

УДК 514.745.82

## Геометрия и топология фазовых портретов интегрируемых блочно-линейных динамических систем\*

В.П. Голубятников<sup>1,3</sup>, В.С. Градов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия)

<sup>3</sup>Новосибирский военный институт войск национальной гвардии (Новосибирск, Россия)

## Geometry and Topology of Phase Portraits of Integrable Block-Linear Dynamical Systems

V.P. Golubyatnikov<sup>1,3</sup>, V.S. Gradov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russia)

<sup>2</sup>Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russia)

<sup>3</sup>Novosibirsk Military Institute of National Guard Troops (Novosibirsk, Russia)

Рассматриваются трехмерные блочно-линейные динамические системы, моделирующие два класса кольцевых генных сетей. Генные сети первого класса регулируются только отрицательными обратными связями, второго — только положительными. Выявление принципов функционирования таких сетей позволяет управлять биохимическими процессами в живых организмах. Комбинаторная структура моделируемых генных сетей кольцевая, поэтому рассматривается случай, когда скорость изменения концентрации любого вещества зависит монотонно от концентрации «предыдущего» вещества. Для первого из этих классов моделей установлены достаточные условия существования и единственности цикла. Эти динамические системы интегрируемы, и для каждой из них можно построить интегральное многообразие, содержащее цикл. В случае, когда такая система симметрична относительно циклической перестановки переменных, получены условия разрешимости одной обратной задачи идентификации параметра системы при известной информации о периоде ее цикла. Для динамических систем второго класса доказано отсутствие цикла, симметричного относительно циклической перестановки координат.

**Ключевые слова:** блочно-линейные динамические системы, обратные связи, фазовые портреты, циклы, инвариантные области, интегральные многообразия, генные сети, отображение Пуанкаре.

DOI 10.14258/izvasu(2019)1-11

**Введение.** Отрицательность обратных связей в генной сети означает, что скорость изме-

We consider 3-dimensional block-linear dynamical systems as models of two classes of circular gene networks. The gene networks of the first class are regulated by negative feedbacks only. Networks of the second class are regulated by positive feedbacks. Investigation of principles of functioning of these gene networks allows to control biochemical processes in living organisms. Combinatorial structure of the considered gene networks is a circular one, and we study the case when the rate of change of concentration of any substance in the gene network depends on the concentration of the «previous» substance monotonically. Sufficient conditions of existence and uniqueness of a cycle are elaborated for the first class of these dynamical systems. These systems are integrable, and we construct for each of them an integral manifold containing a cycle. In the case of the systems symmetric with respect to cyclic permutations of the variables, we find a solution of an inverse problem of parameter identification when some information about a period of this cycle is known. For another class of similar block-linear dynamical systems, we show the non-existence of a cycle which is symmetric to that permutation of the variables.

**Key words:** block-linear dynamical systems, feedbacks, phase portraits, cycles, invariant domains, integral manifolds, gene networks, Poincaré map.

нения концентрации любого вещества монотонно убывает с увеличением концентрации предыдущего, а регулирование положительными обратными связями, наоборот, моделируется монотонно возрастающими функциями (см. [1–3]).

\*Работа поддержана грантом 18-01-00057 РФФИ и программой фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5., проект № 0314-2018-0011.

**Математическая постановка**

В качестве моделей генных сетей рассмотрим блочно-линейные динамические системы одного из типов:

$$\dot{x}_i = L_i(x_{i-1}) - k_i x_i; \tag{1}$$

$$\dot{x}_i = \Gamma_i(x_{i-1}) - k_i x_i, \tag{2}$$

где  $x_0 = x_N$  и  $i = \overline{1, N}$ . Переменные  $x_i$  — это концентрации веществ в генной сети, ступенчатые функции  $L_i$  и  $\Gamma_i$  описывают скорости их синтеза, вычитаемые — скорости их разложений.

Функции  $L_i$  монотонно убывают, функции  $\Gamma_i$  монотонно возрастают и определяются так:

$$L_i(w) = \begin{cases} A_i k_i, & w \in (0, \alpha_{i-1}), \\ 0, & w \in (\alpha_{i-1}, \infty); \end{cases} \tag{3}$$

$$\Gamma_i(w) = \begin{cases} A_i k_i, & w \in (\alpha_{i-1}, \infty); \\ 0, & w \in (0, \alpha_{i-1}). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем  $0 < \alpha_i < A_i$ ,  $\alpha_0 = \alpha_N$ ,  $k_i > 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Система (1) описывает генную сеть, регулирующую отрицательными обратными связями, а система (2) — сеть с положительными обратными связями. Пусть  $\dot{X} = \Phi(X)$  — бескоординатная форма записи динамической системы (1) или (2), задаваемая векторным полем  $\Phi(X)$  в положительном октанте  $\{x_i \geq 0\}$ .

В работах [4] – [8] рассматривались вопросы существования циклов для систем, у которых поле  $\Phi(X)$  определялось ступенчатыми функциями обоих типов — и  $L$ , и  $\Gamma$  (соответственно, для систем с гладким полем  $\Phi(X)$ ).

В данной работе мы ищем достаточные условия существования и устойчивости циклов у таких трехмерных систем в случае  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ .

**Построение фазового портрета**

В положительном октанте  $\{x_i \geq 0\}$  построим область

$$Q = [0, A_1] \times [0, A_2] \times [0, A_3].$$

**Лемма 1.** *Параллелепипед  $Q$  инвариантен для систем (1) и (2).*

**Доказательство:** Опишем направление векторного поля  $\Phi(X)$  на гранях этого многогранника.

Рассмотрим систему (1) и пару параллельных граней  $x_1 = 0$  и  $x_1 = A_1$  параллелепипеда  $Q$ .

$$\dot{x}_1 \Big|_{x_1=0} = L_1(x_3) \geq 0,$$

$$\dot{x}_1 \Big|_{x_1=A_1} = L_1(x_3) - kA_1 \leq 0.$$

На участке грани, где  $x_3 < \alpha_3$ , поле  $\Phi(X)$  направлено внутрь области  $Q$ , а там, где  $x_3 > \alpha_3$ , первая компонента  $\Phi(X)$  нулевая, а траектории через этот участок из этой области также не выходят.

Направления поля  $\Phi(X)$  на других гранях параллелепипеда  $Q$  описываются аналогично, те же рассуждения проводятся и для системы (2).  $\square$

Для системы (1) с гладкими функциями  $L_i$  эта лемма была установлена в [9]. Следуя [3, 10], разобьем параллелепипед  $Q$  плоскостями  $x_i = \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , на 8 блоков. Занумеруем каждый такой блок бинарным мультииндексом  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ , где  $\varepsilon_i = 0$ , если  $x_i < \alpha_i$ , и  $\varepsilon_i = 1$ , если  $x_i > \alpha_i$ .

**Лемма 2.** *В каждом блоке  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$  траектории систем (1), (2) прямолинейны и описываются гомотетиями с центрами в вершинах  $Q$ .*

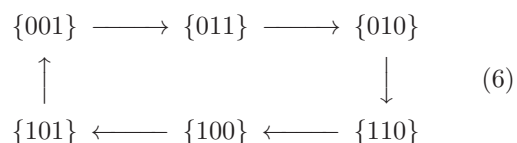
**Доказательство:** Рассмотрим систему (1) и блок  $\{001\}$ , где ее решение для произвольных начальных данных  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  принимает вид

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 e^{-kt}, \\ x_2 &= A_2 - e^{-kt}(A_2 - x_2^0); \\ x_3 &= A_3 - e^{-kt}(A_3 - x_3^0) \end{aligned} \tag{5}$$

и задает луч в  $\mathbb{R}^3$ . При  $t \rightarrow \infty$  траектории в блоке  $\{001\}$  описываются гомотетией с центром в вершине  $(0, A_2, A_3) \in Q$ , причем центр гомотетии является аттрактором. Для всех остальных блоков и для системы (2) рассуждения аналогичны.  $\square$

Назовем валентностью блока  $\epsilon$  число  $\nu(\epsilon)$ , равное количеству граней блока, через которые траектории системы могут выходить из него (см. [7]).

У системы (1) блоки  $\{000\}$  и  $\{111\}$  имеют валентность  $\nu = 3$ , траектории выходят из этих блоков в соседние через все три грани, лежащие внутри  $Q$ , и обратно не возвращаются. Значит, циклы системы (1) не проходят по этим двум блокам. Для оставшихся блоков  $\nu = 1$ , причем для всех точек таких блоков их траектории будут переходить из блока в блок согласно диаграмме (см. [10]):



Пусть  $W$  — объединение перечисленных здесь блоков. Из доказательства Леммы 1 следует, что область  $W$  инвариантна для системы (1).

Для общих граней соседних блоков, перечисленных в диаграмме (6), введем обозначения:

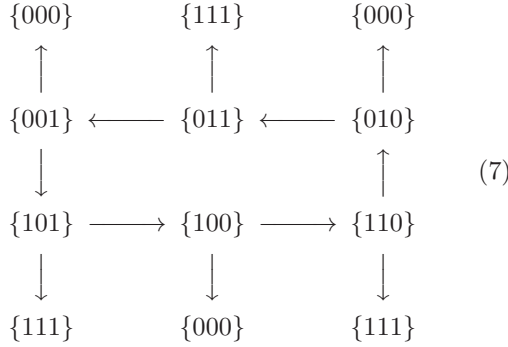
$$\begin{aligned} F_0 &= \{001\} \cap \{011\}, & F_1 &= \{011\} \cap \{010\}; \\ F_2 &= \{010\} \cap \{110\}, & F_3 &= \{110\} \cap \{100\}; \\ F_4 &= \{100\} \cap \{101\}, & F_5 &= \{101\} \cap \{001\}. \end{aligned}$$

На плоскостях  $x_i = \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ступенчатые функции (3) и (4) имеют разрывы и не определены, но решения систем (1) и (2) на этих плоскостях можно доопределить по непрерывности, как это делается в теории билиардов (см. [11]).

У системы (2) блоки с индексами  $\{000\}, \{111\}$  имеют валентность  $\nu = 0$ , т. е., попадая в эти блоки, траектории уже не выходят оттуда. Рассмотрим, например, блок  $\{000\}$ . Решение системы (2) при произвольных начальных данных  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  из этого блока имеет вид

$$x_1 = x_1^0 e^{-kt}, \quad x_2 = x_2^0 e^{-kt}, \quad x_3 = x_3^0 e^{-kt}.$$

Точка  $(0, 0, 0) \in \{000\}$  — аттрактор. Другой аттрактор  $(A_1, A_2, A_3)$  системы (2) находится в блоке  $\{111\}$ . У ее оставшихся блоков  $\nu = 2$ , а фазовый портрет описывается диаграммой



### Существование циклов

Рассмотрим симметричный случай систем (1), (2), когда  $A_i = A$ ,  $\alpha_i = \alpha$ ,  $k_i = k$  при  $i = 1, 2, 3$ .

**Теорема 1.** *Если  $A > \alpha$ , то у симметричной системы (1) существует единственный цикл  $\mathcal{C}$  в области  $W$ , симметричный относительно перестановки координат  $\sigma : x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ .*

**Доказательство:** Рассмотрим траекторию с начальной точкой  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in F_0 \subset \{001\}$ , где  $x_1^0 = \alpha$ ,  $x_2^0 < \alpha$ ,  $x_3^0 \geq \alpha$ . Решение системы в  $\{001\}$  описывается уравнениями (5). За время  $t_1$  траектория точки  $X^0$  попадет на грань  $F_1$  блока  $\{011\}$  в точку  $X^1$  с координатами

$$\begin{aligned}
 x_1^1 &= \frac{\alpha(A - \alpha)}{A - x_2^0}; & x_2^1 &= \alpha, \\
 z_3^1 &= \frac{A(\alpha - x_2^0) + x_3^0(A - \alpha)}{A - x_2^0}.
 \end{aligned}$$

Так же находится и время  $t_2$ , за которое траектория точки  $X^1$  переходит с грани  $F_1$  в точку  $X^2 \in F_2$  с координатами:

$$\begin{aligned}
 x_1^2 &= \frac{\alpha^2(A - \alpha)}{A(\alpha - x_2^0) + x_3^0(A - \alpha)}; & x_3^2 &= \alpha, \\
 x_2^2 &= A - \frac{\alpha(A - \alpha)(A - x_2^0)}{A(\alpha - x_2^0) + x_3^0(A - \alpha)}.
 \end{aligned}$$

Проведем в кубе  $Q$  диагональ  $x_1 = x_2 = x_3$  и повернем  $Q$  вокруг этой диагонали на угол  $\theta = 120^\circ$ . При этом точка  $X^0 = (\alpha, x_2^0, x_3^0) \in F_0$  перейдет в точку  $X^2 = (x_2^0, x_3^0, \alpha) \in F_2$ .

Найдем такую точку  $X^0$ , чтобы после сдвига вдоль траектории она перешла в точку

$X^2 = \theta(X^0)$ . Если такая точка существует, то ее траектория замкнута, и при сдвигах вдоль нее координаты точки  $X^0$  переставляются по циклу  $X^0 \rightarrow X^2 \rightarrow X^4(x_3^0, \alpha, x_2^0) \rightarrow X^0$ .

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 x_2^0 &= \frac{\alpha^2(A - \alpha)}{A(\alpha - x_2^0) + x_3^0(A - \alpha)}; \\
 x_3^0 &= A - \frac{\alpha(A - \alpha)(A - x_2^0)}{A(\alpha - x_2^0) + x_3^0(A - \alpha)}.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Если (8) имеет единственное решение в области  $\{(x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^2 : x_2^0 \in (0, \alpha), x_3^0 \in (\alpha, A)\}$ , то в фазовом портрете системы (1) существует единственный цикл  $\mathcal{C}$ , симметричный относительно  $\sigma$ . Период этого цикла равен  $\tau = 3(t_1 + t_2)$ .

Уравнения системы (8) описывают гиперболы  $H_1$  и  $H_2$  в плоскости координат  $x_2^0, x_3^0$ . Обе гиперболы проходят через точку  $x_2^0 = \alpha, x_3^0 = \alpha$ . Значит, поиск циклов системы (1) сведен к задаче нахождения остальных точек пересечения этих гипербол. Аналогичные рассуждения использованы в [5, 6] для других типов динамических систем.

Первая координата точки пересечения  $H_1$  и  $H_2$  находится из уравнения относительно  $x_2^0$ :

$$(A - \alpha)(x_2^0)^2 - (A^2 - A\alpha + \alpha^2)x_2^0 + (A - \alpha)\alpha^2 = 0,$$

которое имеет единственный корень  $x_2^*$  на интервале  $(0, \alpha)$ . При  $x_2^0 \in (0, \frac{\alpha}{A}(A - \alpha)) \cup (\alpha, \infty)$  из уравнения (8) следует, что  $x_3^* > \alpha$ , и, поскольку  $x_2^* \in (0, \frac{\alpha}{A}(A - \alpha))$ , гиперболы  $H_1$  и  $H_2$  имеют единственную общую точку  $X^* = (x_2^*, x_3^*) \in F_0$ . Значит, в инвариантной области  $W$  существует единственный цикл  $\mathcal{C}$ , симметричный относительно  $\sigma$ . Его период равен  $\tau$ , а натянутая на  $\mathcal{C}$  шестигранная поверхность с вершиной в точке  $(\alpha, \alpha, \alpha)$  является интегральным многообразием для системы (1).  $\square$

**Теорема 2.** *Если  $A > \alpha$ , то у системы (2) не существует цикла, симметричного относительно перестановки  $\sigma$ .*

**Доказательство:** Пусть  $x_i = \alpha(X_i + 1)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Следуя схеме доказательства теоремы 1 и изменив диаграмму (6) на диаграмму (7), рассмотрим траекторию точки  $X^0 \in F_4$  блока  $\{110\}$ ; здесь  $X_1^0 > 0, X_2^0 = 0, X_3^0 < 0$ . После такой замены координат система (2) будет иметь тот же вид, но функции  $\Gamma$  преобразуются в функции  $\tilde{\Gamma}$ :

$$\tilde{\Gamma}(w) = \begin{cases} Bk, & w > 0, \\ -k, & w < 0, \end{cases}; \quad B = \frac{A}{\alpha} - 1.$$

Решая систему (2) в блоке  $\{110\}$ , найдем время  $t_1$  перехода этой траектории с грани  $F_4$  на грань  $F_3$  в точку  $X^1 \in F_3 \subset \{010\}$ :

$$X_1^1 = 0, \quad X_2^1 = \frac{BX_1^0}{X_1^0 + 1}; \quad X_3^1 = \frac{BX_1^0 + X_3^0}{X_1^0 + 1}.$$

И далее аналогично находим  $X^2 \in F_2 \subset \{011\}$ :

$$X_3^2 = 0, \quad X_1^2 = \frac{BX_1^0 + X_3^0}{B - X_3^0};$$

$$X_2^2 = \frac{B(B+1)X_1^0 + X_3^0}{B - X_3^0}.$$

Если найдется такая точка  $(X_1^0, 0, X_3^0) \in F_4$ , которая после сдвига вдоль траектории перейдет в точку  $(X_3^0, X_1^0, 0) \in F_2$ , то ее траектория будет циклом, симметричным относительно  $\sigma$ . Отсюда получаем:  $(X_3^0)^2 + BX_1^0 - (B-1)X_3^0 = 0$ ,  $X_1^0 X_3^0 + B^2 X_1^0 + X_3^0 = 0$ ; пусть  $Z := X_1^0$ , тогда  $Z^2 + (B+2)(B^2 - B + 1)Z + B^2 - B + 1 = 0$ .

Корни этого уравнения отрицательны, на грани  $F_4$  имеем  $X_1^0 \geq 0$ , поэтому цикла, симметричного относительно  $\sigma$ , у системы (2) нет.  $\square$

Итак, для симметричной интегрируемой системы (1) явным образом построен цикл, симметричный относительно  $\sigma$ . Рассмотрим теперь несимметричный случай системы (1), в котором функции  $L_i$  различны.

**Теорема 3.** Если  $A_i > \alpha_i$ ,  $k_i = k$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то в области  $W$  все траектории динамической системы (1) асимптотически приближаются к единственному устойчивому предельному циклу.

**Доказательство:** Пусть  $x_i = X_i + \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , тогда функции  $L_i(w)$  преобразуются в  $\widetilde{L}_i(w)$ :

$$\widetilde{L}_i(w) = \begin{cases} B_i k, & w < 0 \\ -k, & w > 0 \end{cases}; \quad B_i = A_i - \alpha_i.$$

В каждом блоке  $\epsilon$  диаграммы (6) решение системы (1) принимает вид

$$X_i = \lambda_i - (\lambda_i - X_i^0)e^{-kt},$$

где  $\lambda_i = \widetilde{L}_i(w)$  для любого  $w \in \epsilon$ . Следуя доказательству теоремы 1 (см. также [2], где изучались системы других типов), можно описать переходы вдоль траекторий с грани на грань:

$$f_i : F_i \rightarrow F_{i+1}, \quad i = \overline{0, 5}, \quad F_6 = F_0.$$

Все отображения  $f_i$  дробно-линейны:

$$f_i(\vec{X}) = \frac{M_i \vec{X}}{1 + (\vec{\varphi}_i, \vec{X})}. \quad (9)$$

Здесь  $M_i$  — матрицы  $2 \times 2$  с неотрицательными элементами;  $\vec{\varphi}_i$  — векторы с неотрицательными координатами;  $\vec{X}$  — вектор координат точек грани;  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение.

Рассмотрим, например, отображение  $f_0$  и покажем, что его можно представить в виде (9). Можно проверить, что точка  $(0, X_2^0, X_3^0) \in F_0$  при  $f_0$

переходит в точку  $(X_1^1, 0, X_3^1) \in F_1$  с координатами

$$X_1^1 = \frac{\alpha_1 X_2^0}{B_2 - X_2^0}, \quad X_2^1 = 0;$$

$$X_3^1 = \frac{-B_3 X_2^0 + B_2 X_3^0}{B_2 - X_2^0}.$$

Полученные преобразования записаны в базисах  $(e_2, e_3)$  и  $(e_1, e_3)$  граней  $F_0$  и  $F_1$  соответственно. Здесь  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  — стандартные базисные векторы в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Введем на грани  $F_0$  базис  $(-e_2, e_3)$  и на грани  $F_1$  — базис  $(e_3, -e_1)$ , в которых матрица  $M_1$  и вектор  $\vec{\varphi}_1$  принимают вид

$$M_1 = \begin{pmatrix} B_3/B_2 & 1 \\ \alpha_1/B_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_1 = (1/B_1, 0).$$

Следовательно,  $f_0$  представимо в виде (9). Аналогично рассматриваются и остальные отображения  $f_i$  сдвигов вдоль траекторий с грани на грань.

Композиция  $h = f_5 f_4 f_3 f_2 f_1 f_0$  является отображением последования Пуанкаре; оно тоже представимо в виде (9) как композиция дробно-линейных отображений. Можно проверить, что у матрицы  $M$  этого отображения все элементы строго положительны, а определитель равен единице.

Неподвижные точки отображения Пуанкаре являются точками пересечения цикла с гранью  $F_0$ . В нашем случае нужно показать, что для любой точки  $\vec{X} \in F_0$  выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(\vec{X}) = \vec{X}^*, \quad (10)$$

где точка  $\vec{X}^*$  определена ниже.

Согласно теореме Фробениуса-Перрона наибольшее по модулю собственное значение  $\rho$  матрицы  $M$  строго положительно и имеет кратность один, а соответствующий ему собственный вектор  $\vec{v}$  имеет строго положительные координаты. Отметим, что из  $\det(M) = 1$  следует, что  $\rho > 1$ .

Пусть  $\vec{u} = \sum_{k=0}^{n-1} M^k \vec{X}$ , тогда

$$h^n(\vec{X}) = \frac{M^n \vec{X}}{1 + (\varphi, \vec{u})} = \frac{\rho^{-n} M^n \vec{X}}{\rho^{-n} (1 + (\varphi, \vec{u}))}. \quad (11)$$

Так как все элементы матрицы  $M$  строго положительны, то  $\rho^{-1}M$  подобна некоторой стохастической матрице  $P$ , т. е.  $M = \rho V P V^{-1}$ . Здесь  $V = \text{diag}\{v_1, v_2\}$ , где  $v_1, v_2$  — компоненты собственного вектора  $\vec{v}$ . Собственное значение  $\rho$  имеет кратность один, значит, существует матрица  $M^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{-n} M^n$ , которая состоит из столбцов  $\beta_i \vec{v}$ , где  $\beta_i$  — скаляр,  $i = 1, 2$ . Пусть

$$S_n \vec{X} = \rho^{-n} \vec{u}, \quad R_n \vec{X} = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{-k} M^k \vec{X}.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \vec{X} - R_n \vec{X}) = 0$  для любой точки  $\vec{X} \in F_0$ , из вида  $R_n \vec{X}$  получаем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \vec{X} = (\rho - 1)^{-1} \mathbb{M}^* \vec{X}.$$

Перейдем к пределу в (10), (11):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}^n \vec{X}}{\rho^{-n} + (\varphi, S_n \vec{X})} &= \\ &= \frac{(\rho - 1) \mathbb{M}^* \vec{X}}{(\varphi, \mathbb{M}^* \vec{X})} = \frac{(\rho - 1)v}{(\varphi, v)} = \vec{X}^*. \end{aligned}$$

Это выполняется для любой точки  $\vec{X} \in F_0$ , и потому полученная неподвижная точка  $\vec{X}^*$  единственная. Следовательно, и цикл у системы (1) единственный и устойчивый.  $\square$

#### Обратная задача

Пусть у системы (1)  $L_1 = L_2 = L_3 = L$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ , и существует единственный цикл  $\mathcal{C}$ . И пусть известен один из временных параметров цикла, например, период  $\tau > 0$  или одно из времен  $t_1, t_2$ . Введем обозначения:  $T = e^{-k\tau/3}$ ,  $T_1 = e^{-kt_1}$ ,  $T_2 = e^{-kt_2}$ . Заметим, что  $0 < T < T_1 < 1$  и  $0 < T < T_2 < 1$ . Будем предполагать, что известно  $A = L(0)$ , но параметр  $\alpha$  при этом неизвестен. Можно ли при таких условиях найти значение параметра  $\alpha \in (0, A)$ ?

**Теорема 4.** Пусть у системы (1) существует единственный цикл  $\mathcal{C}$  в инвариантной области  $Q$ , и известны параметры  $A > 0$ ,  $T \in (0, 1)$ . Тогда обратная задача идентификации параметра  $\alpha \in (0, A)$  имеет два решения при  $T \in \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$  и единственное решение при  $T = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ .

**Доказательство:** Достаточно рассмотреть решение этой симметричной системы в блоках  $\{001\}$  и  $\{011\}$  с начальными данными на гранях  $F_0$  и  $F_1$  и воспользоваться условиями замкнутости и симметричности периодической траектории. Соответствующая система уравнений

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \alpha T_1, \quad \alpha = A - T_1(A - x_2^0); \\ x_2^0 &= x_1^1 T_2, \quad x_3^0 = A - T_2(A - \alpha); \\ \alpha &= x_3^1 T_2, \quad x_3^1 = A - T_1(A - x_3^0) \end{aligned} \quad (12)$$

сводится к системе

$$\begin{aligned} \alpha &= T_2(A - T(A - \alpha)), \\ \alpha &= A - \frac{T}{T_2}(A - \alpha T), \end{aligned} \quad (13)$$

откуда путем исключения  $T_2$  получается

$$\alpha^2(1 - T^3) - A\alpha(1 - T^3) + A^2T(1 - T) = 0.$$

При  $T \in \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$  дискриминант этого уравнения неотрицателен, и в таком случае оба корня квадратного уравнения меньше  $A$ .  $\square$

В дополнение к условиям теоремы 4 предположим, что кроме этих параметров  $A$  и  $T$  известен и один из параметров  $T_1$  или  $T_2$ . Для такой обратной задачи имеет место следующее утверждение.

**Теорема 5.** Пусть у динамической системы (1) существует единственный цикл  $\mathcal{C}$  в области  $Q$ , известны параметры  $T_1, T \in (0, 1)$ ,  $T_1 > T$  и параметр  $A > 0$ . Тогда обратная задача идентификации параметра  $\alpha \in (0, A)$  имеет единственное решение в двух случаях:

- 1) если  $T_1$  является корнем уравнения  $x^2 + (T^3 - 2T^2 - 1)x + T = 0$  при  $T \in \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$ ;
- 2) если  $T$  является корнем уравнения  $T_1 x^3 - 2T_1 x^2 + x + T_1(T_1 - 1) = 0$ .

В других случаях задача решений не имеет.

**Доказательство:** В условиях теоремы 5 система (12) становится линейной, так как дополнительно известен параметр  $T_1$ , но при этом она оказывается переопределенной. Воспользуемся теоремой Кронекера — Капелли. Вычислим ранг матрицы системы (12) и ранг соответствующей расширенной матрицы. Если определитель расширенной матрицы отличен от нуля, то обратная задача решения не имеет. Если же этот определитель равен нулю, то ранги совпадут, что эквивалентно условию

$$\frac{A(T_1^2 + (T^3 - 2T^2 - 1)T_1 + T)}{T_1} = 0,$$

которое выполняется в двух случаях:

- 1) если  $T_1$  является корнем уравнения  $x^2 + (T^3 - 2T^2 - 1)x + T = 0$ ;
- 2) если  $T$  является корнем уравнения  $T_1 x^3 - 2T_1 x^2 + x + T_1(T_1 - 1) = 0$ .

В обоих случаях нужно проверить, удовлетворяют ли корни уравнений тем свойствам, которым должны удовлетворять  $T_1$  и  $T$ . В первом случае корни уравнения  $x^2 + (T^3 - 2T^2 - 1)x + T = 0$  лежат в интервале  $(T, 1)$  при  $T \in \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$ .

Во втором случае корни уравнения  $T_1 x^3 - 2T_1 x^2 + x + T_1(T_1 - 1) = 0$  лежат в интервале  $(0, T_1)$ , если  $T_1 \in (0, 1)$ , и для нахождения параметра  $\alpha$  достаточно воспользоваться любой из формул (13).  $\square$

**Заключение.** В теоремах 1–3 рассмотрены вопросы существования циклов в моделях кольцевых генных сетей. Цель теорем 4 и 5 состоит в определении характеристик генной сети «неинвазивными» методами — по косвенным наблюдениям, например, по периодам циклов и другим временным параметрам.

Авторы искренне благодарны Н.Б.Аюповой за полезные обсуждения и А.А.Акиншинну за стимулирующие численные эксперименты.

### Библиографический список

1. Elowitz M.B., Leibler S. A Synthetic Oscillatory Network of Transcriptional Regulators *Nature*. 2000. V. 403.
2. Glass L., Pasternack J.S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // *Journal of Mathematical Biology*. 1978. V. 6.
3. Hastings S., Tyson J.J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedbacks cellular control systems // *Journal of Differential Equations*. 1977. V. 25.
4. Акинъшин А.А., Голубятников В.П., Голубятников И.В. О некоторых многомерных моделях функционирования генных сетей // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2013. Т. 16, № 1.
5. Аюпова Н.Б., Голубятников В.П. О двух классах нелинейных динамических систем. Четырехмерный случай // *Сибирский математический журнал*. 2015. Т. 56, № 2.
6. Голубятников В.П., Калёных А.Э. О строении фазовых портретов некоторых нелинейных динамических систем // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. 2015. Т. 15, № 1.
7. Акинъшин А.А., Голубятников В.П. Циклы в симметричных динамических системах // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. 2012. Т. 12, № 2.
8. Gaidov Yu.A., Golubyatnikov V.P., Kleshchev A.G., Lashina E.A., Likhoshvai V.F. Regular and chaotic dynamics in the gene network modeling // *Proceedings of 8-th International conference "Human&Computers"*, Japan, Aizu-Wakamatsu, 2005.
9. Гайдов Ю.А., Голубятников В.П. О некоторых нелинейных динамических системах, моделирующих несимметричные генные сети // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. 2007. Т. 7, № 2.
10. Gaidov Yu.A., Golubyatnikov V.P., Kleshchev A.G., Volokitin E.P. Modeling of asymmetric gene networks functioning with different types of regulation. *Biophysics*. 2006. V. 51, suppl. 1.
11. Табачников С. Геометрия и бильярды. Москва ; Ижевск, 2011.