МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.9

О вырожденных особых точках динамических систем, имеющих отношение к нормализованному потоку Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха

Н.А. Абиев

Таразский государственный университет им. М.Х. Дулати (Тараз, Казахстан)

On Degenerated Singular Points of Dynamical Systems Related to the Normalized Ricci Flow on Generalized Wallach Spaces

N.A. Abiev

M.Kh. Dulaty Taraz State University (Taraz, Kazakhstan)

Изучаются вырожденные особые точки динамической системы, получаемой в результате редукции нормализованного потока Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха. Известно, что каждое обобщенное пространство Уоллаха характеризуется тройкой действительных чисел, удовлетворяющих вполне определенным неравенствам. Следовательно, соответствующая система дифференциальных уравнений тоже зависит от трех вещественных параметров. Н.А. Абиевым, А. Арванитойоргосом, Ю.Г. Никоноровым и П. Сиасосом был разработан новый подход к изучению особых точек, основанный на идее построения поверхности параметров, обеспечивающих нормализованному потоку Риччи вырожденные особые точки. При естественных (геометрических) значениях параметров было установлено, что для нормализованного потока Риччи нильпотентный случай никогда не наступает, а линейно нулевой случай может иметь место только при единственной комбинации параметров. Как следствие, всякая другая вырожденная особая точка может быть только полугиперболической.

В настоящей работе автор снимает прежние ограничения и изучает абстрактную динамическую систему, отвлеченную от геометрического смысла. Доказывается, что некоторые результаты упомянутых работ сохраняют свою силу и при произвольных значениях действительных параметров.

Ключевые слова: обобщенное пространство Уоллаха, риманова метрика, эйнштейнова метрика, нормализованный поток Риччи, кривизна Риччи, динамическая система, особая точка.

In this paper, we study degenerated singular points (equilibrium points) of a dynamical system obtained by reduction of the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces. It is known that every generalized Wallach space is characterized by a triple of positive numbers satisfying well-defined inequalities. Therefore, the corresponding system of differential equations also depends on three real parameters. In the works of N.A. Abiev, A. Arvanitoyeorgos, Yu.G. Nikonorov, and P. Siasos a new approach was developed for studying of singular points. This approach is based on the idea of building a surface of parameters providing the normalized Ricci flow degenerate singular points. At natural (geometric) values of parameters, we established that for the normalized Ricci flow the nilpotent case never occurs, and the linearly zero case can occur only at a unique special combination of parameters. As a consequence, any other degenerate singular point of the system may be only semi-hyperbolic.

In this paper, we remove the previous restrictions and study an abstract dynamical system abstracted from geometric essence. It is proved that some results of the mentioned works also hold for arbitrary values of the real parameters.

Key words: generalized Wallach space, Riemannian metric, Einstein metric, normalized Ricci flow, Ricci curvature, dynamical system, singular point.

DOI 10.14258/izvasu(2019)1-09

Введение. Авторы работ [1–3] изучали свойства нормализованного потока Риччи

$$\partial_t \mathbf{g}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} + 2\mathbf{g}(t) S_{\mathbf{g}} n^{-1} \qquad (1)$$

на обобщенных пространствах Уоллаха размерности n, где $\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}$ и $S_{\mathbf{g}}$ означают соответственно форму кривизны Риччи и скалярную кривизну

1-параметрического семейства римановых метрик $\mathbf{g}(t)$ на рассматриваемом пространстве (см. [1, 2]).

Известно, что каждому обобщенному пространству Уоллаха соответствует тройка действительных чисел $(a_1, a_2, a_3) \in (0, 1/2]^3$ (см. [4–6]). Отметим, что классификация обобщенных пространств Уоллаха получена недавно в [7].

Как показано в [1], в случае обобщенных пространств Уоллаха уравнение (1) сводится к следующей динамической системе:

$$\dot{x}_i = F_i := -2x_i \left(\mathbf{r_i} - \frac{\mathbf{r_1} a_1^{-1} + \mathbf{r_2} a_2^{-1} + \mathbf{r_3} a_3^{-1}}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}} \right) \tag{2}$$

относительно параметров $x_i = x_i(t) > 0$, $i = 1, 2, 3$ инвариантной римановой метрики (см. детали в [4, 5]), где $\mathbf{r_i}$ означают главные значения кривизны Риччи этой метрики и вычисляются по формулам

$$\mathbf{r_i} = \frac{1}{2x_i} + \frac{a_i}{2} \left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k} \right),$$

$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, известным из [5]. В правых частях уравнений из (2) все дроби имеют знаменатель вида $\mathcal{A} x_1 x_2 x_3$, где $\mathcal{A} := a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$. Поэтому потребуем, чтобы $\mathcal{A} \neq 0$.

Используя первый интеграл $V = x_1^{1/a_1} x_2^{1/a_2} x_3^{1/a_3}$ системы (2), на поверхности

$$V \equiv 1 \tag{3}$$

систему (2) можно заменить эквивалентной плоской системой

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2), \tag{4}$$

где $f_i(x_1, x_2) \equiv F_i(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$, $i = 1, 2$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1^{-a_3/a_1} x_2^{-a_3/a_2}$.

Пусть (x_1^0, x_2^0) — особая точка системы (4): $f_i(x_1^0, x_2^0) = 0$. Через $J := J(x_1^0, x_2^0)$ обозначим матрицу Якоби системы (4), вычисленную в точке (x_1^0, x_2^0). Собственные значения матрицы J находятся по формуле

$$\lambda_{1,2} = 0.5 \, (\rho \pm \sqrt{\sigma}), \quad (|\lambda_1| \le |\lambda_2|), \tag{5}$$

где $\sigma := \rho^2 - 4\delta$, $\rho := \mathrm{trace}(J)$ и $\delta := \det(J)$.

Согласно терминологии качественной теории ОДУ особая точка называется *невырожденной*, если $\delta \neq 0$. *Вырожденные* ($\delta = 0$) особые точки могут быть *полугиперболическими* ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$), *нильпотентными* ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $J \neq 0$) или *линейно нулевыми* ($J = 0$).

Относительно типов особых точек системы (4) в [1–3] были получены следующие результаты при естественных (геометрических) условиях $a_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, 2, 3$:

Теорема 1 (Теорема 2 в [1]). *Для системы* (4) *линейно нулевой случай может иметь место только при* $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$ *с единственной особой точкой* $(x_1^0, x_2^0) = (1, 1)$, *являющейся седлом с шестью гиперболическими секторами.*

Теорема 2 (Теорема 5 в [3]). *Имеют место следующие утверждения:*

1. *Не существует тройки* (a_1, a_2, a_3), *которая бы обеспечила системе* (4) *вырожденные особые точки нильпотентного типа;*
2. *Если* $(a_1, a_2, a_3) \neq (1/4, 1/4, 1/4)$, *то любая вырожденная точка системы* (4) *имеет полугиперболический тип (седло, неустойчивый узел или седло-узел);*
3. *Не существует тройки* (a_1, a_2, a_3), *которая бы обеспечила системе* (4) *особые точки (вырожденные или невырожденные) типа фокус или центр.*

В настоящей работе мы снимаем ограничения $a_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, 2, 3$ и рассматриваем (4) как абстрактную динамическую систему. Нами установлено, что в случае вырожденных особых точек теоремы 1 и 2 сохраняют свою силу. Более конкретно, справедлива

Теорема 3. *Пусть* $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *и* $\mathcal{A} \neq 0$. *Тогда система* (4) *допускает особую точку линейно нулевого типа в том и только в том случае, когда* $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$. *Во всех остальных случаях вырожденные особые точки системы* (4) *имеют полугиперболический тип.*

Доказательство теоремы 3. Для изучения вырожденных особых точек системы (4) в работе [1] было введено множество

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{система (4) имеет хотя бы одну вырожденную особую точку}\}$$

и доказано, что если $(a_1, a_2, a_3) \in \Omega$, то $Q(a_1, a_2, a_3) = 0$ (см. Лемму 4 из [1]), где

$$\begin{aligned} Q(a_1, a_2, a_3) = {} & (2s_1 + 4s_3 - 1)(64s_1^5 - 64s_1^4 \\ & + 8s_1^3 + 12s_1^2 - 6s_1 + 1 + 240s_3 s_1^2 - 240 s_3 s_1 \\ & - 1536 s_3^2 s_1 - 4096 s_3^3 + 60 s_3 + 768 s_3^2) \\ & - 8s_1(2s_1 + 4s_3 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1) \\ & (10s_1 + 32s_3 - 5)s_2 - 16s_1^2(13 - 52s_1 \\ & + 640 s_3 s_1 + 1024 s_3^2 - 320 s_3 + 52 s_1^2) s_2^2 \\ & + 64(2s_1 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1)s_2^3 \\ & + 2048 s_1 (2s_1 - 1) s_2^4, \end{aligned} \tag{6}$$

$s_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $s_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$ и $s_3 = a_1 a_2 a_3$. Свойства алгебраической поверхности Ω, определяемой уравнением $Q(a_1, a_2, a_3) = 0$, изучены в работах [8–10].

Поставим теперь вопрос о том, при каких $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ система (4) может допускать хотя бы одну особую точку, удовлетворяющую условию $\sigma = \delta = 0$. Для начала обратимся к теореме 4 из [1], утверждающей, что при $a_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, 2, 3$, только следующие два семейства параметров могут обеспечить системе (2) особые точки со свойством $\sigma = 0$:

$$a_1 = a_2 = a_3 = s, \quad s \in (0, 1/2] \qquad (7)$$

и

$$a_i = a_j = \frac{(2s^2-1)^2}{8s^2},\ a_k = \frac{4s^4+4s^2-1}{8s^2},\ s \in (s_1, s_2), \qquad (8)$$

где $s_1 := \sqrt{2\sqrt{2}-2}/2$ и $s_2 := \sqrt{2}/2$ $(i, j, k \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j \neq k \neq i)$.

Продолжим изучение семейств (7) и (8) при новых предположениях $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Подстановка значений $a_1 = a_2 = a_3 = s$ из (7) в (6) дает равенство $Q = -(2s+1)^4(4s-1)^8$. Случай $s = 1/4$, удовлетворяющий условиям $Q = 0$ и $a_i \in (0, 1/2]$, был разобран в теореме 1. Нас интересует случай $s = -1/2$. Легко проверить, что при $a_1 = a_2 = a_3 = -1/2$ система (2) имеет двухпараметрическое семейство особых точек $x_1 = -u - t$, $x_2 = t$, $x_3 = u$, где $t, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $t + u \neq 0$ ввиду $x_i \neq 0$. Соответствующие особые точки плоской системы (4) получаются при значениях t и u, удовлетворяющих условию (3). Как показывают вычисления, для таких особых точек $\delta = 0$ и $\rho = -2\frac{u^2+tu+t^2}{(u+t)tu} \neq 0$, следовательно, $\sigma = \rho^2 > 0$.

При $a_1 = a_2 = a_3 = -1/2$ система (4) обладает еще одной особой точкой $x_1 = x_2 = 1$. Здесь $\sigma = 0$, но $\delta = 9 > 0$. Следовательно, такая точка представляет собой невырожденный узел.

Переходим к анализу семейства параметров из (8). Подставляя значения a_1, a_2 и a_3 из (8) в (6), получаем полином $Q = s^8(1-8s^2-4s^4)(1-2s^2)^3(3-2s^2)^3$, имеющий кратные корни $0, \pm\sqrt{6}/2$, $\pm\sqrt{2}/2$ и $\pm\sqrt{2\sqrt{5}-4}/2$ (заметим, что ни один из этих корней не принадлежит интервалу (s_1, s_2)).

При $s = \pm\sqrt{6}/2$ из (8) получаем значения $a_1 = a_3 = 1/3$ и $a_2 = 7/6$, обеспечивающие (2) два семейства особых точек $x_1 = x_3 = t$, $x_2 = 4t/3$ и $x_1 = x_3 = t$, $x_2 = -2t/3$, где $t \neq 0$. Подходящие для (4) значения t в этих семействах будут определяться из условия (3). Причем $\sigma = 9/t^2 > 0$, $\delta = 0$ (соответственно $\sigma = 0$, $\delta = 9$) для особых точек (4), получаемых из первого (соответственно из второго) семейства особых точек.

При $s = \pm\sqrt{2}/2$ формула (8) дает значения $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = 1/2$, нарушающие условие $\mathcal{A} \neq 0$.

При $s = \pm\sqrt{2\sqrt{5}-4}/2$ из (8) получаем, что $a_1 = a_3 = \frac{1}{4}\frac{(\sqrt{5}-3)^2}{\sqrt{5}-2}$, $a_2 = -1/2$. Легко убедиться, что система (4) может иметь только невырожденные особые точки $(\delta \neq 0)$, доставляемые семействами $x_1 = x_3 = t$, $x_2 = t + t\sqrt{5}$ и $x_1 = x_3 = t$, $x_2 = 3t + t\sqrt{5}$ в соответствии с (3).

В заключение рассмотрим еще одно семейство параметров

$$a_i = \frac{s^2 - s\sqrt{2-3s^2}}{2}, \quad a_j = \frac{s^2 + s\sqrt{2-3s^2}}{2},$$
$$a_k = -s^2 + 1/2, \qquad (9)$$

$(i, j, k \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j \neq k \neq i)$, которое было найдено в [1], но не было включено в результаты этой работы в силу несовместности системы неравенств $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Дальнейший анализ показывает, что семейство (9) остается непригодным и при $a_i \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{A} \neq 0$. Действительно, при подстановке значений a_1, a_2 и a_3 из (9) в (6) получается полином $Q = -64(1-2s^2)^8 s^8$, ненулевым корням $\pm\sqrt{2}/2$ которого соответствуют значения $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = 1/2$.

Итак, мы разобрали все случаи и установили, что кроме $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$ не существует других значений $a_i \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\mathcal{A} \neq 0$ и обеспечивающих системе (4) особые точки со свойством $\sigma = \delta = 0$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать отсутствие нильпотентных особых точек. Если допустить существование такой точки, то будучи в ней ненулевой, матрица Якоби J должна иметь нулевые собственные значения. Отсюда $\sigma = \rho = 0$ (см. (5)), что равносильно $\sigma = \delta = 0$. Мы оказались в условиях теоремы 1, согласно которой $J = 0$. Получено противоречие. *Теорема 3 доказана.*

Замечание. В случае *невырожденных* особых точек системы (4) утверждение третьего пункта теоремы 2 может оказаться неверным при $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$. Это объясняется тем, что знак $\sigma = \rho^2 - 4\delta$ совпадает со знаком квадратичной формы, матрица которой имеет собственные значения 0, $2\mathcal{A}$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \mathcal{A}$ (см. лемму 5 и теорему 3 из [1]). Поэтому раньше при $(a_1, a_2, a_3) \in (0, 1/2]^3$ мы имели неравенство $\sigma \geq 0$, означающее отсутствие фокусов и центров независимо от значений δ. Подобное неравенство не гарантировано, если $\delta \neq 0$ и $\mathcal{A} < 0$.

Заключение. Мы установили, что при $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$ и $(a_1, a_2, a_3) \neq (1/4, 1/4, 1/4)$ все вырожденные особые точки системы (4) являются *полугиперболическими.* Согласно теории здесь возможны три вида особых точек: седла, неустойчивые узлы или седло-узлы. Однако вопрос о полной классификации полугиперболических особых точек системы (4) (идентификация вида особой точки по значениям параметров a_1, a_2 и a_3) в общем случае остается открытым. Отметим только частные результаты, полученные в [2, 11] в предположении $a_i = a_j = b$, $a_k = c$, где $b, c \in (0, 1/2]$.

Библиографический список

1. Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // Differ. Geom. Appl. 2014. V. 35.

2. Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. The Ricci flow on some generalized Wallach spaces // Geometry and its Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (Switzerland, Cham). 2014. V. 72.

3. Абиев Н.А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю.Г., Сиасос П. Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха // Математический форум. 2014. Т. 8, ч. 1.

4. Ломшаков А.М., Никоноров Ю.Г., Фирсов Е.В. Инвариантные метрики Эйнштейна на три-локально-симметрических пространствах // Математические труды. 2003. Т. 6, № 2.

5. Никоноров Ю.Г. Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна // Сибирский математический журнал. 2000. Т. 41, № 1.

6. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // Journ. Math. Sciences (New York). 2007. V. 146, № 7.

7. Nikonorov Yu. G. Classification of generalized Wallach spaces // Geom. Dedicata. 2016. V. 181, № 1.

8. Abiev N.A. On topological structure of some sets related to the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces // Владикавказский математический журнал. 2015. Т.17, № 3.

9. Batkhin A.B., Bruno A.D. Investigation of a real algebraic surface // Prog. Comp. Soft. 2015. V. 41, № 2.

10. Batkhin A.B. A real variety with boundary and its global parameterization // Prog. Comp. Soft. 2017. V. 43, № 2.

11. Abiev N.A. Two-parametric bifurcations of singular points of the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces // AIP Conference Proceedings (Turkey, Antalya). 2015. V. 1676.