УДК 519.218.8

# О разрешимости задачи фильтрации жидкости в деформируемой пористой среде в поле силы тяжести*

*М.А. Токарева*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

# On the Solvability of the Problem of Fluid Filtration in a Deformable Porous Medium in the Gravitational Field

*M.A. Tokareva*

Altai State University (Barnaul, Russia)

В работе рассматривается модель фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в деформируемой среде, обладающей преимущественно вязкими свойствами относительно упругих. В отличие от ранних работ, посвященных обоснованию данной модели, в настоящей статье дано обоснование модели, учитывающей влияние силы тяжести. Доказана теорема о локальной разрешимости задачи в поле силы тяжести. В пункте 1 дана краткая постановка задачи и сформулирован основной результат статьи. Исходная система уравнений, описывающая процесс, состоит из уравнений сохранения масс для твердой и жидкой фазы, закона сохранения импульса для жидкости, который берется в форме закона Дарси и учитывает движение твердого скелета, закона сохранения импульса системы в целом, а также уравнения, связывающего эффективное давление и пористость, которое определяет реологию. После перехода к переменным Лагранжа эта система сводится к двум уравнениям для отыскания функций пористости и плотности жидкой фазы. В пункте 2 приведено доказательство теоремы для полученной системы, а также установлен физический принцип максимума для функций пористости и плотности жидкой фазы. Доказательство теоремы проводится на основе теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке. В пункте 3 приведено обобщение на случай полного уравнения баланса сил.

***Ключевые слова:*** разрешимость, закон Дарси, фильтрация, пористость, сила тяжести.

**DOI 10.14258/izvasu(2018)4-20**

The paper deals with the model of filtration of a viscous compressible fluid in a deformable medium, which has predominantly viscous properties with respect to elastic media. In contrast to the earlier works devoted to the substantiation of this model, the present paper gives a justification for a model that takes into account the influence of gravity. A theorem on local solvability of the problem in the field of gravity is proved. In § 1 we give a brief statement of the problem and formulate the main result of the paper. The initial system of equations describing the process consists of the equations of mass conservation for the solid and liquid phases, the law of conservation of momentum for the liquid, which is taken in the form of Darcy's law and takes into account the motion of the skeleton, the conservation of the momentum of the system as a whole, and the equation linking the effective pressure and porosity, which determines the rheology. After the transition to the Lagrange variables, this system reduces to two equations for finding the porosity functions and the density of the liquid phase. In § 2 we give a proof of the theorem for the system obtained, and we also establish the physical maximum principle for the porosity and density functions of the liquid phase. The proof of the theorem is based on the Tikhonov-Schauder theorem on a fixed point. In paragraph 3 we give a generalization to the case of a complete equation of the balance of forces.

***Key words:*** solvability, Darcy's law, filtration, porosity, gravity.

**Введение.** Математическая модель, исследуемая в работе, широко применима для описания процессов движения жидкостей в земной коре, например, магмы [1], [2], в том числе процессов, происходящих в осадочных породах [3], [4]. Принципиальным моментом при исследовании этих процессов является учет сжимаемости пористой среды. В случае неподвижной пористой среды модель сводится к модели Маскета — Леверетта, вопросы разрешимости для которой исследованы в [5], [6]. В данной работе рассмотрен случай движения пористого скелета, т.е. функция пористости является искомой функцией координаты и времени.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №16-08-00291.

**1. Локальная разрешимость по времени.** Система уравнений, описывающая процесс фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в деформируемой несжимаемой пористой среде в Эйлеровых координатах $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$ [7], следуя [8], [9], сводится к системе уравнений в безразмерных переменных Лагранжа $(x',t')$:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t'} + (1-\phi)^2\frac{\partial v'_s}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\rho'_f\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho'_f\phi(v'_f - v'_s)) = 0,$$

$$\phi(v'_s - v'_f) = k'(\phi)(1-\phi)(\frac{\partial p'_f}{\partial x} - \rho'_f g'),$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v'_s}{\partial x'} = -a'_1(\phi)p'_e, \quad (1-\phi)\frac{\partial p'_{tot}}{\partial x'} = -\rho_{tot}g',$$

где безразмерные переменные имеют вид:

$$t' = \frac{t}{t_1}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad v'_s = \frac{v_s}{v_1}, \quad v'_f = \frac{v_f}{v_1},$$

$$\rho'_f = \frac{\rho_f}{\rho_s}, \quad \rho'_{tot} = \frac{\rho_{tot}}{\rho_s}, \quad g' = \frac{g}{g_1},$$

$$p'_f = \frac{p_f}{p_1}, \quad p'_s = \frac{p_s}{p_1}, \quad p'_e = \frac{p_e}{p_1}, \quad p'_{tot} = \frac{p_{tot}}{p_1},$$

$$a'_1(\phi) = \frac{a_1(\phi)}{a^0}, \quad k'(\phi) = \frac{k(\phi)}{k_1},$$

$$L = \int\limits_0^1 (1-\phi^0(\eta))d\eta, \quad t_1 = \frac{L}{v_1}, \quad a^0 = \frac{v_1}{Lp_1},$$

$$k_1 = \frac{v_1 L}{p_1}, \quad g_1 = \frac{p_1}{L_1\rho_s},$$

здесь $v_1, p_1$ — заданные положительные величины, имеющие размерность скорости и давления соответственно, $\phi$ — пористость, $\rho'_{tot} = (1-\phi)\rho'_s + \phi\rho'_f$ — общая плотность, $\rho'_f, \rho'_s, v'_f, v'_s$ — соответственно плотности и скорости жидкой и твердой фаз (плотность твердой фазы принимается постоянной), $p'_{tot} = \phi p'_f + (1-\phi)p'_s$ — общее давление, $p'_f = p'_f(\rho'_f), p'_s$ — давления жидкой фазы (функция пористости) и твердой фазы, $p'_e = p'_{tot} - p'_f$ — эффективное давление, $g'$ — плотность массовых сил, $k'(\phi)$ — коэффициент фильтрации, $a'_1(\phi)$ — коэффициент объемной вязкости (заданные функции).

Аналогично [8] эта система сводится к системе двух уравнений для отыскания функций плотности жидкой фазы $\rho_f$ и пористости $\phi$ (штрихи опускаются):

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\phi)\rho_f) - \frac{\partial}{\partial x}(K(\phi)b(\rho_f)\frac{\partial \rho_f}{\partial x} - \frac{K(\phi)}{1-\phi}\rho_f^2 g) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = p_f - p_{tot}, \tag{2}$$

где

$$a(\phi) = \frac{\phi}{1-\phi}, \qquad b(\rho_f) = \rho_f\frac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial \rho_f},$$

$$K(\phi) = k(\phi)(1-\phi),$$

а функции $G(\phi)$ и $p_{tot}$ определяются равенствами

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}, \quad p_{tot} = p^0(t) - \int_0^x \frac{\rho_{tot}g}{1-\phi}d\xi.$$

Функция $p^0(t)$ определяется из представления для $p_{tot}$, реологического уравнения, связывающего эффективное давление и пористость, и условия $v_s|_{x=0,1} = 0$:

$$p^0 = \int\limits_0^1 \left(\frac{a_1(\phi)}{1-\phi}(p_f + \int\limits_0^x \frac{\rho_{tot}g}{1-\phi}d\xi)\right)dx\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi)}{1-\phi}dx\right)^{-1} \equiv P^0(\phi,\rho_f).$$

Система (1) – (2) дополняется следующими начально-краевыми условиями

$$\begin{gathered}((1-\phi)\tfrac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial x} - \rho_f g)\mid_{x=0,x=1} = 0,\\ \rho_f\mid_{t=0} = \rho^0(x), \quad \phi\mid_{t=0} = \phi^0(x).\end{gathered} \tag{3}$$

Сформулируем основной результат работы.

**Теорема.** Пусть данные задачи (1)–(3) подчиняются следующим условиям: 1) функции $k(\phi), a_1(\phi), p_f(\rho_f)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi \in (0,1), \rho_f > 0$ и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \le k(\phi) \le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$

$$a_1(\phi) = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1},$$

$$0 < R_1 \le a_0(\phi) \le R_2, \quad p_f = R\rho_f$$

где $k_0, \alpha_0, R_i, i = 1,2, R$ — положительные постоянные, $q_1, ..., q_8$ — фиксированные вещественные числа,
2) начальные условия $\phi^0, \rho^0$ и функция $g$ удовлетворяют следующим условиям гладкости: $\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \rho^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad g \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ и условиям согласования

$$\frac{dp_f(\rho^0)}{dx}\mid_{x=0,x=1} = 0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \le \phi^0(x) \le M_0 < 1,$$

$$0 < m_1 \le \rho^0(x) \le M_1 < \infty,$$

$$0 \le g(x,t) \le g_0 < \infty, \quad x \in \overline{\Omega},$$

где $m_0, M_0, m_1, M_1, g_0$ — известные положительные постоянные. Тогда задача (1)—(3) имеет единственное локальное решение, т.е. существует значение $t_0$ такое, что

$$(\phi(x,t), \rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}).$$

Более того, $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_{t_0}$.

**2. Доказательство теоремы.** Разрешимость задачи (1)—(3) устанавливается с помощью теоремы Тихонова — Шаудера о неподвижной точке [10, с. 227].

Поскольку функция $\psi = G(\phi)$ при $\phi \in (0,1)$ строго монотонна, то существует обратная функция $\phi = G^{-1}(\psi)$. Положим $\rho(x,t) = \rho_f(x,t) - \rho^0(x)$, $\omega(x,t) = G(\phi) - G(\phi^0)$. Представим уравнения (1),(2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\omega)(\rho+\rho^0)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\omega)b(\rho+\rho^0)\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x} - \right.$$

$$\left. -\frac{K(\omega)}{1-\phi(\omega)}(\rho+\rho^0)^2 g\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = p_f(\rho+\rho^0) - p_{tot}. \tag{5}$$

Здесь

$$a(\omega) = \frac{\phi(\omega)}{1-\phi(\omega)}, \quad K(\omega) = k(\phi(\omega))(1-\phi(\omega)),$$

$$\phi(\omega) = G^{-1}(\omega + G(\phi^0)).$$

Причем

$$\rho\mid_{t=0} = \omega\mid_{t=0} =$$

$$= ((1-\phi(\omega))\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x} - (\rho+\rho^0)g)\mid_{x=0,x=1} = 0.$$

В качестве банахова пространства выберем пространство $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$, где $\beta$ — любое число из отрезка $(0,\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$. Положим

$$V = \{\bar\rho(x,t), \bar\omega(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})|$$

$$\bar\rho\mid_{t=0} = \bar\omega\mid_{t=0} =$$

$$= ((1-\phi(\bar\omega))\frac{\partial(\bar\rho+\rho^0)}{\partial x} - (\bar\rho+\rho^0)g)\mid_{x=0,x=1} = 0,$$

$$\hat m_1 - \rho^0(x) \le \bar\rho(x,t) \le \hat M_1 - \rho^0(x) < \infty,$$

$$\hat m_1 = \frac{m_1}{2}(1 + \frac{g_0}{R(1-M_0)})^{-1},$$

$$\hat M_1 = 2M_1(1 + \frac{g_0}{R(1-M_0)}),$$

$$G(\frac{m_0}{2}) - G(\phi^0) \le \bar\omega(x,t) \le G(\frac{M_0+1}{2}) - G(\phi^0) < \infty,$$

$$(x,t) \in Q_{t_0},$$

$$(|\bar\omega|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}}, |\bar\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}}) \le K_1,$$

$$(|\bar\omega|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}}, |\bar\rho|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}}) \le K_1 + K_2\},$$

где $K_1$ — произвольная положительная постоянная, а положительная постоянная $K_2$ будет указана позже. Заметим, что на множестве $V$ справедливы неравенства: $0 < \frac{m_0}{2} \le \phi(\bar\omega) \le \frac{M_0+1}{2} < 1$, $a(\bar\omega) > 0$, $K(\bar\omega) > 0$.

Построим оператор $\Lambda$, отображающий $V$ в $V$. Пусть $\bar\omega, \bar\rho \in V$. Из уравнения (5) определим функцию $\omega$ равенством

$$\omega = \int\limits_0^t \left(R(\bar\rho(x,\tau) + \rho^0(x)) - P^0(\bar\phi, \bar\rho) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^x g(\rho_s + (\bar\rho + \rho^0(\xi))\frac{\phi(\bar\omega)}{1-\phi(\bar\omega)})d\xi\right) d\tau. \tag{6}$$

Из представления (6) следует, что гладкость $\omega$ определяется гладкостью функций $\bar\rho, \bar\omega, \rho^0, p^0$ и $g$, а также существует такое значение $t_1 = t_1(m_0, M_0, m_1, M_1)$, что для всех $t_0 \le t_1$ справедливо неравенство

$$0 < \frac{m_0}{2} \le \phi(x,t) \le \frac{M_0+1}{2}, \quad (x,t) \in Q_{t_0}. \tag{7}$$

В частности, имеем оценку

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} =$$

$$= C_1(m_0, M_0, m_1, M_1, K_1, T, |g|_{1+\alpha,\Omega},$$

$$|\rho^0|_{2+\alpha,\Omega}, |p^0|_{\alpha/2,[0,T]})(1 + t_0|\bar\rho_{xx}|_{\alpha,\alpha/2,\Omega}).$$

С учетом (7) для функции $\omega(x,t)$ имеем оценку $G(\frac{m_0}{2}) \le \omega(x,t) + G(\phi^0) \le G(\frac{M_0+1}{2})$.

Используя (4), $\bar\rho$ и $\bar\omega(x,t)$, найдем $\rho(x,t)$ как решение задачи (здесь и далее предполагается, что начальные и граничные условия согласованы):

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\bar\omega)(\rho+\rho^0)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\bar\omega)b(\bar\rho)\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x} - \right.$$

$$\left. -\frac{K(\bar\omega)}{1-\phi(\bar\omega)}(\bar\rho+\rho^0)(\rho+\rho^0)g\right), \tag{8}$$

$$\rho\mid_{t=0} = 0,$$

$$((1-\phi(\bar\omega))\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x} - (\rho+\rho^0)g)\mid_{x=0,x=1} = 0.$$

Уравнение для $\rho(x,t)$ является равномерно параболическим. С учетом свойств $\bar\omega(x,t)$ и $\rho^0(x)$ задача (8) имеет классическое решение [11]. Кроме того, имеем следующую оценку:

$$|\frac{1}{a(\bar\omega)}\frac{\partial a(\bar\omega)}{\partial t}| \le C_0(m_0, M_0, m_1, M_1, \max_{0\le t\le T}|p^0(t)|).$$

При дополнительном условии малости на величину интервала времени справедливо следующее утверждение.

**Лемма.** *Существуют такие* $t_2 > 0, t_3 > 0$, *что при* $t_0 \le \min(t_1, t_2, t_3)$ *классическое решение задачи* (8) *удовлетворяет в* $Q_{t_0}$ *неравенству*

$$0 < \hat m_1 \le \rho(x,t) + \rho^0(x) \le \hat M_1 < \infty.$$

*Доказательство.* Полагая $U(x,t) = \rho(x,t) + \rho^0(x)$, задачу (8) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\bar\omega)U) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\bar\omega)b(\bar\rho)\frac{\partial U}{\partial x} - \right.$$

$$\left. -\frac{K(\bar\omega)}{1-\phi(\bar\omega)}(\bar\rho+\rho^0)Ug\right), \qquad (9)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \tilde d U\right)|_{x=0,x=1} = 0, \quad U\,|_{t=0} = \rho^0,$$

где $\tilde d = \frac{g}{(1-\phi(\bar\omega))R}$. Сначала покажем, что $U(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in Q_{t_0}$. В уравнении (9) сделаем замену $U(x,t) = -z(x,t)$. Тогда

$$z\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Kb\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{K}{1-\phi(\bar\omega)}(\bar\rho+\rho^0)gz\right).$$

Положим

$$z^{(0)}(x,t) = \max\{z, 0\},$$

$$z^{(0)}(x,t)\,|_{t=0} = \max\{-\rho^0, 0\} = 0,$$

$$\sigma_\varepsilon(x,t) = z^{(0)}(x,t)(|z^{(0)}(x,t)|^2+\varepsilon)^{-1/2}, \varepsilon > 0.$$

Уравнение для функции $z$ умножим на $\sigma_\varepsilon$ и результат проинтегрируем по $\Omega$. Следуя [8], получим оценку

$$\int_0^1 az^{(0)}dx \leq \varepsilon^{1/2}\int_0^t\int_0^1 \left|\frac{\partial a}{\partial \tau}\right|dxd\tau + \varepsilon^{1/2}\int_0^1 a\,|_{t=0}\,dx.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что $z^{(0)} = 0$, т.е. $U \geq 0$.

Задачу (9) представим в виде:

$$U_t - \tilde a_{11}U_{xx} + \tilde a_1 U_x + \tilde a U = 0, \quad (U_x - \tilde d U)|_{x=0,1} = 0, \qquad (10)$$

где

$$\tilde a_{11} = \frac{Kb}{a}, \quad \tilde a_1 = \frac{d-(Kb)_x}{a},$$

$$\tilde a = \frac{a_t + d_x}{a}, \quad \tilde d = \frac{g}{(1-\bar\phi)R}.$$

Следуя [11], перейдем от функции $U(x,t)$ к новой функции $w(x,t)$, связанной с ней равенством $w(x,t) = e^{-\lambda t}\varphi(x)U(x,t)$, где

$$\varphi = -mx^2 + mx + 1 > 0, m \equiv 2\max|\tilde d| = \frac{4g_0}{(1-M_0)R},$$

а число $\lambda$ будет указано позже.

Функция $\omega$ вследствие (10) является решением задачи

$$\omega_t - \tilde a_{11}\omega_{xx} + (\tilde a_1 + \frac{2\tilde a_{11}\varphi_x}{\varphi})\omega_x +$$

$$+(-2\tilde a_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} + \tilde a_{11}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \tilde a_1\frac{\varphi_x}{\varphi} + \tilde a + \lambda)\omega = 0,$$

$$\omega_x|_{x=0,1} = ((\frac{\varphi_x}{\varphi} + \tilde d)\omega)|_{x=0,1},$$

где $\omega_x|_{x=0} \geq 0$, $\omega_x|_{x=1} \leq 0$, т.к. $\varphi|_{x=0,1} = 1$, $\varphi_x|_{x=0} = m > 0$, $\varphi_x|_{x=1} = -m \equiv -2\max\tilde d < 0$. Выберем

$$\lambda > \max_{Q_t}[2\tilde a_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} - \tilde a_{11}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \tilde a_1\frac{\varphi_x}{\varphi} - \tilde a],$$

тогда функция $\omega$ достигает положительного максимума при $t = 0$. Т.е.

$$U(x,t)e^{-\lambda t}\varphi(x) \leq \max_{Q_t}(U(x,t)e^{-\lambda t}\varphi(x)) = \max_{Q_t}\omega(x,t) \leq$$

$$\leq \max_x \omega|_{t=0} = \max_x(U(x,t)e^{-\lambda t}\varphi(x))|_{t=0}.$$

Поэтому имеем оценку сверху для $U$ :

$$U \leq e^{\lambda t}M_1(1 + \frac{g_0}{(1-M_0)R}).$$

Тогда существует значение $t_2 = \ln 2^{1/\lambda}$, что для всех $t \leq t_2$ имеем оценку для $\rho$ сверху из леммы.

Для получения оценки снизу уравнение (9) представим в виде $(z(x,t) = 1/U(x,t))$

$$z_t - \tilde a_{11}z_{xx} + \frac{2\tilde a_{11}}{z}(z_x^2) + \tilde a_1 z_x - \tilde a z = 0.$$

Применяя аналогичный подход, получим искомую оценку для $\rho$ снизу для любого $t \leq t_3$.

Следуя [11], перейдем от функции $z(x,t)$ к новой функции $w_1(x,t)$, связанной с ней равенством $w(x,t) = e^{-\lambda_1 t}\varphi(x)z(x,t)$, где функция $\varphi$ определяется, как и раньше, для оценки сверху, а число $\lambda_1$ будет указано позже.

Функция $\omega$ является решением задачи

$$\omega_t - \tilde a_{11}\omega_{xx} + (\tilde a_1 + \frac{2\tilde a_{11}\varphi_x}{\varphi} - 4\tilde a_{11}\frac{\varphi_x}{\varphi^2})\omega_x +$$

$$+(-2\tilde a_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} + \tilde a_{11}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \tilde a_1\frac{\varphi_x}{\varphi} + 2\tilde a_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^3} - \tilde a + \lambda_1)\omega +$$

$$+2\tilde a_{11}\frac{\omega_x^2}{\varphi^2\omega} = 0,$$

$$\omega_x|_{x=0,1} = ((\frac{\varphi_x}{\varphi} - \tilde d)\omega)|_{x=0,1},$$

где $\omega_x|_{x=0} \geq 0$, $\omega_x|_{x=1} \leq 0$, т.к. $\varphi|_{x=0,1} = 1$, $\varphi_x|_{x=0} = m > 0$, $\varphi_x|_{x=1} = -m \equiv -2\max\tilde d < 0$. Выберем

$$\lambda_1 > \max_{Q_t}[2\tilde a_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} - \tilde a_{11}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \tilde a_1\frac{\varphi_x}{\varphi} - 2\tilde a_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^3} + \tilde a],$$

тогда функция $\omega$ достигает положительного максимума при $t = 0$, т.е.

$$\max_{Q_t}(\frac{1}{U(x,t)}e^{-\lambda_1 t}\varphi(x)) = \max_{Q_t}\omega(x,t) \leq$$

$$\leq \max_x \omega|_{t=0} = \max_x (\frac{1}{U(x,t)} e^{-\lambda_1 t} \varphi(x))|_{t=0}.$$

Откуда имеем, что

$$\frac{1}{U(x,t)} \leq \frac{1}{m_1} e^{\lambda_1 t} (1 + \frac{g_0}{R(1-M_0)}).$$

Поэтому

$$U(x,t) \geq m_1 e^{-\lambda_1 t} (1 + \frac{g_0}{R(1-M_0)})^{-1}.$$

Тогда существует значение $t_3 = \ln 2^{1/\lambda_1}$, что для всех $t \leq t_3$ имеем оценку для $\rho$ снизу из леммы.

Лемма доказана.

С учетом леммы и свойств $\bar{\omega}$ имеем следующие оценки [11, гл. 3]:

$$|\rho|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} \leq C_2,$$

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \leq C_3 \left(1 + |\rho^0|_{2+\alpha,\Omega} + |\bar{\rho}_x|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} + \right.$$

$$\left. + |\bar{\omega}_t|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} + |\bar{\omega}_x|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}}\right),$$

в которых постоянные $C_2, C_3$ зависят от $K_1$, $m_0$, $m_1$, $M_0$, $M_1$. Следовательно,

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \leq C_4(K_1, m_0, m_1, M_0, M_1).$$

Положим $C_5 = \max\{C_1, C_4\}$. Выберем $K_2$ таким образом, чтобы $C_5 \leq \frac{K_1+K_2}{2}$. Тогда при $t_0 < \min(t_1, t_2, (K_1+K_2)^{-1})$ получим

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \leq K_1 + K_2,$$

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \leq K_1 + K_2.$$

Остается проверить условия

$$|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \leq K_1, \quad |\omega|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \leq K_1.$$

Интегрируя уравнение (8) по времени, получим $|\rho|_{0,Q_{t_0}} \leq C_6 t_0$. Из уравнения (6) аналогично имеем $|\omega|_{0,Q_{t_0}} \leq C_7 t_0$. Используя для $\rho, \omega$ неравенство вида [12, с. 35]

$$|u|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \leq C|u|^c_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} |u|^{1-c}_{0,Q_{t_0}},$$

$$c = (1+\alpha)(2+\alpha)^{-1},$$

выводим, что существует достаточно малое значение $t_0$, зависящее от $K_1$ и $K_2$, такое, что справедливы оценки $|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \leq K_1$, $|\omega|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \leq K_1$.

Таким образом, оператор $\Lambda$ отображает множество $V$ в себя при достаточно малых $t_0$. Используя полученные выше оценки, легко доказать непрерывность оператора $\Lambda$ в норме пространства $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Согласно теореме Тихонова — Шаудера существует неподвижная точка $(\rho, \omega) \in V$ оператора $\Lambda$. Единственность устанавливается стандартным образом [12].

Теорема доказана.

**3. Замечание.** В случае полного уравнения баланса сил, поскольку вязкость жидкости намного меньше вязкости скелета и девиатор тензора напряжений жидкости достаточно мал, система уравнений выглядит следующим образом [1], [2], [3], [13]:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0, \\ \tfrac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi v_f) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g), \tag{12}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi) p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = \rho_{tot} g + \frac{\partial p_{tot}}{\partial x}. \tag{14}$$

В безразмерных переменных Лагранжа система (11) – (14) принимает вид

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f \frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{16}$$

$$\phi(v_s - v_f) = k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g), \tag{17}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi) p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \tag{18}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial}{\partial x}\left((1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = \rho_{tot} g + (1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}. \tag{19}$$

Из (19), с учетом (15), получаем представление для $p_{tot}$ :

$$p_{tot} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi + p^1(t).$$

где функцию $p^1$ определим чуть позже.

Далее уравнение (18) с учетом представления для $p_{tot}$ представим в виде

$$(\frac{1}{(1-\phi)a_1(\phi)} + 1)\frac{\partial \phi}{\partial t} - \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi = p_f - p^1.$$

Найдем функцию $p^1$. Проинтегрируем по $x$ уравнение (19), получим

$$(1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} = \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi + p_{tot} - p^1.$$

С учетом уравнения (18) получим, что

$$p_{tot} = (p^1 - \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi + (1-\phi) a_1(\phi) p_f) \cdot$$

$$\cdot (1 + (1-\phi) a_1(\phi))^{-1}.$$

Проинтегрируем уравнение (18) от 0 до 1 по $x$. С учетом краевых условий $v_s|_{x=0,1} = v_f|_{x=0,1} = 0$ и последнего представления для $p_{tot}$ получим представление для $p^1$.

Таким образом, получаем аналогичную систему уравнений для нахождения функций пористости и плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\phi)\rho_f) - \frac{\partial}{\partial x}(K(\phi)b(\rho_f)\frac{\partial \rho_f}{\partial x} - \frac{K(\phi)}{1-\phi}\rho_f^2 g) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial G^1}{\partial t} = R\rho_f - p^1 + \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi, \tag{21}$$

где функции $G^1, p^1$ определяются следующим образом:

$$\frac{dG^1}{d\phi} = 1 + \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)},$$

$$p^1 = \int_0^1 \left( \frac{a_1(\phi)}{(1-\phi)(1+a_1(\phi)(1-\phi))} (R\rho_f + \right.$$

$$\left. + \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi) \right) dx \cdot$$

$$\cdot \left( \int_0^1 \frac{a_1(\phi)}{(1-\phi)(1+a_1(\phi)(1-\phi))} dx \right)^{-1}.$$

Применяя аналогичный подход, докажем разрешимость начально-краевой задачи для уравнений (20) – (21), дополненных условиями

$$\begin{gathered} ((1-\phi)\tfrac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial x} - \rho_f g) \mid_{x=0,x=1} = 0, \\ \rho_f \mid_{t=0} = \rho^0(x), \quad \phi \mid_{t=0} = \phi^0(x). \end{gathered} \tag{22}$$

**Заключение.** В статье доказана локальная разрешимость нестационарной задачи фильтрации жидкости в деформируемой вязкой пористой среде в поле силы тяжести.

## Библиографический список


1. Fowler A. Mathematical Geoscience // Interdisciplinary Applied Mathematics. — 2011. — 36.

2. Mc. Kenzie D.P. The generation and compaction of partial melts // J. Petrol. — 1987. — 25.

3. Morency C., Huismans R. S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. — 2007. — V. 112.

4. Fowler A. C., Yang X. Pressure solution and viscous compaction in sedimentary basins // J. Geophys. Res. — 1999. — V. 104.

5. Папин А.А. Существование решения «в целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. 1. постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. IX.

6. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. — 2000. — № 116.

7. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local Solvability of the System of the Equations of One Dimensional Motion of Magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2017. — V. 10 (3).

8. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 722 (2016) 012037.

9. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. — 2017. — V. 894.

10. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. — М., 1969.

11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М., 1967.

12. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

13. Audet D.M., Fowler A.C. A mathematical for compaction in sedimentary basins // Geophys. J. Int. — 1992. — V. 110.