УДК 519.6+536

# Численное решение одной задачи фильтрации жидкости в вязкоупругой пористой среде

*Р.А. Вирц*[1], *А.А. Папин*[1], *В.А. Вайгант*[2]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Боннский университет (Бонн, Германия)

# Numerical Solution of a Problem of Fluid Filtration in a Viscoelastic Porous Medium

*R.A. Virts*[1], *A.A. Papin*[1], *W.A. Weigant*[2]

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Bonn University (Bonn, Germany)

Рассматривается модель фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде. Процесс фильтрации может быть описан системой, состоящей из уравнений сохранения массы для жидкой и твердой фаз, закона Дарси, реологического соотношения для пористой среды и закона сохранения баланса сил. Используется предположение, что пороупругая среда обладает и вязкими и упругими свойствами. В одномерном случае переход к переменным Лагранжа позволяет свести исходную систему определяющих уравнений к системе двух уравнений для эффективного давления и пористости соответственно. Целью работы является численное исследование возникающей начально-краевой задачи. В пункте 1 даны постановка задачи и краткий обзор литературы по близким к данной теме работам. В пункте 2 проводится преобразование исходной системы уравнений, в результате которого возникает уравнение второго порядка для эффективного давления и уравнение первого порядка для пористости. В пункте 3 предложен алгоритм численного решения начально-краевой задачи. Для численной реализации используется разностная схема для уравнения теплопроводности с правой частью и схема Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации.

***Ключевые слова***: пористость, фильтрация, пороупругость, закон Дарси.

**DOI 10.14258/izvasu(2020)1-11**

The paper considers a model for filtering a viscous incompressible fluid in a deformable porous medium. The filtration process can be described by a system consisting of mass conservation equations for liquid and solid phases, Darcy's law, rheological relation for a porous medium, and the law of conservation of balance of forces. This paper assumes that the poroelastic medium has both viscous and elastic properties. In the one-dimensional case, the transition to Lagrange variables allows us to reduce the initial system of governing equations to a system of two equations for effective pressure and porosity, respectively. The aim of the work is a numerical study of the emerging initial-boundary value problem. Paragraph 1 gives the statement of the problem and a brief review of the literature on works close to this topic. In paragraph 2, the initial system of equations is transformed, as a result of which a second-order equation for effective pressure and the first-order equation for porosity arise. Paragraph 3 proposes an algorithm to solve the initial-boundary value problem numerically. A difference scheme for the heat equation with the right-hand side and a Runge–Kutta second-order approximation scheme are used for numerical implementation.

***Key words***: porosity, filtration, poroelasticity, Darcy law.

**1. Постановка задачи.** В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial\phi\rho_f}{\partial t}+div(\phi\vec{v}_f\rho_f)=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\rho_s(1-\phi)}{\partial t}+div((1-\phi)\vec{v}_s\rho_s)=0, \qquad (2)$$

$$\phi(\vec{v}_f-\vec{v}_s)=-k(\phi)(\nabla p_f+\rho_f\vec{g}), \qquad (3)$$

$$divv_s=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)(\tfrac{\partial p_e}{\partial t}+\vec{v}_s\cdot\nabla p_e), \qquad (4)$$

$$p_e=p_{tot}-p_f,$$

$$\nabla p_{tot}-\rho_{tot}\vec{g}=0, \qquad (5)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s. \quad (6)$$

Система (1)–(6) решается в области $(\vec{x}, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \in R^n$ при краевых и начальных условиях

$$\vec{v}_s\mid_{\partial Q_T} = \vec{v}_f\mid_{\partial Q_T} = 0, \quad \phi\mid_{t=0} = \phi^0(x).$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v_f}, \vec{v_s}$ — соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, $\phi$ — пористость, $p_f, p_s$ — соответственно давления жидкой и твердой фаз, $p_e$ — эффективное давление, $p_{tot}$ — общее давление, $\rho_{tot}$ — плотность двухфазной среды, $\vec{g}$ — вектор ускорения силы тяжести; $k(\phi)$ — коэффициент фильтрации, $a_1(\phi)$ — коэффициент объемной вязкости, $a_2(\phi)$ — коэффициент объемной сжимаемости. Плотности жидкой и твердой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, t) \in Q_T$.

Математические модели фильтрации представляют особый интерес в связи с их широким применением в различных областях исследований. Рассматриваемая в данной работе модель применима для описания процессов фильтрации жидкостей через пористые среды, например: движение магмы в земной коре, движение грунтовых вод, нефти и газа [1–4]. Отличительным моментом при исследовании данного рода задач является учет сжимаемости пористого скелета. В настоящей работе учитывается деформация пористой среды, т.е. функция пористости является искомой.

Близкие по структуре системы уравнений рассматривались в [5–12]. В этих работах на основе ряда упрощающих предположений исходные системы сводились к одному уравнению высокого порядка. В [5] установлена локальная разрешимость задачи Коши пространствах С. Л. Соболева. В [6, 7] исследованы решения типа «простой волны». В работе [8] проведено численное исследование одномерной задачи фильтрации жидкости в случае преобладания вязких свойств пороупругой среды. Численное исследование одномерного движения магмы в отсутствие массовых сил проведено в [9]. Вопросы обоснования моделей фильтрации в деформируемой пористой среде в модельных случаях исследованы в [13–18].

**2. Одномерная задача.** Рассмотрим одномерный случай и перейдем в этой системе уравнений к переменным Лагранжа [15]. Пусть $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x, t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} = v_s(\bar{x}, \tau), \quad \bar{x}\mid_{\tau=t} = x.$$

Положим $\hat{x} = \bar{x}(0, x, t)$ и возьмем за новые переменные $\hat{x}$ и $t$. Тогда $1 - \phi(\hat{x}, t) = (1 - \phi^0(\hat{x}))\hat{J}(\hat{x}, t)$, где $\hat{J}(\hat{x}, t) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(\hat{x}, t)$ — якобиан перехода. Вместо (1)–(6) имеем

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}\hat{v}_f) = v_s\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\hat{\phi},$$

$$\frac{\partial(1-\hat{\phi})}{\partial t} + \frac{(1-\hat{\phi})^2}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = 0,$$

$$\hat{\phi}(\hat{v}_s - \hat{v}_f) = k(\phi)(\frac{1-\hat{\phi}}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat{p}_f}{\partial \hat{x}} - \hat{\rho}_f\hat{g}),$$

$$\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = -a_1(\hat{\phi})\hat{p}_e - a_2(\hat{\phi})\frac{\partial \hat{p}_e}{\partial t},$$

$$\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat{p}_{tot}}{\partial \hat{x}} = -\hat{\rho}_{tot}\hat{g}.$$

Поскольку

$$\hat{v}_s\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}\hat{v}_s) - \hat{\phi}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}},$$

то уравнение неразрывности для жидкой фазы можно привести к виду:

$$\frac{1}{1-\hat{\phi}}\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) + \frac{1}{1-\phi^0}\hat{\phi}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = 0.$$

Используя уравнение неразрывности для твердой фазы, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi}}\right) + \frac{1}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) = 0.$$

Переходя от $(\hat{x}, t)$ к массовым лагранжевым переменным $(y, t)$ по правилу $(1 - \phi^0(\hat{x}))d\hat{x} = dy$, $y(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}}(1 - \phi^0(\eta))d\eta \in [0, 1]$ и формально заменяя $y$ на $x$, приходим к следующей системе:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \quad (8)$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g), \quad (9)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot}g, \quad (10)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}. \quad (11)$$

Второе уравнение системы с учетом закона Дарси принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi})-\frac{\partial}{\partial x}(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}-\rho_f g))=0. \quad (12)$$

Далее рассматривается случай, когда $a_1(\phi)=\alpha\phi$, $a_2(\phi)=\beta\phi$. Из (7) и (11) следует уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\frac{\phi}{1-\phi}\right)=-\alpha p_e-\beta\frac{\partial p_e}{\partial t}. \quad (13)$$

Используя представление (10) и уравнения (12) и (13), получим уравнение для определения функции $p_e$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_e}{\partial x}+g(\rho_{tot}+\rho_f))\right)=$$
$$=\frac{\phi}{1-\phi}(\alpha p_e+\beta\frac{\partial p_e}{\partial t}). \quad (14)$$

Из (13) вытекает следующее представление для пористости:

$$\frac{\phi}{1-\phi}=\frac{\phi^0}{1-\phi^0}exp(-\alpha\int_0^t p_e(x,\tau)d\tau-$$
$$-\beta(p_e(x,t)-p_e^0(x))),$$

гарантирующее выполнение физического принципа максимума $0<\phi<1$ при $\phi^0\in(0,1)$ и достаточной гладкости $p_e$.

Уравнение (13) для нахождения пористости перепишем в виде:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=(-\alpha p_e-\beta\frac{\partial p_e}{\partial t})\phi(1-\phi). \quad (15)$$

Перейдем в уравнениях (14) и (15) к безразмерным переменным $x'=x/L$, $t'=t/T$, $p_e'=p_e/P$. Так как $\alpha=1/\eta$, $\beta=\beta_\phi$, $k(\phi)=k\phi^n/\mu$, то в уравнениях возникнут безразмерные параметры $\lambda=\frac{Tk}{\beta_\phi L^2\mu}$, $\varepsilon=\frac{Tkg\rho_s}{P\beta_\phi L\mu}$, $\gamma=\frac{T}{\eta\beta_\phi}$, $A=\frac{PT}{\eta}$, $B=\beta_\phi P$. Рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть в исходной области в переменных Эйлера на границах берутся условия $v_s\mid_{x=0,x=1}=v_f\mid_{x=0,x=1}=0$, тогда, учитывая (9), приходим к задаче для отыскания функций $p_e$ и $\phi$:

$$\frac{\partial p_e}{\partial t}=\frac{\lambda}{a(\phi)}\frac{\partial}{\partial x}\left(b(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial x}\right)+f, \quad (16)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=(-Ap_e-B\frac{\partial p_e}{\partial t})\phi(1-\phi), \quad (17)$$

$$\left(b(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial x}+c(\phi)\right)\mid_{x=0,x=1}=0,$$
$$p_e\mid_{t=0}=p_e^0(x),\quad \phi\mid_{t=0}=\phi^0(x), \quad (18)$$

где $f=\frac{\varepsilon}{a(\phi)}\frac{\partial c(\phi)}{\partial x}-\gamma p_e$, $a(\phi)=\frac{\phi}{1-\phi}$, $b(\phi)=\phi^n(1-\phi)$, $c(\phi)=\phi^n(\frac{\phi\rho_f}{\rho_s}+(1-\phi)+\frac{\rho_f}{\rho_s})$.

**3. Численное исследование.** В области $Q_T=[0,1]\times[0,1]$ построим сетку с шагами $h=1/N$, $\tau=1/M$. Значение сеточной функции $\phi(x,t)$, $p_e(x,t)$ в узлах сетки $(x_i,t_n)$ будем обозначать $\phi_i^n$, $p_i^n$, $i=0,1,...,N$; $n=0,1,...,M$.

Уравнение (16) аппроксимируем разностной схемой для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами [19, с. 407]:

$$a_i^n\frac{p_i^{n+1}-p_i^n}{\tau}=\lambda\wedge(\sigma p_i^{n+1}+(1-\sigma)p_i^n)+\varphi_i^n,$$
$$i=1,2,...,N-1,\quad n\geq 0, \quad (19)$$

где $\wedge p=(bp_{\bar{x}})_x$, $\sigma=1$, $\varphi_i^n=\varepsilon\frac{c_{i+1}^n-c_{i-1}^n}{2h}-a_i^n\gamma p_i^n$. Уравнение (17) аппроксимируем методом Рунге-Кутта второго порядка [20, с. 219]:

$$\phi_i^{n+1}=\phi_i^n+0.5\tau(k_1+k_2), \quad (20)$$

где $k_1=\bar{f}(p_i^n,\phi_i^n)$, $k_2=\bar{f}(p_i^n,\phi_i^n+\tau k_1)$, $\bar{f}=(-Ap_e-B\frac{\partial p_e}{\partial t})\phi(1-\phi)$.

Алгоритм счета следующий: из уравнения (19), используя начальное приближение для пористости, находим $p_i^1$, далее из уравнения (20) находим значение пористости на следующем временном слое. Повторяем алгоритм $M$ раз.

Рассмотрим следующие значения физических параметров [21, с. 563]: положим, $\eta=10^{13}$ Па · с, $\beta_\phi=10^{-8}$ Па$^{-1}$, $k=10^{-8}$ м$^2$, $L=10^3$ м, $\mu=1$ Па · с, $P=10^5$ Па, $g=10$ м/с$^2$, $\rho_s=3\cdot10^3$ кг/м$^3$, $T=10^6$ с , тогда $\lambda=1$, $\varepsilon=3\cdot10^2$, $\gamma=10$, $A=10^{-2}$, $B=10^{-3}$. Если $T=10^5$ с, то $\lambda=10^{-1}$, $\varepsilon=3\cdot10^1$, $\gamma=1$, $A=10^{-3,}$ $B=10^{-3}$. Если $T=10^7$ с, то $\lambda=10$, $\varepsilon=3\cdot10^3$, $\gamma=10^2$, $A=10^{-1}$, $B=10^{-3.}$ В качестве начального значения для пористости выбрано $\phi^0(x)=0.5$. Изменение пористости и эффективного давления представлено на рис. 1, 4 и 2, 5 соответственно. Скорости фаз представлены на рис. 3, 6, 7.

Устойчивость вычислительного алгоритма проверяется путем вычислительных экспериментов, применяя известное правило Рунге [22, с. 75]

$$R\approx\frac{p(x,h)-p(x,h/2)}{2^p-1}.$$

Под $p$ понимается порядок точности использованного численного метода, под $R$ — погрешность решения $p(x,h/2)$. Достаточно провести два расчета на сетках с шагами $h_1=h$, $h_2=h/2$, $\tau_i=\lambda h_i$, $\lambda=const$, $i=1,2$. Наблюдения ведутся за эффективным давлением $p_e$. В рассматриваемом случае $p=2$, $R\approx0.005$, и приближенно определяемая относительная погрешность $\tilde{\varepsilon}\approx2\%$.

**4. Заключение.** В работе проведено численное исследование одномерной нелинейной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде.

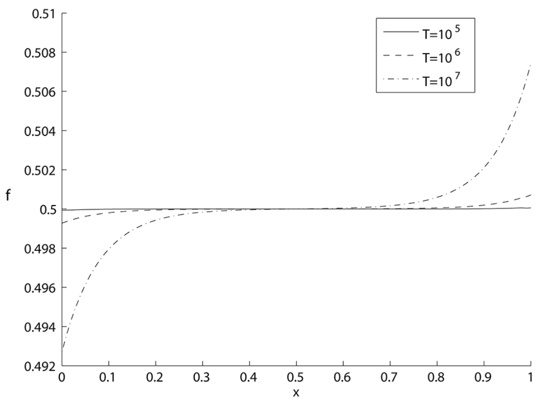


Рис. 1. Изменение пористости при $t = 1$

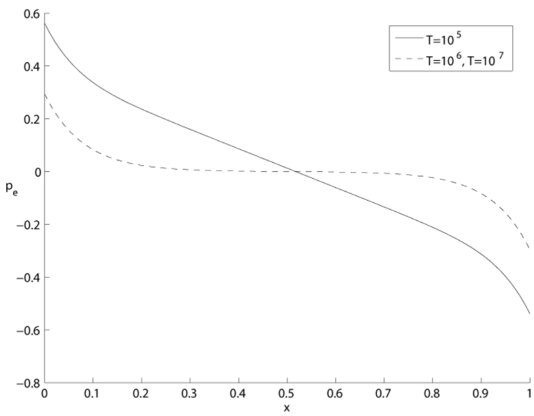


Рис. 2. Изменение эффективного давления $t = 1$

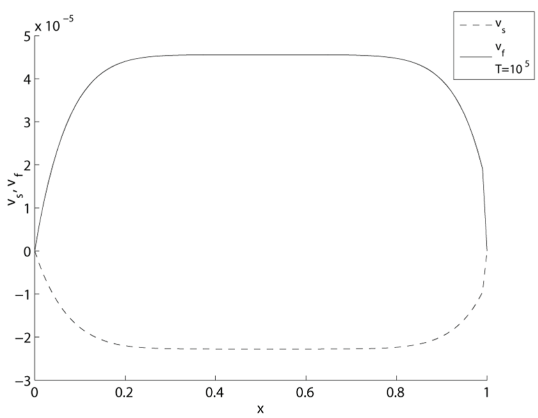


Рис. 3. Изменение скоростей фаз при $t = 1$

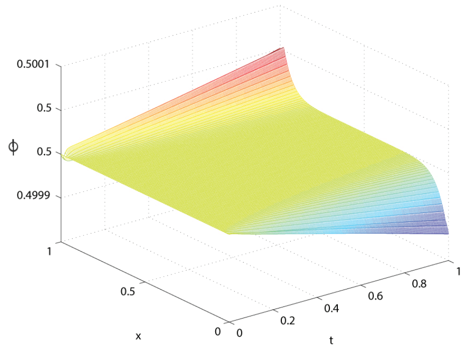


Рис. 4. Пористость при $T = 10^5$ с

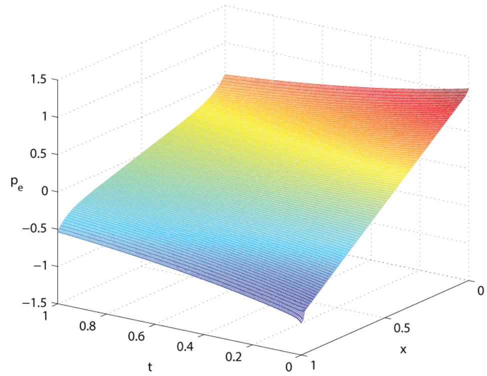


Рис. 5. Эффективное давление при $T = 10^5$ с

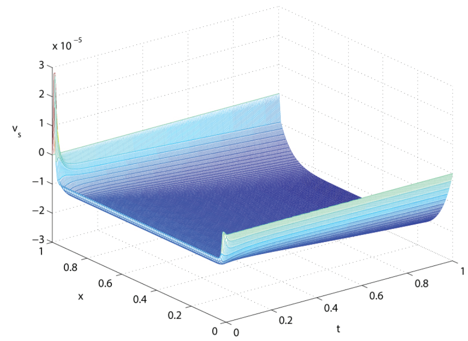


Рис. 6. Скорость твердой фазы $T = 10^5$ с

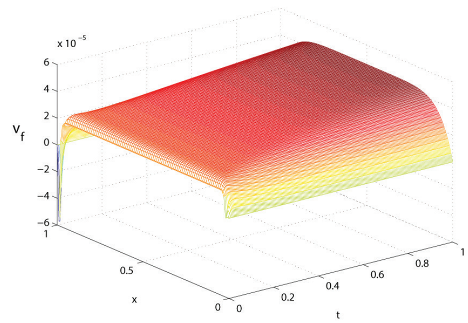


Рис. 7. Скорость жидкой фазы $T = 10^5$ с

## Библиографический список


1. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media // Elseiver. New York. 1972.

2. Connoly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta, 11 (1998). DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5.

3. Morency S., Huismans R.S., Beaumont C, Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Redearch, 112(2007), B10407. DOI: 10.1029/2006JB004701.

4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М., 1987. Ч. 1.

5. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein C.I. Degenerate dispersive equations arising in the stady of magma dynamics // Nonlinearty, 20(2007). DOI: 10.1088/0951-7715/20/1/003.

6. Abourabia A.M., Hassan K.M., Morad A.M. Analytical solutions of the magma equations for molten rocks in a granular matrix // Chaos Solutions Fract., 42(2009). DOI: 10.1016/j.chaos.2009.03.078.

7. Geng Y., Zhang L. Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equations // Applied Mathematics and computation, 217(2010). DOI: 10.1016/j.amc.2009.11.035.

8. Вирц Р.А., Папин А.А., Вайгант В.А. Численное решение одномерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде // Известия Алт. гос. ун-та. 2018. № 4 (102). DOI: 10.14258/izvasu(2018)4-11.

9. Koleva M.N., Vulkov L.G. Numerical analysis of one dimensional motion of magma without mass forces // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. T. 366. DOI: 10.1016/j.cam.2019.07.003.

10. Токарева М.А., Вирц Р.А. Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде : сб. трудов Всероссийской конференции по математике "МАК-2016". 2016.

11. Байкин А.Н. Динамика трещины гидроразрыва пласта в неоднородной пороупругой среде : дисс. ... канд. физико-математических наук. Новосибирск, 2016.

12. Dushin V.R., Nikitin V.F., Legros J.C., Silnikov M.V. Mathematical modeling of flows in porous media // WSEAS Transactions on Fluid Mechanics. 2014. T. 9.

13. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problen for the equations of filtration poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. 2016. T. 722. №1. DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012037.

14. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial - boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // Journal of Physics: Conference Series. 2017. T. 894. № 1. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012070.

15. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local solvability of the system of the equation of one dimensional motion of magma // Журн. Сиб. федерального ун-та. Серия: Математика и физика. 2017. Т. 10. № 3. DOI: 10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395.

16. Токарева М.А. Конечное время стабилизации уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алт. гос. ун-та. 2015. Т. 2. № 1. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-28.

17. Tokareva M., Papin A. Solvability of the system of equations of one-dimensional movement of a viscous liquid in a deformable viscous porous medium // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2019. T. 1268. № 1. DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012053.

18. Tokareva M.A., Papin A.A. Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2019. T. 13. № 2. DOI: 10.1134/S1990478919020169.

19. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1977.

20. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., 1989.

21. Fowler A. Mathematical Geoscience. Springer-Verlag London Limited, 2011. DOI: 10.1007/s11004-012-9399-0.

22. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., 1978.