МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 514.1

Золотое сечение, аффинорные структуры и обобщенные симметрические пространства*

В.В. Балащенко

Белорусский государственный университет (Минск, Беларусь)

Golden Ratio, Affinor Structures, and Generalized Symmetric Spaces

V.V. Balashchenko

Belarusian State University (Minsk, Belarus)

Известно, что наиболее важными аффинорными структурами на гладких многообразиях являются почти комплексные структуры, структуры почти произведения, f-структуры Кентаро Яно и некоторые другие. Однако в последнее десятилетие новый тип аффинорных структур был введен и интенсивно обсуждался в дифференциальной геометрии. Это так называемые золотые структуры, впервые введенные М. Красмареану и К.-Э. Хретчану с использованием хорошо известного квадратного уравнения для золотого сечения. С тех пор ряд работ был посвящен изучению интегрируемости золотых структур, согласованных римановых метрик и связностей, подмногообразий в таких многообразиях и т.д. В то же время инвариантные золотые структуры на однородных многообразиях в этих исследованиях не появлялись. В данной статье предъявлен обширный класс инвариантных золотых структур на однородных обобщенных симметрических пространствах. Более точно, мы получили полное описание всех канонических золотых структур на однородных k-симметричных пространствах. Примечательной особенностью этих структур является то, что все они инвариантны как относительно действующей группы Ли, так и относительно обобщенных симметрий порядка k однородных k-симметрических пространств.

Ключевые слова: золотая структура, структура почти произведения, каноническая аффинорная структура, однородное k-симметрическое пространство.

It is known that the most important affinor structures on smooth manifolds are almost complex structures, almost product structures, f-structures of Kentaro Yano, and some others. However, a new type of affinor structures was introduced and intensively discussed in differential geometry in the last decade. These are the so-called Golden structures first introduced by M. Crasmareanu and C.-E. Hretcanu using the well-known quadratic equation for the Golden ratio. Since then, a number of papers have been devoted to the study of the integrability of Golden structures, compatible Riemannian metrics and connections, submanifolds in such manifolds, etc. At the same time, invariant Golden structures on homogeneous manifolds have not appeared in these investigations. In this paper, a wide collection of invariant Golden structures on homogeneous generalized symmetric spaces is presented. More precisely, we obtained a complete description of all canonical Golden structures on homogeneous k-symmetric spaces. A remarkable feature of these structures is that all of them are invariant with respect to both the acting Lie group as well as the generalized symmetries of order k of homogeneous k-symmetric spaces.

Key words: golden structure, almost product structure, canonical affinor structure, homogeneous k-symmetric space.

DOI 10.14258/izvasu(2019)4-09

1. Введение. Аффинорной структурой на гладком многообразии называется тензорное поле типа (1, 1), реализованное в виде поля эндоморфизмов, действующих в касательном

*Работа частично поддержана грантом Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

расслоении к данному многообразию. Наличие таких структур несет существенную информацию об исходном многообразии. К числу классических аффинорных структур на гладких многообразиях традиционно относят почти комплексные структуры J ($J^2 = -id$), структуры почти произведения P ($P^2 = id$), f-структуры К. Яно ($f^3 + f = 0$) и ряд других. К настоящему времени имеется немало обобщений этих структур, а также ряд иных структур полиномиального типа на многообразиях. В частности, в нескольких недавних работах (см., например, [1, 2]) были введены и изучались т.н. *золотые структуры* на многообразиях. Это направление исследований было активно подхвачено в серии последующих работ (см., например, [3–7]).

Инвариантные аффинорные структуры на однородных многообразиях вызывают особый интерес в силу возможности использования сильного аппарата теории групп Ли и алгебр Ли. Важным классом таких структур являются канонические аффинорные структуры на обобщенных симметрических пространствах, поскольку они инвариантны дополнительно и относительно обобщенных симметрий этих однородных многообразий.

В данной работе предъявлено полное описание канонических золотых структур на однородных k-симметрических пространствах.

2. Структуры золотого типа на гладких многообразиях. Как известно, золотым отношением (золотым сечением, золотым средним, числом Фидиаса) называется положительный корень $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Исходя из данного уравнения, в работе [1] аффинорная структура F на многообразии M, удовлетворяющая уравнению

$$F^2 = F + id,$$

была названа *золотой структурой (Golden structure)*. Заметим, что в недавних работах [6, 7] эта же структура названа *почти золотой структурой (almost Golden structure)*, что точнее соответствует принятой терминологии в теории аффинорных структур (например, отражает известную существенную разницу между почти комплексной и комплексной структурой на многообразии). В дальнейшем изложении мы будем называть такую структуру менее звучно, а именно: *структурой золотого типа.*

Отметим, что структуры золотого типа входят в широкую концепцию полиномиальных структур на гладких многообразиях [8, 9] и имеют степень 2, а потому обладают рядом примечательных свойств. Прежде всего если F — структура золотого типа, то структура $\tilde{F} = id - F$ также является структурой золотого типа. Эта своеобразная двойственность (F и $\tilde{F}$) соответствует естественным парам почти комплексных структур (J и $-J$), структур почти произведения (P и $-P$), f-структур (f и $-f$) и некоторых других.

Нетрудно заметить, что посредством линейной деформации структура золотого типа приводится к структуре почти произведения, и наоборот. Более точно: справедлива следующая

Теорема 1 [1] . *Если F — структура золотого типа, то структура*

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}(2F - id)$$

является структурой почти произведения. Обратно: структура почти произведения P порождает структуру золотого типа по формуле

$$F = \frac{1}{2}(id + \sqrt{5}P).$$

Кроме того, при таком соответствии $F \longleftrightarrow P$ имеем: $\tilde{F} = id - F \longleftrightarrow \tilde{P} = -P$.

Будем называть структуры F и P, описанные выше, *ассоциированными* друг другу.

Важно отметить, что тензоры Нейенхейса для ассоциированных структур F и P пропорциональны:

$$N_F(X, Y) = \frac{5}{4} N_P(X, Y)$$

для любых векторных полей X и Y на многообразии M [1]. Отсюда следует, что эти структуры интегрируемы либо неинтегрируемы одновременно.

Более того, распределения на многообразии M, порождаемые ассоциированными структурами F и P, совпадают. Действительно, обозначим через L_ϕ и $L_{1-\phi}$ взаимно дополнительные распределения, определяемые собственными значениями ϕ и $1 - \phi$ структуры золотого типа F. Тогда нетрудно показать, что $L_\phi = V$ и $L_{1-\phi} = H$, где V и H — вертикальное и горизонтальное распределение соответственно ассоциированной структуры почти произведения P.

Далее, пусть на многообразии M заданы риманова метрика g и структура золотого типа F. Говорят, что риманова метрика g согласована со структурой F, если

$$g(FX, Y) = g(X, FY)$$

для всех векторных полей X и Y на многообразии M [2]. В этом случае пара (g, F) называется *римановой структурой золотого типа* (в оригинале — *золотой римановой структурой (Golden Riemannian structure)*) [2]. Следует отметить, что (g, F) является римановой структурой золотого типа тогда и только тогда, когда ассоциированная структура (g, P) является римановой структурой почти произведения [1], т.е. выполняется условие

$$g(PX, PY) = g(X, Y).$$

Соответствующие распределения $L_\phi = V$ и $L_{1-\phi} = H$ для таких структур ортогональны относительно римановой структуры g.

Таким образом, исследование структур золотого типа фактически сводится к изучению ассоциированных структур почти произведения. При этом, как известно, важную роль играют инвариантные структуры на однородных многообразиях групп Ли. В связи с этим возникает следующая естественная

Задача: Предъявить классы однородных многообразий, обладающих инвариантными структурами золотого типа.

Оказалось, что обширный ресурс таких структур может быть указан в алгебре канонических структур на однородных k-симметрических пространствах.

3. Канонические структуры на однородных k-симметрических пространствах. Приведем в краткой форме сведения об однородных k-симметрических пространствах и канонических структурах на них (см., например, [10–13]).

Пусть G/H — *однородное* Φ-*пространство*, определяемое автоморфизмом Φ группы Ли G, т.е. для замкнутой подгруппы Ли H в G выполняется условие

$$G_o^\Phi \subset H \subset G^\Phi,$$

где G^Φ — подгруппа неподвижных точек автоморфизма Φ, G_o^Φ — связная компонента единицы e подгруппы G^Φ [12]. Однородные Φ-пространства содержат однородные симметрические пространства ($\Phi^2 = id$) и, более обще: *однородные* Φ-*пространства порядка* k ($\Phi^k = id$), в иной терминологии — *однородные* k-*симметрические пространства* (см. [13]).

Известно, что для любого однородного Φ-пространства G/H можно определить отображение S_o, которое является аналитическим диффеоморфизмом G/H [14]:

$$S_o = D\colon\ G/H \to G/H,\ xH \to \Phi(x)H.$$

Обычно S_o называют «симметрией» многообразия G/H в точке $o = H$. Очевидно, что в силу однородности можно определить «симметрию» S_p в произвольной точке $p \in G/H$. Более точно — для любых $p = \tau(x)o = xH,\ q = \tau(y)o = yH$ положим

$$S_p = \tau(x) \circ S_o \circ \tau(x^{-1}).$$

Легко показать, что

$$S_p(yH) = x\Phi(x^{-1})\Phi(y)H.$$

Поэтому любое однородное Φ-пространство обладает семейством симметрий $\{S_p \mid p \in G/H\}$, причем каждое отображение S_p является аналитическим диффеоморфизмом многообразия G/H (см. [14]).

Обозначим далее через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли, соответствующие группам Ли G и H. Пусть теперь $A = \varphi - id$, где $\varphi = d\Phi_e$ — соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Однородное Φ-пространство G/H называется *регулярным* Φ-*пространством*, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A\mathfrak{g}$ (см. [10, 12, 14]). Это разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ также является ее редуктивным разложением и называется *каноническим редуктивным разложением* [14] регулярного Φ-пространства G/H. При этом каноническое редуктивное дополнение $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$ является φ-инвариантным подпространством в $\mathfrak{g}$. Сужение φ на $\mathfrak{m}$ будем обозначать через θ.

Важно отметить, что все однородные Φ-пространства *порядка* k ($\Phi^k = id$), т.е. однородные k-симметрические пространства, регулярны [14], а потому редуктивны с указанным выше каноническим редуктивным разложением.

На регулярных Φ-пространствах выделяется важный класс инвариантных аффинорных структур, а именно, класс канонических структур. Напомним, что инвариантная аффинорная структура F на регулярном Φ-пространстве G/H называется *канонической* [10], если ее значение в точке o является полиномом от θ: $F = F(\theta)$.

Известно [10], что все канонические структуры образуют коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\theta)$ в алгебре $\mathcal{A}$ всех инвариантных аффинорных структур на однородном пространстве G/H. При этом все структуры алгебры $\mathcal{A}(\theta)$ на G/H инвариантны не только относительно действующей группы Ли G, но и всех обобщенных «симметрий» S_p.

Замечательной особенностью алгебры $\mathcal{A}(\theta)$ является наличие в ней значительного запаса структур классического типа (почти произведения, почти комплексные, f-структуры классического и гиперболического, т.е. h-структуры, типов), которые были полностью описаны (см., например, [10, 11]). Более того, для однородных k-симметрических пространств были предъявлены точные вычислительные формулы. Приведем здесь некоторые результаты, используемые в дальнейшем.

Пусть далее G/H — однородное k-симметрическое пространство. Для нашего рассмотрения достаточно указать точные формулы, позволяющие вычислить все канонические структуры почти произведения P. Будем использовать следующее обозначение:

$$u = \begin{cases} n, & \text{если} \quad k = 2n+1 \\ n-1, & \text{если} \quad k = 2n \end{cases}.$$

Теорема 2 [10, 11]. *Все канонические структуры почти произведения на однородном k-симметрическом пространстве G/H могут быть заданы полиномами*
$P = \sum\limits_{m=0}^{k-1} a_m \theta^m$, *где:*

1. *если $k = 2n+1$, то*

$$a_m = a_{k-m} = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{u} \xi_j \cos \frac{2\pi mj}{k};$$

2. *если $k = 2n$, то*

$$a_m = a_{k-m} = \frac{1}{k} \left(2 \sum_{j=1}^{u} \xi_j \cos \frac{2\pi mj}{k} + (-1)^m \xi_n \right).$$

Здесь числа ξ_j принимают значения из множества $\{-1; 1\}$.

4. Канонические структуры золотого типа. Используя теперь теоремы 1 и 2, получим полное описание всех канонических структур золотого типа на всех однородных k-симметрических пространствах.

Теорема 3 . *Все канонические структуры золотого типа на однородном k-симметрическом пространстве G/H могут быть заданы операторами*
$F = \frac{1}{2}(id + \sqrt{5} \sum\limits_{m=0}^{k-1} a_m \theta^m)$, *где:*

1. *если $k = 2n+1$, то*

$$a_m = a_{k-m} = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{u} \xi_j \cos \frac{2\pi mj}{k};$$

2. *если $k = 2n$, то*

$$a_m = a_{k-m} = \frac{1}{k} \left(2 \sum_{j=1}^{u} \xi_j \cos \frac{2\pi mj}{k} + (-1)^m \xi_n \right).$$

Здесь числа ξ_j принимают значения из множества $\{-1; 1\}$.

В частности, детализируем ситуацию для однородных k-симметрических пространств порядков 4 и 5.

Следствие 1 . *На однородном 4-симметрическом пространстве имеются следующие канонические структуры золотого типа:*

$$F = \frac{1}{2}(id + \sqrt{5}\theta^2), \quad \tilde{F} = \frac{1}{2}(id - \sqrt{5}\theta^2).$$

Следствие 2 . *Все канонические структуры золотого типа на однородном 5-симметрическом пространстве могут быть представлены в виде:*

$$F = -(\theta^2 + \theta^3) = -(\theta^2 + \theta^{-2}),$$

$$\tilde{F} = -(\theta + \theta^4) = -(\theta + \theta^{-1}).$$

Пусть далее на однородном k-симметрическом пространстве G/H задана (псевдо)риманова метрика g, инвариантная относительно группы G и обобщенных «симметрий» S_p порядка k. В случае полупростой группы Ли G классическим примером метрики g с указанными свойствами является так называемая стандартная метрика, индуцированная формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим также, что эта метрика на произвольном регулярном Φ-пространстве G/H естественно редуктивна относительно канонического редуктивного разложения (см. [14]).

Известно [11], что канонические структуры P, J, f, h с такой метрикой согласованы. В частности, для любой канонической структуры почти произведения P пара (g, P) является (псевдо)римановой структурой почти произведения. Отсюда с учетом приведенных выше фактов получаем следующий результат:

Теорема 4 . *Пусть $(G/H, g)$ — (псевдо)риманово однородное k-симметрическое пространство, где метрика g инвариантна относительно группы G и обобщенных «симметрий» S_p порядка k. Тогда любая каноническая структура золотого типа F согласована с такой метрикой, т.е. пара (g, F) является римановой структурой золотого типа.*

Анализируя вышеизложенное, можно сделать следующий основной

Вывод: Свойства структур золотого типа F могут быть получены из соответствующих свойств ассоциированных с ними структур почти произведения P. Отсюда следует, что многие из полученных ранее результатов о канонических распределениях и структурах на однородных k-симметрических пространствах могут быть адаптированы и переформулированы в терминах соответствующих канонических структур золотого типа.

В качестве примеров с использованием некоторых из ранее полученных результатов о канонических структурах на однородных 4- и 5-симметрических пространствах (см. [15,16]) доказаны следующие утверждения:

Теорема 5 . *Пусть G/H — однородное 4-симметрическое пространство,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$$

— каноническое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее канонической структуре почти произведения $P = \theta^2$. Пусть далее

$$F = \frac{1}{2}(id + \sqrt{5}\theta^2)$$

— каноническая структура золотого типа, ассоциированная со структурой P. Тогда распределение $L_\phi = V = \mathfrak{m}_2$ всегда интегрируемо. Кроме того, следующие условия эквивалентны:

(1) *структура F интегрируема;*

(2) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$*;*

(3) *распределение $L_{1-\phi} = H = \mathfrak{m}_1$ интегрируемо.*

Теорема 6 . *Пусть G/H — однородное 5-симметрическое пространство,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$$

— каноническое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее канонической структуре почти произведения $P = \frac{1}{\sqrt{5}}(\theta - \theta^2 - \theta^3 + \theta^4)$. Ассоциированная со структурой P каноническая структура золотого типа

$$F = -(\theta^2 + \theta^3)$$

интегрируема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{h}.$$

Заключение. В результате проведенных исследований получены полное описание и точные формулы для всех канонических структур золотого типа на однородных k-симметрических пространствах. Это позволило впервые предъявить обширный ресурс инвариантных структур золотого типа на однородных многообразиях групп Ли, а также указать метод получения содержательных результатов об этих структурах.

Библиографический список

1. Crasmareanu M., Hretcanu C.-E. Golden differential geometry // Chaos, Solitons and Fractals. 2008. V. 38.
2. Hretcanu C.-E., Crasmareanu M. Applications of the Golden ratio on Riemannian manifolds // Turkish J. Math. 2009. V. 33.
3. Gezer A., Cengiz N., Salimov A. On integrability of Golden Riemannian structures // Turkish J. Math. 2013. V. 37.
4. Ozkan M. Prolongations of golden structures to tangent bundles // Differ. Geom. Dyn. Syst. 2014. V. 16.
5. Sahin B., Akyol M.A. Golden maps between golden Riemannian manifolds and constancy of certain maps // Math. Commun. 2014. V. 19, no. 2.
6. Etayo F., Santamaria R., Upadhyay A. On the geometry of almost Golden Riemannian manifolds // Mediterr. J. Math. 2017. V. 14, no. 5.
7. Erdem S. On product and golden structures and harmonicity // Turkish J. Math. 2018. V. 42, no. 2.
8. Goldberg S.I., Yano K. Polynomial structures on manifolds // Kodai Math. Sem. Rep. 1970. V. 22.
9. Goldberg S.I., Petridis N.C. Differentiable solutions of algebraic equations on manifolds // Kodai Math. Sem. Rep. 1973. V. 25.
10. Балащенко В.В., Степанов Н.А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ-пространствах // Матем. сборник. 1995. Т. 186, № 11.
11. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Однородные пространства: теория и приложения : монография. Ханты-Мансийск, 2008.
12. Феденко А.С. Пространства с симметриями. Минск, 1977.
13. Ковальский О. Обобщенные симметрические пространства. М., 1984.
14. Степанов Н.А. Основные факты теории φ-пространств // Известия вузов. Математика. 1967. № 3.
15. Балащенко В.В., Дашевич О.В. Геометрия канонических структур на однородных Φ-пространствах порядка 4 // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4.
16. Чурбанов Ю.Д. Геометрия однородных Φ-пространств порядка 5 // Известия вузов. Математика. 2002. № 5.