различных натуральных чисел, допустимыми.

Лемма 3. *Набор целых чисел $\delta_2, ..., \delta_s$ является допустимым тогда и только тогда, когда ни для какой пары индексов $i \leq j$ из диапазона от 2 до s*

$$\sum_{t=i}^{j} \delta_t \; \neq 0. \qquad (10)$$

В частности, ни одно из чисел набора не может быть равным нулю.

Доказательство. Поскольку все a_j, $j = 1, ..., s$ должны быть разными, то необходимость (10) очевидна. Положим $a_1 = -M + 1$, где M — сумма всех отрицательных δ_j из набора. Осталось определить остальные a_j формулой (7). Повторения среди элементов цикла невозможны в силу того же условия (10).

Лемма 3 указывает способ, следуя которому принципиально возможно определение любой повторности $s_k(n)$ диапазона косинусов (или, что то же, n-диапазона) путем подсчета количества допустимых решений диофантовых уравнений (9) для таких наборов их правых частей, что их сумма равна заданному k. Продемонстрируем некоторые из простейших результатов в этом направлении.

Теорема 3. *Пусть натуральное $n \geq 2$. Тогда*

$$s_0(n) = s_{k(n)}(n) = 1, \; s_1(n) = s_{k(n)-1}(n) = n - 1;$$
$$s_2(n) = s_{k(n)-2} = (n-2)(n-3)/2;$$
$$s_3(n) = s_{k(n)-3}(n) = \begin{cases} 2(n-2), & 2 \leq n < 6, \\ 2(n-2) + C_{n-3}^3, & n > 6. \end{cases}$$

Доказательство, имея в виду лемму 1, дадим лишь для $s_j(n)$, $j = 0, 1, 2, 3$. Формула для $s_0(n)$ вытекает из того, что из всех перестановок только тождественная обладает строгой положительной монотонностью своего результата. Из теоремы 2 и (6) видно, что эффектом 1 из всех перестановок обладает только транспозиция вида $(j,\ j+1)$. В качестве первого элемента здесь может быть выбрано любое число, кроме n, что доказывает формулу для $s_1(n)$.

Эффект 2 может быть получен только сложением эффектов двух транспозиций вида $(j,\ j+1)$. Действительно, согласно теореме 2, минимальный эффект цикла большей длины не меньше трех, а эффект транспозиции (6) всегда является точным квадратом. Следовательно, в силу отсутствия двух независимых транспозиций при рассмотрении $n = 3$ $s_3(3) = 0$, что согласуется с доказываемой формулой. Пусть $n \geq 4$. Два последовательных натуральных числа будем считать «большим» элементом. Таким образом, нам нужно образовать два «больших» элемента, оставив $n - 4$ обычных числа в цепочке. Расположив образованные $n - 2$ объекта в цепочку напротив ряда $1, 2, \dots, n$ («большие» элементы займут по два соседних места), что можно сделать

$$C_{n-2}^2 = (n-2)(n-3)/2$$

способами, определим, какие пары последовательных чисел накрываются «большими» элементами. Это и будут две искомые транспозиции.

Рассмотрим, наконец, эффект, равный 3. Он может быть достигнут либо перемножением трех транспозиций $(j, j+1)$, либо использованием цикла длины 3 из последовательных натуральных чисел, эффекты которых все оказываются одинаковыми в силу (8). Началом такого цикла может служить любое из чисел $1, ..., n-2$, что и дает количество выборов элементов. Но из трех последовательных чисел можно построить два разных цикла. Всего получается $2(n-2)$ ситуаций. Если $n < 6$, то три независимых транспозиции нужного вида построить невозможно. Иначе, как уже было сделано ранее, создадим 3 «больших» элемента и разместим их и оставшиеся $n-6$ обычных чисел в ряд C^3_{n-3} способами. Теорема доказана.

Можно продолжать находить значения повторностей по тому же образцу, но, по мере продвижения к центру n-диапазона, формулы будут приобретать все более сложный вид.

5. Применение к проверке значимости ранговой корреляции. Рассмотрим гипотезу об отсутствии статистически значимой связи между двумя рядами рангов. Ясно, что первый ряд рангов можно без ограничения общности считать равным $1, 2, ..., n$. Таким образом, коэффициент корреляции между этими рядами окажется равным одному из значений R_k в изученном выше n-диапазоне. Если гипотеза справедлива, то любая конкретная перестановка Y в нашем наблюдении может появиться с вероятностью $1/n!$. Таким образом, вероятность получить для коэффициента корреляции значение R_j будет равна $s_j(n)/n!$. Гипотеза может оказаться несправедливой лишь в случае значений $R(\vec{X}, \vec{Y})$, не меньших по модулю, чем полученное. Следовательно, с учетом симметричности n-диапазона гипотеза об отсутствии связи несправедлива с вероятностью

$$Q(R_k) \;=\; \frac{2}{n!} \sum_{j=0}^{k} s_j(n), \tag{11}$$

т.е. именно этой формулой определяется величина статистической значимости рангового коэффициента корреляции.

Рассмотрим практический пример. Была проведена оценка риска тромбозов глубоких вен нижних конечностей и тромбоэмболии легочной артерии на основе многофакторного и дискриминантного анализов клинико-биохимических показателей крови, включающих маркеры воспаления, гемостаза и эндотелиальной дисфункции. В исследование случай-контроль, описанное в [9], были включены 159 пациентов с ТГВНК (первая группа), 106 пациентов с ТГВНК и ТЭЛА (вторая группа) и 110 здоровых людей (группа контроля). Два варианта ранжирования изученных показателей приведены в таблице 1. В первом столбце собраны значения рангов десяти исследованных показателей по их значимости для диагностики ТГВНК, а во втором их же ранги при одновременном диагностировании ТГВНК и ТЭЛА.

Таблица 1

Ранги в медицинском примере

Показатель	Ранг 1	Ранг 2
Эндотелин	1	1
Растворимый фибрин	2	3
Гомоцистеин	3	7
Фибринолиз	4	2
Фибриноген	5	5
АПТВ	6	8
Фактор Виллебранда	7	4
Д-димеры	8	6
С-реактивный белок	9	9
Система протеина С	10	10

Значение коэффициента корреляции между рядами рангов таблицы 1 равно 0,769697. Произведем вычисления по формуле (11). Привлекая значения повторностей 10-диапазона, приведенные в таблице 2 (значения коэффициента корреляции в ней округлены до двух знаков после запятой), получим $Q = 0,012556$, что указывает на высокую значимость силы статистической связи между рядами рангов. Таким образом, с точки зрения проблем диагностики рассмотренных заболеваний различия в степенях значимости каждого из факторов являются несущественными, и для установления диагноза можно пользоваться любым из двух способов их ранжирования без риска совершения серьезной ошибки.

Таблица 2

Фрагмент 10-диапазона

R_k	1	0,99	0,98	0,96	0,95
$s_k(10)$	1	9	28	51	107
R_k	0,94	0,93	0,91	0,9	0,89
$s_k(10)$	177	234	360	498	619
R_k	0,88	0,87	0,85	0,84	0,83
$s_k(10)$	819	1040	1252	1528	1824
R_k	0,82	0,81	0,79	0,78	0,77
$s_k(10)$	2010	2533	2837	3180	3676

6. Обсуждение результатов. Здесь мы остановимся лишь на описанном в предыдущем разделе применении. Проверка значимости коэффициентов корреляции чаще всего традиционно связывается с применением распределения Стьюдента.

Так, уровень значимости выборочного коэффициента корреляции, рассчитанного по n измерениям, принимается равным

$$Q_0 = 2\left(1 - F^{-1}\left(|R|\sqrt{n-2}/\sqrt{1-R^2}\right)\right), \quad (12)$$

где F^{-1} — обратная (интегральная) функция распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Этот и другие классические подходы рассматриваются, например, в [10, 11]. Но здесь можно говорить об удовлетворительной точности только в предположениях нормальности совместного распределения изучаемых показателей или по крайней мере того, что n достаточно велико. Изученный же нами случай, вероятно, следует считать наиболее сильно отличающимся от классического. Здесь речь идет о дискретных распределениях, а на объем выборок не накладывается никаких ограничений.

При этом, например, (11) уже при $n = 6$ показывает, что значение коэффициента корреляции 0,828571 (три шага в 6-диапазоне) обладает значимостью $Q = 0,058$, тогда как (12) дает $Q_0 = 0,042$. Таким образом, с обычной точки зрения указанное значение R следует признать незначимым на стандартном уровне доверия 0,05, тогда как предлагаемая нами точная процедура указывает на наличие статистически значимой связи между ранговыми рядами. Вообще, вычислительные эксперименты показывают, что при малых объемах данных (11) всегда дает более высокий уровень значимости, чем критерий Стьюдента. Следовательно, применение нашей методики позволит обоснованно установить наличие связи в некоторых важных случаях, когда традиционные методы ее «не замечают».

7. Заключение. В процессе изучения взаимного расположения векторов с различными целочисленными координатами, отложенными от начала координат в многомерном пространстве, был выявлен и исследован определенный вид симметрии, — наличие q-слоев в этом векторном ансамбле. Каждый такой слой составлен из векторов, образующих с основным, центральным вектором набора, один и тот же угол. Проанализирована возможность подсчета количеств векторов в каждом из образовавшихся слоев, в некоторых «крайних» случаях эти количества точно рассчитаны. Результаты расчета удалось использовать для построения точного статистического критерия проверки значимости нескольких ранжирований статистических показателей, не обязательно являющихся числовыми. Приложением полученных результатов к обработке реальных медицинских данных явилось принятие обоснованного решения в задаче дифференциальной диагностики различных видов тромбоэмболии.

Библиографический список

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М., 1966.

2. Berg M., van Kreveld M., Overmars M., Schwarzkopf O. Computational Geometry: Algorithms and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2000.

3. Бухштаб А.А. Теория чисел. М., 1960.

4. Dickson L.E. History of the Theory of Numbers. Vol. II Dyophantine Analysis. Mineola, N.Y., 2013.

5. Кудрявцев В.А., Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли. М., 1936.

6. Дронов С.В. Методы и задачи многомерной статистики. Барнаул, 2015.

7. Дронов С.В., Семенов С.Е. Минимальный эффект цикла в диапазоне возможных значений коэффициента ранговой корреляции // МАК: «Математики — Алтайскому краю : сб. трудов Всеросс. конф. по математике с междунар. участием. Барнаул, 2019.

8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М., 1994.

9. Петриков А.С. Шойхет Я.Н., Белых В.И. Многофакторный анализ риска тромбозов вен нижних конечностей, тромбоэмболии легочной артерии на основе маркеров воспаления, гемостаза и эндотелиальной дисфункции : монография. Барнаул, 2015.

10. Лемешко Б.Ю., Танасейчук А.В. Исследование распределения оценок коэффициента корреляции в зависимости от истинного значения корреляции : матер. VIII Междун. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2006. Новосибирск, 2006. Т.6.

11. Taylor John R. An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements (2nd ed.). Sausalito, CA, 1997.