УДК 681.3.08+519.2

Оптимальные по быстродействию алгоритмы поиска неизвестного точечного источника со случайной дисциплиной генерации мгновенных импульсов*

А.Л. Резник[1], А.В. Тузиков[2], А.А. Соловьев[1], А.В. Торгов[1]

[1]Институт автоматики и электрометрии СО РАН (Новосибирск, Россия)
[2]Объединенный Институт проблем информатики НАН Беларуси (Минск, Беларусь)

Speed-Optimal Search Algorithms for an Unknown Point Source with a Random Discipline of Instantaneous Pulse Generation

A.L. Reznik[1], A.V. Tuzikov[2], A.A. Soloviev[1], A.V. Torgov[1]

[1]Institute of Automation and Electrometry of the Siberian Branch of the RAS (Novosibirsk, Russia)
[2]United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Построена оптимальная по быстродействию стратегия пространственной локализации случайного точечно-импульсного источника, имеющего равномерную плотность распределения на интервале поиска и обнаруживающего себя генерацией в случайные моменты времени мгновенных импульсов (дельта-функций). Локализация источника ведется с помощью приемного устройства с произвольно перестраиваемым во времени окном обзора. Рассчитанные в соответствии с предложенной схемой параметры оптимальных по времени алгоритмов поиска (т.е. оптимальное количество этапов сканирования и размеры окна обзора приемного устройства на каждом из них в зависимости от требуемой точности локализации) сведены в общую таблицу. Проведен анализ полученных результатов, позволивший установить оптимальные параметры асимптотического поиска, когда требуемая точность локализации неизвестного источника стремится к нулю. Дальнейшим перспективным направлением исследований является построение оптимальных алгоритмов локализации, когда плотность распределения случайного источника отличается от равномерной. Представляет интерес расчет параметров оптимальных поисковых процедур для случая одновременной локализации нескольких импульсных источников, а также построение оптимальных по быстродействию алгоритмов для тех случаев, когда локализация осуществляется системами, включающими несколько приемных устройств.

Ключевые слова: оптимальный поиск, точечно-импульсный источник, локализация объекта, минимальное время, надежность.

A speed-optimal strategy has been constructed for the spatial localization of a random point source having a uniform distribution density over the search interval and revealing itself by generating instantaneous pulses (delta functions) at random times. Localization of the source is carried out with the help of a receiver with a free tunable (in time) window. The parameters of the timeoptimal search algorithms calculated in accordance with the proposed scheme (i.e., the optimal number of scanning steps and the size of the receiver's view window on each of them, depending on the required localization accuracy) are summarized in a general table. The obtained results are analyzed, and the optimal parameters of the asymptotic search are established for cases when the required accuracy of localization of an unknown source tends to zero. A further promising area of research is the construction of optimal localization algorithms when the distribution density of a random source differs from the uniform one. Calculation of the parameters of optimal search procedures for the case of simultaneous localization of several pulsed sources is also interesting, as well as the construction of optimal-speed algorithms when localization is carried out by systems that include several receiving devices.

Key words: optimal search, point-pulse source, object localization, minimum time, reliability.

DOI 10.14258/izvasu(2019)1-17

*Работа выполнена в Институте автоматики и электрометрии СО РАН за счет субсидии на финансовое обеспечение выполнения государственного задания (проект № АААА-А17-117052410034-6) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-51-00001 и № 19-01-00128).

Введение

При цифровой регистрации и последующей программной обработке быстропротекающих динамических процессов различной физической природы один из наиболее трудоемких и алгоритмически сложных моментов связан с необходимостью устранения импульсных помех, создаваемых точечными источниками со случайным пространственным распределением. Для успешного решения этой задачи требуется, как правило, высокоточное определение координат объектов-источников излучения, причем в большинстве практически важных приложений сделать это необходимо за минимальное (в статистическом плане) время. Под точечно-импульсным источником ниже будет пониматься объект пренебрежимо малых угловых размеров (математическая точка), имеющий случайное расположение на оси X и генерирующий в случайные моменты времени бесконечно короткие импульсы (дельта-функции). Поиск объекта ведется с помощью регистрирующего устройства (приемника) с произвольно перестраиваемым во времени окном обзора. Импульс фиксируется, если точечный источник в момент генерации импульса находится в окне обзора приемного устройства. В противном случае импульс считается пропущенным.

При регистрации очередного импульса происходит уточнение положения источника на координатной оси, в результате чего интервал поиска сужается, а процедура локализации повторяется — теперь уже внутри окна с последним зафиксированным импульсом. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность локализации. Требуется построить оптимальную стратегию поиска, при которой среднее (в статистическом плане) время локализации точечного объекта — источника импульсов — будет минимальным.

Задачи и алгоритмы оптимального поиска случайных точечно-импульсных объектов, обсуждаемые в настоящей статье, возникают во многих научно-технических приложениях. В частности, в технической диагностике [1–2], в теории надежности [3–4], в математической теории связи [5] и системах управления [6] подобные исследования требуются при разработке методов устранения неисправностей, проявляющихся в виде перемежающихся отказов. В астрофизике и космологии [7] с такими проблемами сталкиваются при поиске барстеров — вспыхивающих галактических рентгеновских источников. В современных разделах информатики эти методы востребованы при построении алгоритмов обнаружения слабоконтрастных и малоразмерных объектов на зашумленных цифровых изображениях [8–10]. Также потребность в быстродействующих алгоритмах поиска и распознавания возникает в задачах гидро- и радиолокации [11–13], а, к примеру, в теории сигналов эти методы используются для оценивания надежности регистрации случайных точечных полей [14–16].

Постановка задачи

В дальнейшем через $f(x)$ будем обозначать функцию плотности вероятностей, которая задает априорную информацию о возможном расположении неизвестного импульсного источника на оси X. Источник считается пуассоновским и имеющим мощность λ, т.е. длительность пауз между генерируемыми им бесконечно короткими импульсами является случайной величиной с показательной плотностью распределения $h(t) = \lambda exp(-\lambda t)$. Требуется, используя приемник с произвольно перестраиваемым окном обзора, за минимальное время (имеется в виду, что минимизироваться должно среднее время, взятое по ансамблю реализаций) локализовать импульсный источник с точностью ε. Таким образом, итогом работы поисковой процедуры должен явиться интервал длиной ε, на котором достоверно расположен разыскиваемый источник.

Если для описания окна обзора приемника ввести в рассмотрение бинарную функцию

$$u(x,t)=\begin{cases}1, & \textit{если точка } x \textit{ в момент времени } t \textit{ находится} \\ & \textit{в окне приемного устройства}; \\ 0, & \textit{в противном случае},\end{cases}$$

то математическое ожидание времени, прошедшего от начала поиска до регистрации первого импульса, запишется в виде

$$\langle\tau\rangle=\lambda\int_0^\infty t\left[\int_0^\infty\left\{f(x)u(x,t)\exp(-\lambda\int_0^t u(x,\xi)d\xi)\right\}dx\right]dt.$$

Одноэтапным будем называть такой алгоритм локализации импульсного источника, при котором в течение всей поисковой процедуры размер окна приемного устройства совпадает с требуемой точностью локализации ε так что процесс поиска заканчивается при регистрации первого импульса. Многоэтапная процедура характеризуется тем, что локализация источника осуществляется с помощью поэтапного стягивания первоначального интервала поиска и соответствующего сужения окна обзора приемного устройства. Считая поисковую процедуру состоящей в точности из m этапов, для среднего времени локализации получим соотношение

$$\langle\tau\rangle=\sum_{k=1}^{m}\lambda^{k}\int_{0}^{\infty}dxf(x)\int\ldots\int t_{k}\times$$
$$\times\left\{\prod_{l=1}^{k}\left[dt_{l}u_{l}(x,\sum_{s=1}^{l}t_{s},t_{1},\ldots,t_{l-1})\exp(-\lambda\int_{\sum_{s=1}^{l-1}t_{s}}^{\sum_{s=1}^{l}t_{s}}u_{l}(x,\xi,t_{1},\ldots t_{l-1})d\xi)\right]\right\}, \quad (1)$$
$$\int u_{m}(x,t,t_{1},\ldots,t_{m-1})dx=\varepsilon,$$

где $u_i(x,t,t_1,...,t_{i-1})$ — функция, задающая окно обзора на i-м этапе при условии, что интервалы между предшествующими (i-1) зафиксированными импульсами были соответственно $t_1,t_2,...,t_{i-1}$. В этом случае построение оптимальной многоэтапной стратегии поиска должно заключаться в отыскании целочисленного параметра m_{opt}, задающего количество поисковых этапов, и функций обзора $u_i(x,t,t_1,...,t_{i-1})$, $i=\overline{1,m_{opt}}$, доставляющих минимум усредненному времени поиска (1).

Как правило, одноэтапная поисковая процедура не является оптимальной. Более того, чем выше требования к точности локализации, тем больше проигрыш любой (даже самой быстродействующей) одноэтапной процедуры оптимальному многоэтапному алгоритму. Основной сложностью при построении оптимального алгоритма поиска является то, что аналитически рассчитать экстремали функционала (1) в общем случае (когда плотность вероятностей *f(x)* произвольна) не всегда возможно. Поэтому при практической реализации поисковых процедур обычно прибегают к различным приближениям и упрощениям (например, в [8] построены алгоритмы локализации импульсного источника, оптимальные в классе периодических поисковых процедур). Однако в одном важном с прикладной точки зрения случае, когда импульсный источник имеет равномерную плотность распределения (т.е. если нет никаких априорных сведений о его расположении внутри интервала поиска), задача локализации существенно упрощается, в результате чего удается найти точное аналитическое решение, задающее оптимальную стратегию поиска.

Оптимальная стратегия локализации неизвестного источника, равномерно распределенного на интервале поиска

Итак, будем считать, что разыскиваемый случайный точечный источник имеет равномерную плотность распределения на интервале $(0,L)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{L}, & x\in(0,L)\\ 0, & x\notin(0,L)\end{cases}. \quad (2)$$

В случайные моменты времени источник генерирует мгновенные импульсы, паузы между которыми имеют показательное распределение $h(t)=\lambda exp(-\lambda t)$. Требуется с помощью приемного устройства с произвольно перестраиваемым окном обзора за минимальное (в статистическом плане) время локализовать объект-генератор с точностью ε.

Решение. Главным фактором, упрощающим расчет оптимальной процедуры локализации случайного импульсного источника при его равномерном распределении внутри интервала поиска, является то, в этом случае вместо нахождения экстремалей весьма громоздкого интегрального уравнения (1) достаточно решить упрощенную задачу. Формулировка этой задачи такова: требуется определить количество поисковых этапов m и указать величины W_i, $i=\overline{1,m-1}$, соответствующие размерам окон обзора приемного устройства на каждом из них (на последнем этапе размер окна однозначно диктуется условиями задачи: $W_m=\varepsilon$), при которых среднее время поиска

$$<\tau>=\frac{1}{\lambda}\times\left(\frac{L}{W_1}+\frac{W_1}{W_2}+\frac{W_2}{W_3}+\ldots+\frac{W_{m-1}}{\varepsilon}\right) \quad (3)$$

достигает минимума. Для каждого фиксированного m (оптимальное значение которого еще предстоит определить) размеры сканирующих окон W_i, $i=\overline{1,m-1}$, доставляющие минимум выражению (3), должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial<\tau>}{\partial W_1}=\dfrac{1}{\lambda}\times\left(-\dfrac{L}{W_1^2}+\dfrac{1}{W_2}\right)=0;\\ \dfrac{\partial<\tau>}{\partial W_2}=\dfrac{1}{\lambda}\times\left(-\dfrac{W_1}{W_2^2}+\dfrac{1}{W_3}\right)=0;\\ \vdots\\ \dfrac{\partial<\tau>}{\partial W_{m-1}}=\dfrac{1}{\lambda}\times\left(-\dfrac{W_{m-2}}{W_{m-1}^2}+\dfrac{1}{\varepsilon}\right)=0,\end{cases} \quad (4)$$

которая получается из (3) простым приравниванием нулю всех его частных производных. Решением системы (4) является набор

$$W_i=(\varepsilon/L)^{\frac{i}{m}}\times L,\quad i=\overline{1,m-1}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), для среднего времени оптимального m-этапного поиска получим

$$<\tau>_m=\frac{m}{\lambda}(\varepsilon/L)^{-\frac{1}{m}}. \quad (6)$$

Таким образом, для любого фиксированного m соотношение (5) задает набор окон $W_i, i=\overline{1,m-1}$, при которых среднее время локализации достигает своего локального минимума. Следующая задача — выбрать такое значение m_{opt}, при котором соотношение (6) достигает своего глобального минимума.

В связи с этим заметим, что функция $g(x)=\frac{x(\varepsilon/L)^{-\frac{1}{x}}}{\lambda}$, являющаяся непрерывным аналогом выражения, стоящего в правой части равенства (6), имеет единственный экстремум в точке $x_{\min}=\ln(L/\varepsilon)$. Отсюда следует, что при заданной точности ε для расчета числа этапов m_{opt}, делающих процедуру локализации оптимальной, достаточно найти точки «равновесия», в которых осуществляется переход от m-этапной к $(m+1)$-этапной оптимальной стратегии поиска. Иными словами, требуется установить значения (ε/L), в которых наблюдается равенство $<\tau>_m=<\tau>_{m+1}$:

$$\frac{m}{\lambda}(\varepsilon/L)^{-\frac{1}{m}}=\frac{m+1}{\lambda}(\varepsilon/L)^{-\frac{1}{m+1}},$$

откуда

$$(\varepsilon/L)_{m\to m+1}=\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m(m+1)}.$$

Это означает, что если требуемая относительная точность локализации попадает в интервал

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m(m+1)}<(\varepsilon/L)<\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m(m-1)},$$

то оптимальная процедура поиска состоит в точности из m этапов. Параметры оптимальных алгоритмов локализации, рассчитанные для поиска равномерно распределенного случайного точечно-импульсного источника, имеющего пуассоновскую мощность λ, представлены в приводимой ниже таблице.

Параметры оптимального поиска случайного равномерно распределенного на интервале $(0, L)$ импульсного источника в зависимости от требуемой точности локализации ε

(ε/L) (относительная точность локализации)	m_{opt} (оптимальное число этапов при заданной точности локализации)	$W_i, i=\overline{1,m_{opt}}$ (окна обзора приемной системы на каждом из m_{opt} этапов оптимального поиска)	$<\tau>$ (среднее время локализации)
$\frac{1}{4}\le(\varepsilon/L)<1$	1	$W_1=\varepsilon$	$\frac{1}{\lambda}(\varepsilon/L)^{-1}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^6\le(\varepsilon/L)\le\frac{1}{4}$	2	$W_1=(\varepsilon/L)^{\frac{1}{2}}\times L$ $W_2=(\varepsilon/L)\times L=\varepsilon$	$\frac{2}{\lambda}(\varepsilon/L)^{-\frac{1}{2}}$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{12}\le(\varepsilon/L)\le\left(\frac{2}{3}\right)^6$	3	$W_1=(\varepsilon/L)^{\frac{1}{3}}\times L$ $W_2=(\varepsilon/L)^{\frac{2}{3}}\times L$ $W_3=(\varepsilon/L)\times L=\varepsilon$	$\frac{3}{\lambda}(\varepsilon/L)^{-\frac{1}{3}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m(m+1)}\le(\varepsilon/L)\le\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m(m-1)}$	m	$W_1=(\varepsilon/L)^{\frac{1}{m}}\times L$ $W_2=(\varepsilon/L)^{\frac{2}{m}}\times L$ $\vdots$ $W_i=(\varepsilon/L)^{\frac{i}{m}}\times L$ $\vdots$ $W_m=(\varepsilon/L)^{\frac{m}{m}}\times L=\varepsilon$	$\frac{m}{\lambda}(\varepsilon/L)^{-\frac{1}{m}}$

Если учесть, что $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^m=e^{-1}$, то при высоких требованиях к точности локализации (т.е. при $(\varepsilon/L)\to 0$) справедливы следующие соотношения, характеризующие асимптотически оптимальный поисковый алгоритм:

$$m_{opt}\approx\ln(L/\varepsilon);\quad W_i\approx e^{-i}\times L, i=\overline{1,m_{opt}};$$
$$<\tau>_{opt}\approx\frac{e\ln(L/\varepsilon)}{\lambda}.$$

Заключение

Приведенные результаты формируют функционально полный набор оптимальных по быстродействию алгоритмов локализации случайного импульсно-точечного источника для тех случаев, когда разыскиваемый объект имеет равномерное распределение на интервале поиска. Дальнейшим перспективным направлением исследований является построение оптимальных алгоритмов локализации, когда плотность распределения случайного источника отличается от равномерной. Представляет интерес расчет оптимальных поисковых процедур для случая одновременной локализации нескольких импульсных источников, а также построение оптимальных по быстродействию алгоритмов для тех случаев, когда локализация осуществляется системами, включающими несколько приемных устройств.

Библиографический список

1. Биргер И.А. Техническая диагностика. М., 1978.
2. Chiquet P., Postel-Pellerin J., Tuninetti C., Souiki-Figuigui S., Masson P. Effect of Short Pulsed Program/Erase Cycling on Flash Memory Devices // Proceedings of 14th IMEKO TC10 Workshop on Technical Diagnostics, Milan, Italy, 27–28 June 2016.
3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М., 1965.
4. Barlow R.E., Clarotti C.A. and Spizzichino F. Reliability and Decision Making // Elsevier. New York, 1993.
5. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М., 1963.
6. Dorf R., Bishop R. Modern Control Systems (12th Edition). 2010.
7. Steven Weinberg // Cosmology. New York, 2008.
8. Kirichuk V.S., Mokin K.Yu., Reznik A.L. Algorithms for Processing of Series of Digital Aerospace Images Based on Automatic Search for the Conjugate Points // Pattern Recognition and Image Analysis. 2001. Vol. 11, No 1.
9. Киричук В.С., Косых В.П., Курманбек уулу Т. Алгоритмы обнаружения движущихся малоразмерных объектов в последовательности изображений // Автометрия. 2009. Т. 45, № 1.
10. Киричук В.С., Косых В.П., Курманбек уулу Т. Адаптивная фильтрация с субпиксельным оцениванием координат точечных объектов // Автометрия. 2006. Т. 42, № 1.
11. Кошелев В.И., Андреев В.Г., Белокуров В.А. Современные методы повышения эффективности обнаружения радиолокационных сигналов. М., 2016.
12. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. М., 1968.
13. Писаревский И.Ф. Новое направление в локации подвижных объектов. № 3. М., 2004.
14. Reznik A.L., Soloviev A.A., Torgov A.V. On the Probability of the Formation of Local Groups in Random Point Images // Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications). 2016. Vol. 26, No 4. DOI: 10.1134/S1054661816040155.
15. Reznik A.L., Soloviev A.A., Torgov A.V. Program-combinatorial approach to solving problems of error-free readout of random point images // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2016. Vol. 52, No 2. DOI: 10.3103/S8756699016020035.
16. Ефимов В.М., Нестеров А.А., Резник А.Л. Алгоритмы оптимального по быстродействию поиска точечных световых объектов // Автометрия. 1980. №3.