МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 519.677

Сравнительный анализ итерационных процессов вычисления равновесий в моделях олигополии

Г.И. Алгазин, Д.Г. Алгазина

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Comparative Analysis of Iterative Processes of Equilibrium Calculation in Oligopoly Models

G.I. Algazin, D.G. Algazina

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается проблема выбора оптимального поведения агентов в классической однопродуктовой модели конкурентного рынка при линейных функциях спроса и издержек агентов. Исследуются динамические процессы принятия решений в условиях неопределенности выбора решений конкурентами, осуществляемые как повторяемые статические игры на диапазоне допустимых ответов. Анализируются процессы, в которых рациональные агенты, наблюдая сложившуюся на рынке текущую цену товара, для уточнения принимаемых решений применяют подходы многошаговых рефлексивных игр и модели динамики коллективного поведения. Отличают процессы выбор текущей цели: в одном случае агенты при уточнении решений в качестве текущей цели выбирают свой текущий оптимальный объем выпуска, в другом — свои представления о текущих равновесных предельных издержках других агентов. Показано, что для олигополий с реакцией агентов по Курно и/или Штакельбергу процессы, в которых агенты ориентируются на ожидаемый оптимальный объем выпуска, представляются предпочтительнее, чем процессы, в которых агенты ориентируются на свои представления о равновесных предельных издержках конкурентов, поскольку предоставляют большие возможности для поиска равновесных состояний.

Ключевые слова: рынок олигополии, рефлексия, коллективное поведение, итерационные процессы, уточнение представлений, уточнение выпусков, условия сходимости.

DOI 10.14258/izvasu(2020)1-09

The problem of choosing the optimal behavior of agents in the classic one-product model of the competitive market under linear functions of demand and costs of agents is considered. The dynamic decision-making processes under conditions of uncertainty of decision making by competitors, performed as repeatable static games within a range of admissible answers, are investigated. The analysis targets processes with rational agents using approaches of multi-step reflexive games and models of collective behavior to refine the solutions while observing the current market prices of goods. The processes are distinguished by choosing the current targets: in one case, the agents choose their current output as the current targets when refining the solutions; in another case, the current targets are perceptions of agents about the current equilibrium marginal cost of other agents. It is shown that for oligopolies with Cournot and/or Stackelberg competition, processes with agents focused on the expected optimum output are more preferable than processes with agents focused on their perceptions of the equilibrium marginal costs of competitors because there are greater opportunities for finding equilibrium states.

Key words: oligopoly market, reflexion, collective behavior, iterative processes, refining perceptions, refining output, convergence conditions.

Введение

В некооперативных играх в нормальной форме каждый игрок должен находить лучшие ответы на ходы других игроков (окружения). Если описание игры не является общим знанием, игроки вынуждены осуществлять рефлексию (предсказывать ходы окружения). Решение игры, когда все игроки выберут равновесные по Нэшу [1] действия, часто требует ее многократного повторения. Теория коллективного поведения [2, 3] дополняет теорию игр тем, что дает такие механизмы, которые при достаточно слабых предположениях об информированности игроков позволяют при повторении игры прийти к равновесию.

В последнее время актуальны и вызывают повышенный научный интерес подходы теории коллективного поведения к решению рефлексивных некооперативных игр для прикладных моделей олигополии [4–14]. Решая проблему априорной и текущей неосведомленности о действиях других агентов рынка, агенты могут делать различные предположения о принципах принятия ими решений, их информированности, значениях неопределенных параметров и т.д. Соответствующие предположения порождают те или иные траектории текущих оптимальных ответов агентов на действия окружения. В настоящей статье представлен сравнительный анализ двух таких траекторий, которым посвящены публикации [5, 6, 8, 9].

Постановка задачи сравнительного анализа

В основу вычисления новых состояний агентов положены модели динамики коллективного (группового) поведения, представленные следующим многошаговым итеративным процессом (см., например, [2, 3]).

1. Каждый агент $i (i \in N = \{1,...,n\})$ в момент времени t наблюдает действия других агентов $\left\{x_i^{t-1}\right\}_{i\in N}$, выбранные ими в предыдущий $(t-1)$-й момент времени (начальные действия агентов $\left\{x_i^{0}\right\}_{i\in N}$ считаются заданными).

2. Каждый агент рассчитывает свое текущее положение цели w_i^{t-1} — такое его действие, которое максимизировало бы его целевую функцию при условии, что в текущем периоде t все агенты выбрали бы те же действия, что и в предыдущем (т.е. которые он наблюдает, см. п. 1).

3. Каждый агент в момент времени t уточняет свое предыдущее действие в $(t-1)$-м периоде, делая от него «шаг» к текущему положению цели: $x_i^t = x_i^{t-1} + \gamma_i^t (w_i^{t-1} - x_i^{t-1}), i \in N, t = 1, 2, \dots$, где $\gamma_i^t \in [0;1]$ — «величины шагов».

Процесс повторяется с п. 1.

В данной статье базовой прикладной моделью для проведения сравнительного анализа является классическая однопродуктовая модель олигополии с линейными функциями спроса и затрат агентов (см., например, [5, 6, 8, 9]). Кооперация между ними и ограничения мощности отсутствуют. Полагается, что выпуск каждого агента будет реализован по единой рыночной цене, которая определяется общим объемом выпуска. Агенты рациональны, и выбор ими объема выпуска направлен на максимизацию собственной прибыли. Традиционными для олигополистического рынка являются и гипотезы поведения агентов по Курно [15] и/или Штакельбергу [16].

Анализируемые здесь процессы рефлексии условно назовем как уточнение текущих объемов выпуска (обозначим УОВ) и уточнение текущих представлений о предельных издержках (УПИ).

Нами представлен сравнительный анализ условий сходимости процессов УОВ и УПИ для трех моделей поведения олигополистов: 1) все агенты действуют по Курно; 2) один агент действует по Штакельбергу, остальные — по Курно; 3) все агенты действуют по Штакельбергу. Полагается, что значения параметра «величина шагов» могут меняться во времени, но в каждый момент времени все агенты, выбирающие одну и ту же модель поведения, должны следовать политике единой длины шага.

Процесс УОВ. Его суть заключается в следующем: каждый агент в каждый текущий период (момент) времени, наблюдая выпуски всех агентов за предыдущий период и выбирая в качестве текущей цели соответствующий им свой оптимальный объем выпуска, корректирует свой объем выпуска в предыдущем периоде, делая от него «шаг» в направлении текущей цели.

Напомним, что, согласно предположению Курно относительно объемов выпуска, каждая фирма действует так, что не ожидает от своих конкурентов изменения объемов выпуска, даже если сама сделает это. Ведущим или фирмой по Штакельбергу называют агента, который занимает лидирующее положение среди остальных агентов за счет того, что точно знает их ответ на его выбор объема выпуска. Ниже в качестве ведущего для определенности принят первый агент ($i = 1$).

Процесс УОВ сходится при любых начальных данных, если, начиная с некоторого t при $n > 1$ выполняются условия [8, 9]:

1) в модели олигополии Курно

$$\gamma^t \in \left(0, \min\left\{1, \frac{4}{n+1}\right\}\right); \quad (1)$$

2) в модели олигополии с одним ведущим агентом

$$\frac{\gamma_1}{2} + \frac{n\gamma}{4} - \frac{n\gamma_1\gamma}{2(n+1)} < 1, \quad (2)$$

где $\gamma_1^t \equiv \gamma_1 \in (0; 1]$ (для ведущего агента) и $\gamma_i^t \equiv \gamma \in (0; 1]$ (для ведомых агентов);

3) в модели олигополии, в которой все агенты ведущие,

$$\gamma_1^t \in \left(0, \min\left\{1, \frac{2(n+1)}{n^2+1}\right\}\right]. \quad (3)$$

Процесс УПИ. Каждый агент в каждый текущий период (момент) времени, наблюдая выпуски всех агентов за предыдущий период и выбирая в качестве текущей цели соответствующие этим выпускам свои представления о равновесных предельных издержках остальных агентов, корректирует свои представления за предыдущий период, делая от них «шаг» в направлении текущей цели.

Процесс УПИ сходится при любых начальных данных, если, начиная с некоторого t при $n > 1$ выполняются условия [5, 6]:

1) в модели олигополии Курно при $\gamma_i^t \equiv \gamma$;

$$\gamma \in \left(0, \frac{2}{n}\right); \tag{4}$$

2) в модели олигополии с одним ведущим, если ведущий агент точно знает предельные затраты ведомых, а последние, в свою очередь, имеют неточные первоначальные представления о предельных затратах других агентов:

$$\gamma \in \left(0, \min\left\{1, \frac{4}{2n-1}\right\}\right), \tag{5}$$

где $\gamma_1^t \equiv 0$ (для ведущего агента) и $\gamma_i^t \equiv \gamma \in (0; 1]$ (для ведомых агентов);

3) в модели олигополии с одним ведущим, если а) все агенты имеют неточные первоначальные представления о предельных издержках конкурентов; б) лидер имеет неточные первоначальные представления о предельных издержках ведомых агентов, которые точно знают предельные издержки остальных агентов, но сами не знают об этом; в) лидер имеет неточные первоначальные представления о предельных издержках ведомых агентов, которые не знают точно предельные издержки лидера, а точно знают предельные издержки других ведомых агентов, но не знают об этом:

$$\frac{1}{1+\dfrac{2-(n-1/2)\gamma}{n-1}} + \frac{\gamma_1}{2} < 1. \tag{6}$$

Примечание: если г) лидер имеет неточные первоначальные представления о предельных издержках ведомых агентов, которые точно знают предельные издержки остальных агентов и знают об этом; д) лидер имеет неточные первоначальные представления о предельных издержках ведомых агентов, которые не знают точно предельные издержки лидера, а точно знают предельные издержки других ведомых агентов и знают об этом, то процесс не может сходиться к истинному положению равновесия [5];

4) в модели олигополии, в которой все агенты ведущие и $\gamma_i^t \equiv \gamma_1$

$$\gamma_1 \in \left(0, \frac{2}{n^2-n+1}\right). \tag{7}$$

Анализируемые процессы объединяет то, что все рациональные агенты для уточнения принимаемых решений применяют модели динамики коллективного поведения, наблюдая одну и ту же информацию (сложившуюся на рынке текущую цену товара или текущие выпуски). Отличают их выбор текущей цели: в одном случае агенты в качестве текущих целей выбирают свой текущий оптимальный объем выпуска, в другом — свои представления о текущих равновесных предельных издержках других агентов.

Как в том, так и другом случае динамика уточнения агентами своих решений может привести к равновесию. Но ее сходимость гарантируется при разных диапазонах значений параметров процесса.

Сравнительный анализ условий сходимости процессов и его результаты

Для олигополии Курно из (1) и (4) следует, что при n=2 нет различий между диапазонами значений параметров для сходящихся процессов УОВ и УПИ. При $n > 2$ имеем, что $\dfrac{4}{n+1} > \dfrac{2}{n}$.

Далее для рынка, на котором все агенты являются ведущими, из (3) и (7) имеем, что при $n > 1$выполняется неравенство $\dfrac{2(n+1)}{n^2+1} > \dfrac{2}{n^2-n+1}$.

Таким образом, в обоих случаях, если при каких-то значениях параметров процесс УПИ сходится, то УОВ тоже сходится.

Теперь проведем сравнительный анализ траекторий для олигополии с одним ведущим агентом.

Вначале рассмотрим формулы (2) и (5). Условия (5) надо привести к сравнимому виду. Здесь будем опираться на простой факт: пусть $A = \{x \in \Re^1 \mid f(x) < 1\}$ и $B = \{x \in \Re^1 \mid g(x) < 1\}$. Тогда, если $x^* \in B$ и $g(x^*) \geq f(x^*)$, то $x^* \in A$. При $n > 2$ условие (5) превращается в двойное неравенство $0 < \gamma < \dfrac{4}{2n-1}$, правую часть которого приведем к эквивалентному виду $\dfrac{(2n-1)\gamma}{4} < 1$.

Предположению к формуле (5), что ведущий агент точно знает предельные затраты ведомых и не уточняет их, соответствует равенство $\gamma_1 = 0$. Тогда в (2) имеем $\dfrac{n\gamma}{4} < 1$ и $\dfrac{(2n-1)\gamma}{4} > \dfrac{n\gamma}{4}$. При $n = 2$ условие (5) принимает вид $\gamma \in (0; 1]$ и очевидно $\gamma > \dfrac{n\gamma}{4} = \dfrac{\gamma}{2}$.

Основываясь на отмеченном выше факте и рассмотрении условий (2) и (5), получаем, что при $n > 1$ из сходимости процесса УПИ следует сходимость УОВ.

Рассмотрим формулы (2) и (6). Поскольку $1+\frac{2-(n-\frac{1}{2})\gamma}{2a}>0$, то преобразуем (6) следующим образом:

$$1<(1-\frac{\gamma_1}{2})\left[1+\frac{2-(n-\frac{1}{2})\gamma}{n-1}\right],\ \frac{2}{2-\gamma_1}<1+\frac{2-(n-\frac{1}{2})\gamma}{n-1},\ \frac{2}{2-\gamma_1}-1<\frac{4-\gamma}{2(n-1)}-\gamma,\ \frac{\gamma_1}{2-\gamma_1}+\gamma<\frac{4-\gamma}{2(n-1)}.$$

Из последнего выражения следует неравенство $\frac{(n-1)\gamma_1}{2(2-\gamma_1)}+\frac{(2n-1)\gamma}{4}<1$.

Покажем, что для его левой части и (2) выполняется $\frac{(n-1)\gamma_1}{2(2-\gamma_1)}+\frac{(2n-1)\gamma}{4}>\frac{\gamma_1}{2}+\frac{n\gamma}{4}-\frac{n\gamma_1\gamma}{2(n+1)}$, $(n>2)$.

Действительно, $\frac{(n-1)\gamma_1}{2(2-\gamma_1)}-\frac{\gamma_1}{2}+\frac{n\gamma_1\gamma}{2(n+1)}+\frac{(2n-1)\gamma}{4}-\frac{n\gamma}{4}=\frac{\gamma_1(n-3+\gamma_1)}{2(2-\gamma_1)}+\frac{n\gamma_1\gamma}{2(n+1)}+\frac{(n-1)\gamma}{4}>0$.

Поэтому, если $n>2$ и для параметров γ и γ_1 выполнено условие (6), то будет выполнено и условие (2).

Пусть $n=2$. Тогда левая часть (6) будет равна $\frac{2}{3(2-\gamma)}+\frac{\gamma_1}{2}$, а левая часть (2) — $\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma_1\gamma}{3}$. Покажем, что $\frac{2}{3(2-\gamma)}+\frac{\gamma_1}{2}>\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma_1\gamma}{3}$. Поскольку $\frac{2}{3(2-\gamma)}>\frac{\gamma}{2}$, т. к. $4>3\gamma(2-\gamma)$ и $1+3(1-\gamma)^2>0$, то $\frac{2}{3(2-\gamma)}>\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma_1\gamma}{3}$, что и требовалось показать.

Таким образом, из (2) и (6) также получаем, что для олигополии с одним ведущим агентом при $n>1$ из сходимости процесса УПИ следует сходимость УОВ.

Общие выводы из сравнительного анализа между собой динамик УПИ и УОВ для каждой из трех моделей поведения агентов с реакцией по Курно и/или Штакельбергу на действия окружения:

1) для всех рассмотренных моделей УОВ дает больше возможностей по выбору значений параметров, чем УПИ. Если процесс УПИ сходится, то УОВ сходится для тех же значений параметров;

2) вычисление процедуры УОВ проще и менее трудоемко.

Проведем также сопутствующий анализ, в котором будем сравнивать диапазоны сходимости динамик УПИ и УОВ в разных моделях поведения агентов. Рассмотрим некоторые допустимые с точки зрения содержательного смысла сравнения.

Сравниваем (1) и (5). В (5) $\gamma_1=0$. Для ведомых агентов имеем, что $\frac{4}{n+1}>\frac{4}{2n-1}$ при $n>2$. При $n=2$ как в том, так и другом случае сходимость обеспечивается, когда $\gamma\in[0;1]$. Таким образом, если для ведомых агентов при каких-то значениях параметров в модели Штакельберга процесс УПИ сходится, то при этих значениях будет сходиться процесс УОВ в модели Курно.

Сравниваем (6) и (5). После преобразования (6) к эквивалентному условию $\frac{4}{2(2-\gamma_1)}+\frac{(2n-1)\gamma}{4}<1$ имеем $\frac{(n-1)\gamma_1}{2(2-\gamma_1)}+\frac{(2n-1)\gamma}{4}>\frac{(2n-1)\gamma}{4}$, если $\gamma_1\in[0;1]$. Поэтому, если в модели Штакельберга, когда лидер имеет неточные первоначальные представления о предельных издержках ведомых, процесс УПИ сходится, то он будет сходиться для случая, когда лидер точно знает предельные издержки ведомых.

Сравниваем (5) и (4). Имеем $\frac{4}{2n-1}>\frac{2}{n}$. Поэтому, если процесс УПИ сходится в модели Курно, то при тех же значениях параметров для ведомых агентов он будет сходиться в модели Штакельберга, когда лидер точно знает предельные издержки ведомых.

Заключение

Моделирование рационального поведения агентов на рынке олигополии при неполной их информированности обусловливает необходимость многократного повторения игры и построения траектории принятых решений. Важным для всех участников рынка является построение такой траектории, которая бы гарантированно приводила к равновесию и была наиболее эффективной с точки зрения предположений относительно текущей информированности агентов в условиях ограниченности их когнитивных возможностей, возможностей агентов в определении величины шагов, скорости сходимости.

Рассмотрены две траектории достижения равновесия, основанные на модели коллективного поведения и использующие минимальную информацию агентов о рынке. Такой информацией выступает текущая цена товара. Проведен сравнительный анализ условий на величины шагов для сходимости траекторий. Для рассмотренных моделей поведения агентов на рынке олигополии траектория, построенная путем уточнения по текущей цене объемов выпуска, считается предпочтительнее, чем траектория, полученная уточнением по текущей цене представлений о предельных издержках конкурентов. Однако пока открытым остается вопрос о сравнительной оценке их скоростей сходимости.

Библиографический список

1. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. № 54. DOI: 10.2307/1969529.

2. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М., 1977.

3. Беленький В.З., Волконский В.А. и др. Итеративные методы в теории игр и программировании. М., 1974.

4. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden, 2014. DOI: 10.1201/b16625.

5. Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Automation and Remote Control. 2017. № 78 (9). DOI: 10.1134/S0005117917090077.

6. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г., Пятковский О.И. Неравновесие по Штакельбергу и динамика коллективного поведения // Изв. Алт. гос. ун-та. 2017. № 1 (93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-11.

7. Geras'kin M.I. Modeling Reflection in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Automation and Remote Control. 2018. № 79 (5). DOI: 10.1134/S0005117918050065.

8. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Динамика рефлексивного коллективного поведения в модели олигополии с лидерами // Изв. Алт. гос. ун-та. 2018. № 1 (99). DOI: 10.14258/izvasu(2018)1-11.

9. Алгазина Д.Г., Алгазина Ю.Г. Динамика и равновесие в модели Курно при неполной информации // Вестник СибГУТИ. 2019. № 4.

10. Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В. Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20. № 1. DOI: 10.17377/SIBJIM.2017.20.102.

11. Gao X., Zhong W., Mei S. Convergence of a Cournot Oligopoly Game with Extrapolative Expectations. Southeast University. China. 2012. URL: http://www.ecocyb.ase.ro/32012/Xing%20Gao.pdf.

12. Yang H., Zhang Y. Complex Dynamics Analisis for Cournot Game with Bounded Rationality in Power Market // J. Electromagnetics Analisis & Applicftions. 2009. № 1.

13. Kamalinejad H., Majda V.J., Kebriaei H., Kian A.R. Cournot Games with Linear Regression Expectations in Oligopolistic Markets // Mathematics and Computers in Simulation. 2010. V. 80. № 9. DOI: 10.1016/j.matcom.2010.02.002.

14. Vasin A. Game-Theoretic Study of Electricity Market Mechanism s // Procedia Computer Science. 2014. № 31. DOI: 10.1016/j.procs.2014.05.252.

15. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London, 1960 (Original 1838).

16. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium: 1 st Edition. Translation into English. Basin, Urch&Hill, Springer. 2011 (Original 1934).