УДК 514.764

Изотропный тензор Вейля на четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразиях*

С.В. Клепикова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

The Isotropic Weyl Tensor on Four-Dimensional Locally Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds

S.V. Klepikova

Altai State University (Barnaul, Russia)

В работах многих математиков изучаются локально однородные (псевдо)римановы многообразия, более общим случаем которых являются локально конформно однородные (псевдо)римановы пространства (многообразия, конформные преобразования на которых действуют транзитивно). Такие пространства исследовались в случае как римановой, так и псевдоримановой метрик. Из работы Е.Д. Родионова, В.В. Славского и Л.Н. Чибриковой известно, что если для многообразий размерности $n \geq 4$ тензор Вейля имеет ненулевой квадрат длины, то с помощью конформной деформации можно из локально конформно однородного (псевдо)риманова пространства получить локально однородное пространство. Отсюда естественным образом следует задача об исследовании таких (псевдо)римановых локально конформно однородных и локально однородных многообразий, для которых квадрат длины тензора Вейля равен нулю, но при этом сам тензор нулю не равен (такой тензор Вейля еще называют изотропным).

Приводится описание пошагового алгоритма решения задачи о классификации четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с изотропным тензором Вейля и нетривиальной подгруппой изотропии.

Ключевые слова: (псевдо)риманово многообразие, изотропный тензор Вейля, системы компьютерной математики.

The locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds are studied by many mathematicians. The more general cases of these manifolds are spaces where conformal transformations act transitively. They are also called the locally conformally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds. It is worth noting that such manifolds were investigated both for the case of Riemannian metric, and for the case of pseudo-Riemannian metric.

The work of E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, and L.N. Chibrikova claims that if there is a Weyl tensor with the non-zero squared length for a manifold of dimension $n \geq 4$, then a locally homogeneous space can be obtained from a locally conformally homogeneous (pseudo)Riemannian space by means of a conformal deformation. Hence, there should be a naturally arisen problem to investigate such (pseudo)Riemannian locally conformally homogeneous and locally homogeneous manifolds for which the squared length of the Weyl tensor equals to zero, but the tensor itself is not equal to zero (such a Weyl tensor is also called isotropic).

In this paper, we describe a step-by-step algorithm to solve the problem of classification of four-dimensional locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds with an isotropic Weyl tensor and a non-trivial isotropy subgroup.

Key words: (pseudo)Riemannian manifold, isotropic Weyl tensor, systems of computer mathematics.

DOI 10.14258/izvasu(2019)1-13

Введение

При исследовании локально конформно однородных (псевдо)римановых пространств [1] логичным продолжением являются (псевдо)римановы многообразия с изотропным тензором Вейля. В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой в работах [2, 3] для данных многообразий получена исчерпывающая классификация трехмерных групп Ли, для которых тензор Схоутена — Вейля (аналог тензора Вейля в трехмерном случае) является изотропным. В данной работе исследованы локально од-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

нородные четырехмерные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Вейля, имеющие нетривиальную подгруппу изотропии.

Пусть (M,g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n; X,Y,Z,V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z=[\nabla_Y,\nabla_X]Z+\nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим как

$$r(X,Y)=\mathrm{tr}(V\to R(X,V)Y), \quad s=\mathrm{tr}_g(r).$$

Тензор Вейля W будет иметь следующий вид:

$$W=R-A\owedge g,$$

где $A=\frac{1}{n-2}\left(r-\frac{sg}{2(n-1)}\right)$, $(A\owedge g)(X,Y,Z,V)=A(X,Z)g(Y,V)+A(Y,V)g(X,Z)-A(X,V)g(Y,Z)-A(Y,Z)g(X,V)$.

Определение 1 [*2*]. Векторное поле v, определяющее инфинитезимальное изометричное преобразование (псевдо)риманова пространства, будем называть *киллинговым*, если

$$v_{i,j}+v_{j,i}=0. \tag{1}$$

Соответственно, векторное поле v, определяющее инфинитезимальное конформное преобразование (псевдо)риманова пространства, будем называть *конформно-киллинговым*, если

$$v_{i,j}+v_{j,i}=2w\,g_{ik}, \tag{2}$$

где $w=v_{k,i}g^{ik}/n$.

Определение 2 [*2*]. Пусть (M,g) — связное (псевдо)риманово многообразие, для любой точки x_0 которого и любого касательного вектора $v_0\in T_{x_0}M$ существует векторное поле $v(x)$ в окрестности точки x_0, удовлетворяющее уравнению (1), такое, что $v(x_0)=v_0$. Многообразие в этом случае назовем *локально однородным пространством.* Соответственно, если векторное поле $v(x)$ удовлетворяет системе уравнений (2), то многообразие назовем *локально конформно однородным пространством.*

Локально конфорно однородные пространства исследованы, например, в работах [4–8]. В работе [2] доказана

Теорема 1. *Пусть (M,g) — локально конформно однородное связное пространством, и пусть хотя бы в одной точке имеем $\|W\|^2\neq 0$ ($\|SW\|^2\neq 0$ при $\dim M=3$). Тогда (M,g) конформно эквивалентно локально однородному пространству.*

Отсюда естественным образом появляется задача об исследовании таких (псевдо)римановых локально конформно однородных и локально однородных многообразий, для которых квадрат длины тензора Вейля равен нулю, но при этом сам тензор нулю не равен. Далее такой тензор Вейля будем называть изотропным.

Замечание. *В случае римановых многообразий из того, что квадрат длины тензора Вейля равен нулю ($\|W\|^2=0$), следует, что сам тензор равен нулю, поскольку в ортонормированном базисе из векторов в касательном пространстве произвольной точки многообразия квадрат длины тензора Вейля представляет собой сумму квадратов всех компонент, а значит, равен нулю тогда и только тогда, когда каждая компонента тензора равна нулю.*

Заметим также, что применение систем компьютерной математики для изучения локально однородного (псевдо)риманова пространств с изотропным тензором Вейля становится возможным при малой размерности таких многообразий. Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять квадрат длины тензора Вейля на локально однородном (псевдо)римановом пространстве (подробнее см. [9, 10]).

Пусть $(M=G/H,g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m}=\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — (необязательно редуктивное) дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, $h=\dim\mathfrak{h}$.

Пусть $\{e_1,e_2,\ldots,e_h,u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ — базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i,u_j]_{\mathfrak{m}}=c^k_{ij}u_k, \quad [u_i,u_j]_{\mathfrak{h}}=C^k_{ij}e_k,$$
$$[h_i,u_j]_{\mathfrak{m}}=\bar{c}^k_{ij}u_k,$$

где c^k_{ij}, C^k_{ij} и $\bar{c}^k_{ij}$ — массивы соответствующих размеров.

Первым этапом решения задачи станет вычисление представления изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)^k_j=(\psi\,(e_i))^k_j=\bar{c}^k_{ij}, \tag{3}$$

и запись условия инвариантности метрического тензора g:

$$(\psi_i)^t\cdot g+g\cdot\psi_i=0, \quad i=1,\ldots,h, \tag{4}$$

где $(\psi_i)^t$ — транспонированная матрица.

Далее с помощью уже известных структурных констант и матрицы метрического тензора находим компоненты связности Леви-Чивита ∇:

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\left(c^k_{ij}+g^{sk}c^l_{sj}g_{il}+g^{sk}c^l_{si}g_{jl}\right);$$
$$\bar{\Gamma}^k_{ij}=\frac{1}{2}\bar{c}^k_{ij}-\frac{1}{2}g^{sk}\bar{c}^l_{is}g_{jl},$$

где $\nabla_{u_i}u_j=\Gamma^k_{ij}u_k$, $\nabla_{h_i}u_j=\bar{\Gamma}^k_{ij}u_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Следующим этапом решения задачи становится вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r:

$$R_{ijks}=\left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il}+c^l_{ij}\Gamma^p_{lk}+C^l_{ij}\bar{\Gamma}^p_{lk}\right)g_{ps},$$

$$r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Далее становится возможным нахождение компонент тензора одномерной кривизны

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij} - \frac{s g_{ij}}{2(n-1)}\right),$$

вычисление тензора Вейля

$$W_{ijkt} = R_{ijkt} - A_{ik}g_{jt} - A_{jt}g_{ik} + A_{it}g_{jk} + A_{jk}g_{it},$$

а также квадрата его длины

$$\|W\|^2 = W_{ijkt} W_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{i\alpha} g^{j\beta} g^{k\gamma} g^{t\delta}.$$

Пример вычислений

Рассмотрим локально однородное псевдориманово пространство размерности 4, имеющее в классификации [11] номер $1.1^1.1$. В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует базис $\{e_1, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_1\}$ и $\{u_i\}$ — базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$. Скобки Ли на базисных векторах имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1,\ [e_1, u_3] = -u_3,\ [u_1, u_3] = u_2,$$
$$[u_2, u_4] = u_2,\ [u_3, u_4] = u_3.$$

Вычисляем представление изотропии (3):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и записываем условие (4) инвариантности метрического тензора:

$$\alpha_{12} = 0,\ \alpha_{14} = 0,\ \alpha_{11} = 0;$$
$$\alpha_{23} = 0,\ \alpha_{33} = 0,\ \alpha_{34} = 0.$$

При решении данной системы уравнений относительно компонент метрического тензора получаем, что инвариантное скалярное произведение обязано иметь следующий вид:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

Оно также обязано иметь либо лоренцеву $(+,+,+,-)$, либо нейтральную $(+,+,-,-)$ сигнатуру.

По вышеприведенным формулам вычисляем ненулевые компоненты тензора Вейля

$$W_{1324} = W_{2413} = -\frac{1}{2}\alpha_{22};$$
$$W_{2424} = -\frac{\alpha_{22}(\alpha_{13}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^2)}{6\alpha_{13}^2};$$
$$W_{1313} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{13}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^2)}{6(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)};$$
$$W_{1223} = W_{2312} = -\alpha_{22}^2(\alpha_{13}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^2)/$$
$$/(12\alpha_{13}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2));$$
$$W_{1434} = W_{3414} = (\alpha_{13}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^2)\alpha_{22}\alpha_{44}/$$
$$/(12\alpha_{13}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2));$$
$$W_{1234} = W_{3412} = \alpha_{22}(\alpha_{13}^2\alpha_{24} - 3\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{44} +$$
$$+3\alpha_{13}\alpha_{24}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{24}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^3)/$$
$$/(12\alpha_{13}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2));$$
$$W_{1423} = W_{2314} = -(\alpha_{13}^2\alpha_{24} + 3\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{44} -$$
$$-3\alpha_{13}\alpha_{24}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{24}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^3)\alpha_{22}/$$
$$/(12\alpha_{13}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2))$$

и квадрат его длины

$$\|W\|^2 = (\alpha_{13}^4 - 13\alpha_{13}^2\alpha_{22}\alpha_{44} + 13\alpha_{13}^2\alpha_{24}^2 +$$
$$+4\alpha_{22}^2\alpha_{44}^2 - 8\alpha_{22}\alpha_{24}^2\alpha_{44} + 4\alpha_{24}^4)\alpha_{22}^2/$$
$$/(3(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^2\alpha_{13}^4).$$

Решая уравнение $\|W\|^2 = 0$, получим два решения

$$\alpha_{22} = 0 \ \text{ или } \ \alpha_{22} = \frac{13\alpha_{13}^2 + 8\alpha_{24}^2 \pm 3\sqrt{17}\alpha_{13}^2}{8\alpha_{44}}.$$

При $\alpha_{22} = 0$ тензор Вейля будет тривиальным, а при втором решении зануляются не все компоненты тензора Вейля, а значит, тензор Вейля является изотропным. Таким образом, получим следующую теорему

Теорема 2. *Локально однородное 4-мерное псевдориманово пространство* $1.1^1.1$ *имеет изотропный тензор Вейля тогда и только тогда, когда инвариантная метрика* g *имеет вид*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{22} = \frac{13\alpha_{13}^2 + 8\alpha_{24}^2 \pm 3\sqrt{17}\alpha_{13}^2}{8\alpha_{44}}$, $\alpha_{13} \neq 0$, *причем инвариантное скалярное произведение обязано иметь лоренцеву* $(+,+,+,-)$ *сигнатуру.*

Заключение. В результате проведенных исследований построена математическая модель, позволяющая получить исчерпывающую классификацию локально однородных (псевдо)римановых многообразий размерности 4 с изотропным тензором Вейля и нетривиальной подгруппой изотропии.

Библиографический список

1. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. 2002. Vol. 43, No 2.

2. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces // Siberian Advances in Mathematics. 2007. Vol. 17, No 3.

3. Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. About the Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorenzian Lie groups // arXiv:1708.06614, 2017.

4. Besse A. Einstein manifolds — Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987. DOI: 10.1007/978-3-540-74311-8.

5. Salimi Moghaddam H.R. On Ricci Soliton metrics conformally equivalent to left invariant metrics // arXiv:1401.0744, 2016.

6. Podoksenov M.N. Conformally homogeneous Lorentz manifolds. II // Siberian Mathematical Journal. 1992. Vol. 33, No 6.

7. Liimatainen T., Salo M. Nowhere conformally homogeneous manifolds and limiting Carleman weights // Inverse Problems and Imaging. 2012. Vol. 6, No 3. DOI: 10.3934/ipi.2012.6.523.

8. Alekseevsky D. Lorentzian manifolds with transitive conformal group // Note di Matematica. 2017. Vol. 37, No 1. DOI: 10.1285/i15900932v37suppl1p35.

9. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях // Известия Алтайского гос. ун-та. 2017. №4(96). DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-19.

10. Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия Алтайского гос. ун-та. 2017. №1(93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-28.

11. Komrakov B.B. Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. 2001.