УДК 517.586

Об изменении кривизны конформно-плоской метрики при преобразовании Лежандра*

М.В. Куркина

Югорский государственный университет (Ханты-Мансийск, Россия)

On a Change in the Curvature of a Conformally Flat Metric under the Legendre Transformation

M.V. Kurkina

Ugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

Известно, что теория конформно-плоских римановых метрик тесно связана с псевдоевклидовой геометрией, что обусловлено существованием канонического изометрического вложения конформно-плоской метрики в изотропный конус псевдоевклидова пространства. Впервые этот факт был замечен Х. Бринкманном, а позднее использован в работах Н. Кюипера. Геометрия однородных римановых многообразий с конформно-плоской римановой метрикой изучалась в работах А.Д. Алексеевского и Б.Н. Кимельфельда, в которых дана их классификация. В неоднородном случае подобной классификации не существует, поэтому при исследовании конформно-плоских римановых многообразий используются ограничения различного типа: либо на размерность многообразия, либо на топологическое строение, либо на различные типы кривизны риманового многообразия с конформно-плоской метрикой. В последнем случае хорошо известны теоремы об однородных римановых многообразиях с конформно-плоской метрикой ограниченной одномерной кривизны, полученные В.В. Славским и Е.Д. Родионовым. В данной работе исследуется поведение одномерной кривизны и кривизны Риччи при преобразовании Лежандра конформно-плоской римановой метрики.

Ключевые слова: конформно-плоские метрики, преобразование Лежандра, одномерная кривизна.

It is known that the theory of conformally flat Riemannian metric is closely associated with pseudo-Euclidean geometry, due to the existence of the canonical isometric embedding conformally flat metric in pseudo-isotropic cone space. This fact was first noticed by H. Brinkmann, and later was used in the works of N. Kuyper. The geometry of homogeneous Riemannian manifolds with a conformally flat Riemannian metric was studied in the papers of A.D. Alekseevsky and B.N. Kimel'feld, in which their classification was given. In the inhomogeneous case such a classification does not exist, therefore, in the study of conformally flat Riemannian manifolds restrictions of various types are used: either on the dimension of the manifold, or on a topological structure, or on different types of Riemannian manifold curvatures of the conformally flat metric. In the last case, theorems on homogeneous Riemannian manifolds with a conformally flat metric of bounded one-dimensional curvature are well known, which were obtained by V.V. Slavsky and E.D. Rodionov. In this paper, we study the behavior of a one-dimensional curvature and the Ricci curvature under Legendre Transform of the conformally flat Riemannian metric.

Key words: conformal-flat metrics, Legendre transform, one-dimensional curvature.

DOI 10.14258/izvasu(2018)4-16

1. Введение. Теория конформно-плоских римановых метрик тесно связана с псевдоевклидовой геометрией, что обусловлено существованием канонического изометрического вложения конформно-плоской метрики в изотропный конус псевдоевклидова пространства (подробнее см. [1] — [18]). Впервые этот факт был замечен H.W. Brinkmann [1], а наиболее эффектно был использован в работах N.H. Kuiper [2, 3].

Конформно-плоская метрика имеет вид: $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$, где $f(x)$ — функция, определенная на подмножестве D евклидова пространства. В данной работе будут рассмотрены только два варианта задания конформно-плоской метрики:

1. Сферическая модель; множество D — n-мерная сфера евклидова пространства R^{n+1},

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

а функция $f(x)$ сужение на сферу однородной порядка один функции $f : R^{n+1} \mapsto R$.

2. Плоская модель; множество $D = R^n$ — n-мерное евклидово пространство, а функция $f(x)$ произвольная функция на D.

В статье рассматривается подробно случай, когда размерность конформно-плоской метрики $n \geq 3$, в случае $n = 2$ преобразование Лежандра тоже можно формально определить, но такие локальные характеристики, как кривизны полярной метрики, не определяются однозначно самой метрикой ds^2, а зависят еще от изометрического вложения в изотропный конус псевдоевклидова пространства.

2. Полярное преобразование конформноплоской метрики. В данной части мы используем обозначения и результаты работы [18]. Пусть R — числовая прямая, R^{n+1} — евклидово $(n+1)$-мерное арифметическое пространство, $M^{n+2} = R^{n+1} \times R$ — псевдоевклидово пространство, скалярный квадрат вектора $\vec{w} = [\vec{x}, \zeta] \in M^{n+2}$ в котором равен $\langle \vec{w} \rangle^2 = |\vec{x}|^2 - \zeta^2$, где $|\vec{x}|^2$ — скалярный квадрат вектора $\vec{x} \in R^{n+1}$. Обозначим через

$$C^+ = \left\{ [\vec{x}, \zeta] \in M^{n+2} : |\vec{x}|^2 - \zeta^2 = 0,\, \zeta > 0 \right\},$$

верхнюю часть изотропного конуса в M^{n+2}. В дальнейшем, если будет ясно из контекста, мы станем обозначать $\vec{x}$ через x.

Лемма 1. Пусть на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана конформно-плоская метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}, \quad x \in S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

где $f(x)$ — функция класса C^1. Тогда определено каноническое изометрическое вложение, задаваемое формулой

$$Z : x \in S^n \to \left[\frac{x}{f(x)}, \frac{1}{f(x)} \right] \in C^+. \tag{1}$$

Образ $Z(S^n) = F \subseteq C^+$ — пространственноподобная n-мерная поверхность. В дальнейшем будем отождествлять конформно-плоскую метрику с поверхностью F. Предположим, что функция $f(x)$ достаточно гладкая, тогда поверхность F регулярна и в каждой точке $Z(x) \in F$ определено касательное n-мерное пространство $T_x(F)$. Существует единственный вектор $Z^*(x) \in C^+$ такой, что

$$\langle Z, Z^* \rangle = -1, \quad Z^* \perp T_x(F), \tag{2}$$

где ортогональность понимается относительно скалярного произведения в M^{n+2}.

Лемма 2. Пусть функция $f(\vec{x})$, задающая конформно-плоскую метрику, по однородности распространена на все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда вектор Z^* явно выражается через f и $\vec{\nabla} f$ в R^{n+1}:

$$Z^*(\vec{x}) = \left[-\vec{\nabla} f + \frac{|\vec{\nabla} f|^2}{2f} \vec{x}, \frac{|\vec{\nabla} f|^2}{2f} \right], \tag{3}$$

где $\vec{x} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\vec{\nabla} f$ градиент функции f в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Определение 1. Если точка $Z \in F$ пробегает поверхность F, то точка Z^* пробегает двойственную поверхность F^*. Соответствующую конформно-плоскую метрику $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, $y \in S^n$, будем называть **полярной** к исходной метрике [9, 11]. Сравнивая формулы (1) и (3), имеем:

$$\left[-\vec{\nabla} f + \frac{|\nabla f|^2}{2f} \vec{x}, \frac{|\nabla f|^2}{2f} \right] \equiv \left[\frac{y}{f^*(y)}, \frac{1}{f^*(y)} \right].$$

Откуда получаем формулы для перехода к полярной конформно-плоской метрике:

$$f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f|^2}, \quad \vec{y} = \vec{x} - 2f(x) \frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|^2}. \tag{4}$$

Лемма 3. Пусть $f : R^{n+1} \to R$ произвольная однородная степени один функция на R^{n+1}. Отображение $H_f : S^n \to S^n$, определяемое формулой:

$$H_f : \vec{x} \in S^n \to \vec{x} - 2f(x) \frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|^2} \in S^n, \tag{5}$$

сохраняет норму вектора: $|H_f(\vec{x})| = |\vec{x}|$.

Определение 2. Отображение H_f назовем конформным градиентом функции f. Если отображение H_f имеет обратное H_f^{-1}, то полярная метрика определяется функцией:

$$f^*(y) = \left. \frac{2f(x)}{|\nabla f|^2} \right|_{x = H_f^{-1}(y)}.$$

Замечание. Из определения (1) следует двойственность метрики $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$, $x \in S^n$ и метрики $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, $y \in S^n$. Поэтому при наличии соответствующей регулярности функции $f^*(y)$ будут справедливы равенства:

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad \vec{y} = \vec{x} - 2f(x) \frac{\vec{\nabla} f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \\ f(x) &= \frac{2f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}, \quad \vec{x} = \vec{y} - 2f^*(y) \frac{\vec{\nabla} f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Следствие. Из (6) следует тождество:

$$H_f \circ H_{f*} = I_{S^n} = H_{f*} \circ H_f,$$

то есть преобразования сферы H_f, H_{f*} — взаимно обратные и выполняется тождество:

$$\begin{tikzcd} x \in S^n \arrow[r, "H_f"] \arrow[d, "\frac{f(x)}{|\nabla f(x)|}"] & y \in S^n \arrow[d, "\frac{f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|}"] \\ R \arrow[r, equal] & R \end{tikzcd}$$

Определение 3. Одномерная секционная кривизна конформно-плоской метрики $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ в R^n задается формулой [13, 15, 16]:

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = f\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla f|^2. \tag{7}$$

Здесь $\frac{d^2 f}{d\xi^2}$ — вторая производная функции в точке $x \in R^n$ вдоль единичного вектора ξ, ∇f — градиент функции f в R^n. Формула верна как в плоском случае, так и для единичной сферы, в этом случае функция $f : S^n \to R$ продолжается по однородности на R^{n+1}, $x \in S^n \subset R^{n+1}$, ξ — единичный касательный к сфере в точке x вектор, ∇f — градиент функции в R^{n+1}.

3. Поведение одномерной кривизны конформно-плоской метрики при преобразовании Лежандра. При аналитических выкладках, связанных с конформно-плоской метрикой, полезен метод подвижного репера Картана [14]. Обозначим через $G(n+1, 1)$ многообразие базисов в M^{n+2} вида:

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, Z, Z^*\} \in G(n+1, 1),$$

где $e_1, \dots, e_n$ — пространственноподобные векторы, причем

$$\begin{aligned} &Z, Z^* \in C^+, \quad \langle Z, Z^* \rangle = -1, \\ &\langle Z, e_i \rangle = \langle Z^*, e_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

На многообразии $G(n+1, 1)$ определены дифференциальные формы Маурера — Картана ω_i^j равенствами:

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ \vdots \\ de_n \\ dZ \\ dZ^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \dots & \omega_1^{n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^1 & \dots & \omega_n^{n+2} \\ \omega_{n+1}^1 & \dots & \omega_{n+1}^{n+2} \\ \omega_{n+2}^1 & \dots & \omega_{n+2}^{n+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ Z \\ Z^* \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Из (8) следует

$$\begin{aligned} &\omega_{n+1}^{n+2} = \omega_{n+2}^{n+1} = 0, \quad \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+2}^{n+2} = 0, \\ &\omega_{n+1}^{k} g_{ki} - \omega_i^{n+2} = 0, \quad \omega_{n+2}^{k} g_{ki} - \omega_i^{n+1} = 0, \\ &\text{где} \quad g_{ki} = \langle e_k, e_i \rangle. \end{aligned} \tag{10}$$

Поверхности $F \subset C^+$ сопоставим подмногообразие $G_f(n+1, 1)$, выделяемое условиями:

$$Z \in F, \quad e_i \in T_z(F), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{11}$$

На подмногообразии G_f дополнительно выполняется $\omega_{n+2}^{n+2} = 0$. Введем обозначения $\omega_{n+1}^i = \omega^i$, $\omega_{n+2}^i = \omega^{*i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Деривационные формулы (9) на G_f примут вид

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ \vdots \\ de_n \\ dZ \\ dZ^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \dots & \omega_1^n & \omega_{*1} & \omega_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n^1 & \dots & \omega_n^n & \omega_{*n} & \omega_n \\ \omega^1 & \dots & \omega^n & 0 & 0 \\ \omega^{*1} & \dots & \omega^{*n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ Z \\ Z^* \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Мы будем также пользоваться двойственным базисом $\{e^1, \dots, e^n\}$ в пространстве $T_z F$. Для него имеем:

$$\begin{aligned} &de^i = \varphi_k^i e^k + \omega^i Z^* + \omega^{*i} Z, \\ &dZ = \omega_i e^i, \; dZ^* = \omega_i^* e^i, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\varphi_i^k + \omega_i^k = 0$, $k, i = 1, 2, \dots, n$. Структурные уравнения для многообразия $G(n+1, 1)$ имеют вид:

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j = 1, \dots, n+2, \tag{14}$$

здесь по повторяющемуся индексу k берется сумма от 1 до $n+2$. Для подмногообразия G_f отсюда получим:

$$\begin{aligned} &d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad d\omega^{*i} = \omega^{*k} \wedge \omega_k^i, \\ &d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_{i\cdot}^{\cdot j}, \\ &\text{где } \Omega_{i\cdot}^{\cdot j} = \omega_i^* \wedge \omega^j + \omega_i \wedge \omega^{*j}, \\ &\omega^{*i} \wedge \omega_i = 0, \quad \text{где } k, i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) следует

$$\omega^{*i} = S^{ik}\omega_k, \quad S^{ik} = S^{ki}, \quad k, i = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Для форм $\Omega_{i\cdot}^{\cdot j}$ кривизны имеем представление:

$$\Omega_{i\cdot}^{\cdot j} = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} R_{i\cdot kl}^{\cdot j\cdot\cdot}\omega^k \wedge \omega^l,$$

здесь $R_{i\cdot kl}^{\cdot j\cdot\cdot}$ — тензор кривизны Римана. Тензор Риччи, скалярная кривизна, тензор Схоутена равны соответственно

$$R_{ik} = \sum_{l=1}^{n} R_{i\cdot kl}^{\cdot l\cdot\cdot}, \qquad R = R_{ij} g^{ij},$$

$$S_{ik} = \frac{1}{n-2}\left\{R_{ik} - \frac{R g_{ik}}{2(n-1)}\right\}.$$

Выясним геометрический смысл тензора S^{ik}. Из (15) вытекает, что формы кривизны метрики поверхности F имеют вид:

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = (S_{ik}\delta_p^j + S_p^j g_{ki})\omega^k \wedge \omega^p. \tag{17}$$

Риманова секционная кривизна вычисляется по формуле:

$$K(\xi \wedge \eta) = R_{ijkp}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^p = -S_{ik}\xi^i\xi^k - S_{jp}\eta^j\eta^p,$$

где $\xi, \eta \in T_z F$ — ортогональные единичные векторы.

Одномерная секционная кривизна конформно-плоской метрики выражается через Риманову кривизну:

$$K_{1/2}(\xi) = K(\xi \wedge \eta_1) + K(\xi \wedge \eta_2) - K(\eta_1 \wedge \eta_2),$$

где $\xi, \eta_1, \eta_2 \in T_z F$ — ортогональные единичные векторы. Следовательно, при $n \geq 3$ одномерная секционная кривизна в направлении единичного вектора ξ есть

$$K_{1/2}(\xi) = -S_{ik}\xi^i\xi^k. \qquad (18)$$

Собственные значения k_i квадратичной формы (18), которые находятся из уравнения $\det \| -S_{ik} - \lambda g_{ik} \| = 0$ назовем *главными значениями*, а собственные векторы — *главными направлениями одномерной кривизны*.

С другой стороны, из равенства $dZ^* = \omega^{*i} e_i = S^{ik}\omega_k e_i$ следует также, что матрица $\|S^{ik}\|$ задает дифференциал отображения h_f относительно базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и двойственного базиса $\{e^1, \ldots, e^n\}$ касательного пространства $T_Z(F) = T_{Z^*}(F^*)$. Из соображений симметрии между метриками F и F^* следует, что обратное отображение $h_f^{-1} : T_{Z^*}(F^*) \to T_Z(F)$, имеющее в качестве своей матрицы обратную к матрице $\|S^{ik}\|$, задает одномерную секционную кривизну полярной конформно-плоской метрики $F^* \subset C^+$. Матрица главных одномерных кривизн метрики F^* диагональная и составлена из чисел, равных $1/k_i$, $i = 1, \ldots, n$, и главные направления кривизны на F переходят в главные направления кривизны на F^* при отображении h_f.

Следствие 1. Если конформно-плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ имеет положительную одномерную кривизну, то H_f диффеоморфизм (3) сферы S^n и полярная конформно-плоская метрика $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$ также имеет положительную одномерную кривизну.

Замечание. Кривизна Риччи и одномерная секционная кривизна конформно-плоской метрики F выражаются друг через друга ($n \geq 3$):

$$R_{ik} = (n-2)S_{ik} + g_{ik}S, \quad S = S_{ik}g^{ik},$$
$$S_{ik} = \frac{1}{n-2}\left\{R_{ik} - \frac{Rg_{ik}}{2(n-1)}\right\}, \quad R = R_{ik}g^{ik}.$$

Аналогично для полярной поверхности F^*:

$$\tilde{R}_{ik} = (n-2)\tilde{S}_{ik} + \tilde{g}_{ik}\tilde{S}, \quad \tilde{S} = \tilde{S}_{ik}\tilde{g}^{ik},$$
$$\tilde{S}_{ik} = \frac{1}{n-2}\left\{\tilde{R}_{ik} - \frac{\tilde{R}\tilde{g}_{ik}}{2(n-1)}\right\}, \quad \tilde{R} = \tilde{R}_{ik}\tilde{g}^{ik},$$

где $g_{ik} = \delta_{ik}$, $\tilde{g}_{ik} = \delta^{ps}S_{ip}S_{js}$, $\left\|\tilde{S}_i^k\right\| = \left\|S_i^k\right\|^{-1}$.

Пример. Пусть конформно-плоская метрика в R^3 задана функцией $f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1^2 + x_2^2$, тогда

$$\begin{aligned} f^*(y_1, y_2, y_3) =& \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2 + 1\right) \\ y_1 =& -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ y_2 =& -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ y_3 =& x_3 \end{aligned}$$

Выражая из двух последних уравнений x_1, x_2, x_3 и подставляя в первое уравнение, получим

$$f^*(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2 + 1\right).$$

Главные значения одномерной секционной кривизны метрик ds^2, ds^{*2} равны соответственно:

$$\begin{aligned} K_{1/2}(f) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{pmatrix}, \\ K_{1/2}(f^*) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(-y_1^2 - y_2^2\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Библиографический список

1. Brinkmann H.W. On Riemann spaces conformal to Euclidean spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. USA 9 (1923), 1–3.

2. Kuiper N.H. On conformally-flat spaces in large // Ann. of Math. — (2) 1949. — V. 50.

3. Kuiper N.H. On compact conformally Euclidean spaces of dimention >2 // Ann. of Math. — (2) 1950. — V. 52.

4. Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Об изометричном погружении двумерных римановых многообразий в псевдоевклидово пространство // Мат. заметки. — 1984. — Т. 36, № 3.

5. Славский В.В. Конформно плоские метрики ограниченной кривизны на n-мерной сфере. Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу. — Новосибирск, 1987. — Т. 9.

6. Udo Hertrich-Jeromin. Introduction to Mobius Differential Geometry. London mathematical society lecture note series. — Cambridge University Press, 2003.

7. Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. — Новосибирск, 1996.

8. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. — М., 2012.

9. Slavskii V.V. Conformally flat metrics and the geometry of the pseudo-Euclidean space // Siberian Math. J. — 35 (1994).— № 3.

10. Славский В.В. Оценка коэффициента квазиконформности области через кривизну квазигиперболической метрики // Сиб. мат. журн. — 1999. — Т. 40, № 4.

11. Славский В.В. Конформно-плоские метрики и псевдоевклидово пространство : автореф. ... дисс. докт. матем. наук. — Новосибирск, 2000.

12. Славский В.В. Геометрический подход в многомерной теории потенциала // Труды по анализу и геометрии. — Новосибирск, 2000.

13. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Однородные пространства: теория и приложения : монография. — Ханты-Мансийск, 2008.

14. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. — М., 1960.

15. Родионов Е.Д., Славский В.В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Доклады академии наук. — 2002. — Т. 387, № 4.

16. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneoues Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Scieces. — 2007. — V. 146, № 6.

17. Kurkina M.V., Rodionov E.D. and Slavskii V.V. Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature // Doklady Mathematics. — 2015. — V. 91, № 3.

18. Родионов Е.Д., Славский В.В. Полярное преобразование конформно-плоских метрик // Математические труды. — 2017. — Т. 20, № 2.