УДК 519.688

Математические задачи прикладного портфельного анализа

Е.К. Ергалиев[1], М.Н. Мадияров[1], Н.М. Оскорбин[2]

[1]Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова (Усть-Каменогорск, Казахстан)
[2]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Mathematical Problems of Applied Portfolio Analysis

Ye.K. Yergaliyev[1], M.N. Madiyarov[1], N.M. Oskorbin[2]

[1]Sarsen Amanzholov East Kazakhstan State University (Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan)
[2]Altai State University (Barnaul, Russia)

Проводится исследование математических моделей прикладного портфельного анализа, способов идентификации их параметров и численных методов обоснования оптимальных решений. В настоящее время комплекс математических методов портфельного анализа в финансовой сфере принципиально различен в двух случаях. Первый связан с выбором активов, доходность которых стабильна, но существует ненулевая вероятность их потери. Тогда цель портфельного анализа состоит в определении оптимального набора активов, при котором риски потерь являются минимальными. Второй подход, для которого применима теория Марковица, состоит в выборе совокупности компенсационных активов. Считается, что доходность активов является случайной величиной, но вероятности их полных потерь нулевые. Тогда цель портфельного анализа состоит в выборе совокупности активов, которая обеспечит высокую среднюю доходность и минимальное отклонение уровня дохода от этой величины. Предлагается комплекс математических методов поддержки принятия решений для теории Марковица, основанный на идее формирования таблицы вариантов оптимальных портфелей и использовании принципов ожидаемой полезности, в том числе субъективной, для выбора портфеля, который соответствует инвестиционным предпочтениям лиц, принимающих решения.

Ключевые слова: теоретико-вероятностная модель Марковица, обоснование решений при неопределенности, субъективная полезность инвестиционных решений, прикладной портфельный анализ.

In this paper, we study mathematical models of applied portfolio analysis, methods for identifying their parameters, and numerical methods to substantiate optimal solutions. At present, the group of mathematical methods of portfolio analysis in the financial sphere is fundamentally different in two aspects. The first one is related to the choice of assets which profitability is stable, but there is a non-zero probability of losing assets. Then the purpose of the portfolio analysis is to determine the optimal set of assets at which the risks of loss are minimal. The second approach, for which the Markowitz theory is applicable, concerns selecting a set of compensatory assets. It is believed that the return on assets is a random variable, but the probability of their total losses is zero. Then the purpose of the portfolio analysis is to select a set of assets that will provide a high average return and a minimum deviation of income from this average. This paper discusses the mathematical problems of applying the Markowitz theory, which allows selecting the optimal set of compensation assets with high average returns. A set of mathematical decision-making support methods for the Markowitz theory are proposed, and the set of methods is based on the idea of forming a table of options for optimal portfolios and on using the principles of expected utility, including subjective, to choose a portfolio that corresponds to the investment preferences of decision makers..

Key words: the Markowitz mean-variance analysis, substantiating optimal solutions during uncertainties, subjective utility of investment decisions, applied portfolio analysis.

DOI 10.14258/izvasu(2019)1-12

Введение

Математическая модель Марковича опубликована в работе [1] и составляет основу современного прикладного портфельного анализа [2–5]. При математическом моделировании рассматриваемой задачи поддержки принятия решений существенно используются методы теории вероятностей и математической статистики. Основные понятия прикладного портфельного анализа — доходность и риск варианта инвестиционного портфеля — являются статистическими оценками математического ожидания и доверительного интервала случайной величины. Под вариантом портфеля далее понимается выбранная совокупность активов и фиксированные доли инвестиционного фонда, выделенные для их реализации. Итоговым результатом прикладного портфельного анализа является выбор оптимального варианта портфеля, для которого риски и доходности сбалансированы в представлении инвестора.

В литературе выделены две главные причины ограниченного использования теории Марковица на практике. Во-первых, трудности оценок ковариационной матрицы, которая участвует в формуле риска, и средних доходностей активов [6]. Параметры совместного распределения доходностей активов претерпевают существенные изменения в период инвестирования, ковариации между ними нестабильны, т.е. их практически невозможно оценить по данным статистических наблюдений. Следует отметить, что приведенная причина неустранима для прикладного портфельного анализа. Она характерна для эмпирических методов исследования, в которых выполнение принципа эмпирического моделирования «так было — так будет» следует контролировать [7].

В работе Н.М. Оскорбина и М.Н. Мадиярова [5] предлагается состояние экономики в предметной области инвестирования классифицировать как *стабильное, нестабильное* и *кризисное*. В математической статистике разработаны соответствующие методики идентификации этих состояний. В двух первых случаях предложены соответствующие методики прикладного портфельного анализа [5], которые рассмотрим ниже. В последнем случае теория Марковица не применима.

Второе ограничение прикладной значимости теории Марковица связано с обоснованием компромиссного значения доходности и риска при выборе оптимального варианта инвестиционного портфеля. В настоящее время в литературе выделяют три типа портфелей [8]: консервативный, который характеризуется незначительными рисками; умеренный, когда риски оцениваются как средние; агрессивный, для которого риски снижения доходности портфеля достаточно велики. Инвестору рекомендуется формировать сбалансированный портфель, который включает в себя активы всех трех типов, например, в пропорциях 60, 30 и 10%.

Приведенная рекомендация требует, на наш взгляд, разработки операционной методики. В данной работе рассмотрены математические задачи применения подхода Марковица, которые позволяют выбрать оптимальный набор компенсационных активов с высокой средней доходностью, сбалансированной с уровнем риска. В статье предлагается комплекс математических методов поддержки принятия решений для теории Марковица, основанный на идее формирования таблицы вариантов оптимальных портфелей [5] и на использовании принципов ожидаемой полезности для выбора портфеля, который соответствует инвестиционным предпочтениям лиц, принимающих решения [9].

Новым направлением прикладного портфельного анализа является применение для выбора оптимального портфеля теории субъективной полезности. В работе [10] предложен такой подход, согласованный с классическим подходом критерия Гурвица [9]. Именно его мы рекомендуем для использования в составе математических задач прикладного портфельного анализа.

Математические модели и методы

Пусть для формирования оптимального портфеля выбраны n активов, доходность которых на период инвестирования — случайные величины $Q_i, i=1,\dots,n$ с математическими ожиданиями $\bar{Q}_i, i=1,\dots,n$ и дисперсиями $D[Q_i], i=1,\dots,n$. Пусть $x_i, i=1,\dots,n$ — доли использования каждого актива в формируемом портфеле, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,n. \qquad (1)$$

Тогда доходность портфеля Q_P на периоде инвестирования — случайная величина, значения которой зависят от доходностей активов по следующей формуле:

$$Q_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Q_i. \qquad (2)$$

С учетом (2) выражение для средней доходности портфеля имеет вид

$$\bar{Q}_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{Q}_i. \qquad (3)$$

Найдем выражение для дисперсии доходности портфеля $D[Q_p]$:

$$D[Q_P] = M[(Q_P - \bar{Q}_i)^2] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (Q_i - \bar{Q})\right)^2\right].$$

Откуда получаем требуемую формулу в матричной записи:

$$D[Q_P] = x \cdot K \cdot x^T. \qquad (4)$$

Здесь x^T — вектор столбец долей активов размерности (n × 1); K — ковариационная матрица (n × n) активов, которая отражает взаимозависимость доходностей выбранных активов.

Модель Марковица предписывает выбор оптимального вектора x^* долей, при котором средняя доходность портфеля должна быть не меньше заданной инвестором величины P_0:

$$D[Q_P] = x \cdot K \cdot x^T \to \min; \quad (5)$$

$$\bar{Q}_P = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{Q}_i \ge P_0; \quad (6)$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0, \quad i = 1,...,n. \quad (7)$$

Из формулы (6) следует, что средний уровень доходности портфеля $\bar{Q}_P$ изменяется в пределах

$$Q_{MIN} \le \bar{Q}_P \le Q_{MAX}. \quad (8)$$

В выражении (8)
$Q_{MIN} = \min(\bar{Q}_1; \bar{Q}_1;...;\bar{Q}_n)$; $Q_{MAX} = \max(\bar{Q}_1; \bar{Q}_1;...;\bar{Q}_n)$. Таким образом, при формировании таблицы вариантов указанные границы для выбора требуемой доходности P_0 в формуле (6) определяются выражением (8).

Рассмотрим уровни риска для оценок реальной доходности портфеля. Обозначим границы доходности варианта p портфеля с числовыми характеристиками $\bar{Q}_P, D[Q_P]$, как H_P, V_P. Доверительный интервал для реальной доходности портфеля запишется так:

$$H_P \le Q_P \le V_P, \text{ где } H_P = \bar{Q}_P - \Delta_P;$$

$$V_P = \bar{Q}_P + \Delta_P.; \ \Delta_P = t_\alpha \sqrt{D[Q_P]}. \quad (9)$$

Здесь t_α — квантиль распределения доходности, определяемый заданным уровнем доверительной вероятности.

Формирование таблицы вариантов инвестиционных портфелей

Для использования модели Марковица (5)–(7) на практике необходимо найти вероятностные оценки ее параметров и обосновать выбор уровня P_0 средней доходности оптимального портфеля. Эту задачу решаем путем формирования таблицы вариантов инвестиционных портфелей при разных значениях P_0. Для этого зададим сетку значений P_0 в границах (8), число значений которой определяется требуемой точности расчетов. В качестве примера в таблице представлены варианты портфелей, сформированных из пяти активов $A_1 - A_5$.

Варианты портфелей, найденных решением задачи (5)–(7) для $P_0 \in [1.8, 5.1]$
Модельные данные на квартальном периоде инвестирования,%

p	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\bar{Q}_p$	Δ_p	H_p	V_p
1	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73	1,03	1,69	3,76
2	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73	1,03	1,69	3,76
3	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73	1,03	1,69	3,76
4	0,74	0,00	0,00	0,26	0,00	2,93	1,06	1,87	3,98
5	0,51	0,00	0,00	0,49	0,00	3,29	1,20	2,09	4,49
6	0,29	0,00	0,00	0,71	0,00	3,65	1,44	2,21	5,09
7	0,06	0,00	0,00	0,94	0,00	4,01	1,73	2,28	5,78
8	0,00	0,00	0,27	0,73	0,00	4,38	2,13	2,24	6,51
9	0,00	0,00	0,63	0,37	0,00	4,74	2,59	2,15	7,33
10	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	5,10	3,07	2,03	8,17

В приведенной таблице первые три портфеля совпадают по всем параметрам, так как при выбранных исходных данных ограничение (6) модели Марковица выполняется как строгое неравенство. По остальным портфелям наблюдается закономерность в изменении долей ($x_1,...,x_5$) активов $A_1 - A_5$, включенных в портфель (см. данные столбцов 2–6 таблицы). Характерным свойством таблицы вариантов является увеличение риска доходности, определяемого величиной доверительного интервала (столбец Δ_P), с ростом средней доходности P_0 (столбец данных $\bar{Q}_P$).

Методики формирования таблиц вариантов портфелей существенно различаются для стабильной и нестабильной экономик. В случае стабильной экономики параметры модели можно оценить по доходностям активов на выбранном интервале наблюдения как средние значения. При нестабильной экономике мы считаем, что принцип эмпирического моделирования «так было — так будет» выполняется для параметров уравнения прогноза значений временного ряда по каждому активу. Тогда ожидаемая средняя доходность портфеля определяется прогнозными значениями доходностей активов на период инвестирования. При использовании метода наименьших квадратов (МНК) для прогноза доходностей, оценки ковариационной матрицы вычисляются на невязках уравнения прогноза.

Рассмотренные подходы прикладного портфельного анализа реализованы в среде Excel и апробированы методами компьютерного моделирования выборок активов по кварталам за три года наблюдения. Методика также апробирована на реальных данных формирования портфелей паевых инвестиционных фондов при ведущих банках России.

Выбор оптимального портфеля в условиях неопределенности

Выбор инвестиционного портфеля проводится методами теории ожидаемой полезности в дискретных моделях принятия решений в условиях неопределенности [9]. Для этого необходимо использовать один из критериев, рекомендуемых в литературе, например Вальда, Байеса — Лапласа, Сэвиджа или Гурвица. На примере (см. табл.) решению инвестора соответствует строка, а значения неопределенного фактора — два последних столбца. Процедуры принятия решений подробно описаны в литературе. Например, при использовании критерия Вальда (принцип максимальной гарантированной доходности) оптимальным является портфель с номером 7.

Рассмотрим применение теории субъективной полезности для обоснования оптимального портфеля. Функция субъективной полезности предложена в [10], а ее свойства и области применения подробно описаны в [11]. В этих работах субъективность оценок полезности зависит от коэффициента β — «страха» риска ($\beta \geq 0$) и коэффициента γ, определяющего уровень сожаления по упущенной выгоде при отказе от проекта или надежды на получение дополнительного дохода как при агрессивном портфеле ($\gamma \in [0,1]$).

Тогда инвестор, нейтральный к риску и упущенной выгоде, при выборе лучшего проекта ориентируется на максимальную величину неотрицательного среднего значения. Эта стратегия совпадает с критерием Байеса — Лапласа при принятии решений в условиях неопределенности [9]. Принцип максимальной гарантированной доходности приводит к выбору проекта с максимальной неотрицательной величиной H_p. Критерий Гурвица в рассматриваемом случае запишется так: $U(\alpha) = \alpha H_P + (1-\alpha)V_P$. При отрицательных значениях $U(\alpha)$ портфель к реализации не принимается.

С учетом формулы (9) имеем: $U(\alpha) = \overline{Q}_P - \alpha\Delta_P + (1-\alpha)\Delta_P$. Здесь α — весовой коэффициент Гурвица.

Функцию субъективной полезности $C(\beta,\gamma)$ по аналогии с [10] для множества вариантов проектов определим в следующем виде:

$$C(\beta,\gamma) = \overline{Q}_P - \beta\Delta_P + \gamma\Delta_P\,. \tag{10}$$

Функции (10) являются одной из модификаций математического отражения субъективных оценок инвестиционных решений. При ее использовании проект принимается к реализации, если субъективная оценка $C(\beta,\gamma)$ чистого приведенного дохода строго положительна, и проект отвергается в противном случае. Мы сохраним за коэффициентами (β,γ) их названия, которые использованы в [10], и способ идентификации их значений по известному коэффициенту α критерия Гурвица [11].

Сравнивая выражения критерия Гурвица и функции субъективной полезности, видим, что (α,β,γ) связаны следующими соотношениями: $\alpha = \beta;\ \gamma = (1-\alpha);\ \beta = (1-\gamma)$.

Апробация введенной функции субъективной полезности проведена при идентификации ее параметров для выбранных модельных инвесторов с использованием тестовых заданий и при оценках оптимального инвестиционного решения в прикладном портфельном анализе.

Заключение

В данной работе рассмотрены математические задачи применения подхода Марковица, которые позволяют выбрать оптимальный набор компенсационных активов с высокой средней доходностью, сбалансированной с уровнем риска.

Предложен комплекс математических методов поддержки принятия решений для теории Марковица, основанный на идее формирования таблицы вариантов оптимальных портфелей и использовании принципов ожидаемой полезности, в том числе субъективной, для выбора портфеля, который соответствует инвестиционным предпочтениям лиц, принимающих решения.

Библиографический список

1. Markowits Harry M. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. 7. № 1.

2. Наумов А. А., Ходусов Н. В. Управление портфельными инвестициями. Модели и алгоритмы. Новосибирск, 2005.

3. Наумов А.А., Федоров А.А. Синтез эффективного портфеля проектов // Информационные технологии моделирования и управления. 2006. № 1(26).

4. Мотыль Д. Управление доходностью и ликвидностью портфеля активов банка // Рынок ценных бумаг. 1997. №14.

5. Оскорбин Н.М., Мадияров М.Н. Методика и инструментальные средства прикладного портфельного анализа инвестиционной стратегии // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования — 2017 : материалы Международной конференции / отв. ред. Е.Д. Родионов. Барнаул, 2017.

6. Bierwag G., Kaufman G., Toevs A. Single factor duration models in a discrete general equilibrium framework // Journal of Finance. 1982. Vol. 37, №2.

7. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования. 2-е изд., испр. и доп. Барнаул, 2013.

8. Ширяев В.И. Оптимальные портфели, управление финансами и рисками. 2-е изд. М., 2009.

9. Бродецкий Г.Л. Системный анализ в логистике. Выбор в условиях неопределённости. М., 2010.

10. Данько Е. В., Оскорбин Н.М. Модель оптимизации параметров n-этапной инвестиционной экспертизы // Известия Алтайского гос. ун-та. 2014. №1/2(81).

11. Данько Е.В. Функция субъективной полезности инвестиционных решений в условиях информационной неопределенности и метод оценки ее параметров // Вестник Новосибирского гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2015. Т. 13, вып. 3.