УДК 530.145:514.7

О киллинговых полях на 2-симметрических лоренцевых многообразиях

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Killing Fields on 2-Symmetric Lorentzian Manifolds

D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, I.V. Ernst

Altai State University (Barnaul, Russia)

Описаны поля Киллинга на четырехмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Поля Киллинга играют важную роль в исследовании солитонов Риччи, которые впервые были рассмотрены Р. Гамильтоном. Солитоны Риччи являются обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях. Уравнение солитона Риччи изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, было найдено общее решение уроавнения солитона Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях размерности четыре, доказана разрешимость этого уравнения в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий. Описать поля Киллинга удается при помощи нормальных координат Бринкмана, существующих на лоренцевых многообразиях более общего класса — pp-волнах. Система дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению киллинговых полей, может быть приведена к значительно более простому виду, что было сделано В. Глобке и Т. Лейстнером. Опираясь на этот результат, найдено общее решение данной системы дифференциальных уравнений и вычислена размерность алгебры киллинговых полей. Результаты, изложенные в настоящей работе, продолжают исследования солитонов Риччи на лоренцевых многообразиях.

Ключевые слова: киллингово поле, многообразие Уокера, лоренцево многообразие, k-симметрическое многообразие, система координат.

In the following paper, we describe Killing fields on 2-symmetric Lorentzian manifolds of dimension four. Killing fields play an important role in the study of Ricci solitons which were introduced by R. Hamilton. Ricci solitons are the generalization of the Einstein metrics on (pseudo)Riemannian manifolds. Ricci soliton equation was studied by many mathematicians on different classes of manifolds. In particular, in the recent author's papers, solvability of the Ricci soliton equation on 3-symmetric Lorentzian manifolds was proved, and the general solution of the Ricci soliton equation on 2-symmetric Lorentzian manifolds was described.

We describe Killing fields using Brinkmann normal coordinates which exist on the class of Lorentzian manifolds, the so-called pp-waves. The system of differential equations that corresponds to the Killing equation can be reduced to a simpler form. This was done by W. Globke and T. Leistner. By applying their result, the general solution of the system was found, the dimension of an algebra of Killing fields was calculated. The results stated in this paper continue author's research on Ricci solitons on Lorentzian manifolds.

Key words: Killing field, Walker manifold, Lorentzian manifold, k-symmetric manifold, coordinate system.

DOI 10.14258/izvasu(2019)1-16

Введение

Поле Киллинга есть векторное поле, поток которого состоит из локальных изометрий. Поля Киллинга играют важную роль в исследовании солитонов Риччи, введенных Р. Гамильтоном (см. [1, 2]). Солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков (см., например, обзор [3]). В общем случае задача исследования и классификации солитонов Риччи является достаточно сложной, поэтому она рассматривается при некоторых ограничениях на многообразие. К числу многообразий с такими ограничениями относятся 2-симметрические лоренцевы многообразия, которые были исследованы Д.В. Алексеевским, А.С. Галаевым [4, 5].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №18-31-00033мол_а).

В данной работе найдены размерности алгебр киллинговых полей на 2-симметрических лоренцевых многообразиях размерности 4.

Основные определения

Определение 1. *Псевдоримановым многообразием* называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется *лоренцевым многообразием.*

Определение 2. Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – псевдориманово многообразие размерности n, ∇ – соответствующая связность Леви-Чивита. Тензор кривизны определим как $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ и тензор Риччи как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$, где X, Y, Z, V – гладкие векторные поля на $\mathcal{M}$.

Определение 3. Векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии $(\mathcal{M}, g)$ называется киллинговым, если $\mathcal{L}_K g = 0$, где $\mathcal{L}_K g$ – производная Ли метрики g в направлении поля K.

Определение 4. Гладкое распределение $\mathcal{D}$ на $\mathcal{M}$ называется *параллельным*, если для любых векторных полей $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{TM}$ имеем $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$.

Определение 5. Псевдориманово многообразие, допускающее гладкое параллельное распределение изотропных векторов, называется *многообразием Уокера* (см. [6, 7]).

Определение 6. Пусть R – тензор кривизны метрики g. Если

$$\nabla R \neq 0, \nabla^2 R = 0,$$

то $(\mathcal{M}, g)$ называется *2-симметрическим псевдоримановым многообразием* (см. [4]).

Определение 7. Лоренцево многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется *pp-волной*, если на $\mathcal{M}$ существует такое векторное поле $V \neq 0$, что

$$g(V,V) = 0; \nabla V = 0; \mathrm{R}\,|_{V^\perp \wedge V^\perp} = 0.$$

Если к тому же выполнено условие
$\nabla_U \mathrm{R} = 0\ \forall U \in V^\perp$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется *плоской волной.*

Система координат. Уравнение киллингова поля

Следующая лемма позволяет использовать удобную систему координат на pp-волнах.

Лемма 1 (см. [8]). *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – pp-волна и $p \in \mathcal{M}$. Тогда в некоторой окрестности U точки p существуют локальные координаты $\phi = (v, x = (x^1, \ldots, x^n), u)$ и функция $h \in C^\infty(\phi(U))$ такая, что $h = h(u, x)$ не зависит от v и имеет место равенство*

$$g = 2du(dv + (h \circ \phi)du) + \delta_{ij}dx^i dx^j.$$

Эти координаты называются ***координатами Бринкмана****. Более того, систему координат можно выбрать так, чтобы $h(u, 0) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x^i}(u, 0) = 0$ для всех u в окрестности 0. Такие координаты называются* ***нормальными координатами Бринкмана****.*

Рассмотрим лоренцево локально неразложимое 2-симметрическое многообразие $(\mathcal{M}, g)$ размерности 4. Следующая теорема А. С. Галаева и Д. В. Алексеевского позволяет выбрать систему локальных координат на $\mathcal{M}$:

Теорема 1 (см. [4]). *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – локально неразложимое лоренцево многообразие размерности $n + 2$. Тогда $(\mathcal{M}, g)$ является 2-симметрическим тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $v, x^1, \ldots, x^n, u$ и такие, что*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij})x^i x^j (du)^2, \quad (1)$$

где $H = (H_{ij})$ – ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, $F = (F_{ij})$ – симметричная вещественная матрица.

Заметим, что описанная в этой теореме система координат является нормальной системой координат Бринкмана с функцией $h = \frac{1}{2}(H_{ij}u + F_{ij})x^i x^j$.

Применив эту теорему при $n = 2$, получим локальную систему координат (v, x, y, u) на многообразии $\mathcal{M}$ размерности 4.

Уравнение киллингова поля

Для того чтобы записать уравнение киллингова поля, воспользуемся следующей теоремой:

Теорема 2 (см. [8]). *Пусть $(\mathcal{M}^{n+2}, g)$ – локально неразложимое 2-симметрическое лоренцево многообразие. Тогда в нормальных координатах Бринкмана $(v, x^1, \ldots, x^n, u)$ решения уравнения $\mathcal{L}_X g = 0$ имеют следующий вид:*

$$K = (c - av - \dot{\Psi}x)\partial_v + (\Psi + Fx)^i \partial_i + (au + b)\partial_u, \quad (2)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}, F \in \mathfrak{so}(n)$ и $\Psi : u \mapsto \Psi(u) \in \mathbb{R}^n$ является решением уравнения:

$$\ddot{\Psi}^\top x - \mathrm{grad}(h)^\top(\Psi + Fx) - (au + b)\dot{h} - 2ah = 0. \quad (3)$$

Замечание. Для интересующего нас случая $n = 2$ введем следующие обозначения:

$$x = x^1, y = x^2; F = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{bmatrix}.$$

Перейдем к формулировке и доказательству основной теоремы.

Теорема 3. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – 2-симметрическое лоренцево многообразие размерности 4 с выбранной нормальной системой координат Бринкмана (v, x, y, u) в окрестности U. Тогда:*

Если матрицы H_{ij}, F_{ij} – скалярные, то всякое киллингово поле в нормальных координатах Бринкмана имеет вид $K = (c - \dot{\psi}_1(u)x - \dot{\psi}_2(u)y)\partial_v + (\psi_1(u) - fy)\partial_x + (\psi_2(u) + fx)\partial_y$, где $f, c \in \mathbb{R}$, $\psi_i(u)$ – решение уравнения $\ddot{\psi}_i(u) - 2(H_{ii}u + F_{ii})\psi_i(u) = 0$.

Если хотя бы одна из матриц H_{ij}, F_{ij} не скалярная, то всякое киллингово поле в нормальных координатах Бринкмана имеет вид $K = (c - \dot{\psi}_1(u)x - \dot{\psi}_2(u)y)\partial_v + \psi_1(u)\partial_x + \psi_2(u)\partial_y$, где $c \in \mathbb{R}$ и

$$\psi_2''(u) - 2(H_{22}u + F_{22})\psi_2(u) - 2F_{12}\psi_1(u) = 0;$$

$$\psi_1''(u) - 2(H_{11}u + F_{11})\psi_1(u) - 2F_{12}\psi_2(u) = 0.$$

Доказательство

Воспользовавшись теоремой 1, получим нормальные координаты Бринкмана (v, x, y, u), в которых метрика примет вид:

$$g = 2dvdu + dx^2 + dy^2 + 2h(x, y, u)(du)^2,$$

где $h(x, y, u) =$

$$\frac{1}{2}((H_{11}u + F_{11})x^2 + 2F_{12}xy + (H_{22}u + F_{22})y^2).$$

Запишем уравнение (3):

$$-2(H_{22}uy + F_{12}x + F_{22}y)(-fx + \psi_2(u)) + \psi_2''(u)y-$$
$$-2(H_{11}ux + F_{11}x + F_{12}y)(fy + \psi_1(u))+$$
$$+\psi_1''(u)x - (au + b)(H_{11}x^2 + H_{22}y^2)-$$
$$-2a((H_{11}u + F_{11})x^2 + 2F_{12}xy + (H_{22}u + F_{22})y^2) = 0.$$

Соберем коэффициенты при x, y и приравняем их к нулю:

$$-2(H_{22}u + F_{22})\psi_2(u) + \psi_2''(u) - 2F_{12}\psi_1(u) = 0;$$
$$-2F_{12}\psi_2(u) - 2(H_{11}u + F_{11})\psi_1(u) + \psi_1''(u) = 0;$$
$$2f(H_{22}u + F_{22}) - 2f(H_{11}u + F_{11}) - 4aF_{12} = 0;$$
$$2fF_{12} - (au + b)H_{11} - 2a(H_{11}u + F_{11}) = 0;$$
$$-2fF_{12} - (au + b)H_{22} - 2a(H_{22}u + F_{22}) = 0.$$

Четвертое и пятое уравнения являются полиномиальными по u, поэтому коэффициенты левой части равны 0. В частности, собрав коэффициенты при u, получим:

$$-3aH_{11} = 0, -3aH_{22} = 0.$$

Матрица H ненулевая, следовательно, $a = 0$.

Перепишем третье уравнение:

$$f \cdot ((H_{22} - H_{11})u + F_{22} - F_{11}) = 0.$$

Отсюда видно, что $f = 0$, если хотя бы в одной из матриц H, F диагональные элементы различны.

Случай неравных элементов. Пусть хотя бы в одной из матриц H, F диагональные элементы различны. Тогда четвертое и пятое уравнения примут вид: $bH_{11} = bH_{22} = 0$. Получили, что $b = 0$. Теперь исходная система уравнений сведена к первым двум уравнениям:

$$\psi_2''(u) - 2(H_{22}u + F_{22})\psi_2(u) - 2F_{12}\psi_1(u) = 0;$$

$$\psi_1''(u) - 2(H_{11}u + F_{11})\psi_1(u) - 2F_{12}\psi_2(u) = 0.$$

Эта система ОДУ разрешима, размерность пространства ее решений равна 4. Изоморфизм на $\mathbb{R}^4$ можно задать так:

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2) \mapsto (\psi_1(0), \psi_1'(0), \psi_2(0), \psi_2'(0)).$$

Запишем киллингово поле, воспользовавшись теоремой 2

$$K = (c - \dot{\psi}_1(u)x - \dot{\psi}_2(u)y)\partial_v + \psi_1(u)\partial_x + \psi_2(u)\partial_y.$$

В итоге размерность пространства киллинговых полей равна 5.

Случай равных элементов. Рассмотрим случай, когда в обеих матрицах H, F диагональные элементы равны, т. е. $H_{11} = H_{22}, F_{11} = F_{22}$. Сложим четвертое и пятое уравнения: $-2bH_{11} = 0$. $H_{11} \neq 0$, следовательно, $b = 0$. Запишем четвертое уравнение (которое, заметим, эквивалентно пятому): $fF_{12} = 0$. Если $F_{12} \neq 0$, то получим, что $f = 0$ и решения будут иметь тот же вид, что и в первом случае. Если $F_{12} = 0$, то f может быть любым вещественным числом, поскольку f не входит в оставшиеся уравнения системы. Дальнейшие рассуждения повторяют уже рассмотренный случай. Запишем решение:

$$K = (c - \dot{\psi}_1(u)x - \dot{\psi}_2(u)y)\partial_v+$$

$$+(\psi_1(u) - fy)\partial_x + (\psi_2(u) + fx)\partial_y.$$

Легко видеть, что в этой ситуации размерность пространства киллинговых полей равна 6.

Заключение

В результате проведенных исследований найдена размерность алгебры киллинговых полей на четырехмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Данные результаты продолжают исследования Д.В. Алексеевского и А.С. Галаева по 2-симметрическим лоренцевым многообразиям, а также исследования солитонов Риччи в работе [9].

Библиографический список

1. Hamilton R. S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. 1988. V. 71.

2. Hamilton R. S. Three manifolds with positive Ricci curvature // J. Diff. Geom. 1982. V. 17.

3. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. 2010. V. 11.

4. Alekseevsky D.V., Galaev A.S. Two-symmetric Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2011. V. 61, N. 12.

5. Галаев А.С. Группы голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий // Математический сборник. 2013. Т. 204, 9.

6. Brozos-Vazquez M., Garcia-Rio E., Gavino-Fernandez S. Locally conformally flat lorentzian gradient Ricci soliton // Journal of Geometric Analysis. 2013. V. 23, N 3.

7. Walker A.G. Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes // Quart. J. Math. Oxford, 1950. V. 1, N 2.

8. Globke W., Leistner T. Locally homogeneous pp-waves // Journal of Geometry and Physics. 2016. V. 108.

9. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 2-симметрических четырёхмерных лоренцевых многообразиях // Известия Алтайского гос. ун-та 2017. N 4 (96).