УДК 514.764.323

Исследование четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с изотропным тензором Схоутена — Вейля*

П.Н. Клепиков[1], *С.В. Клепикова*[1], *К.О. Кизбикенов*[2], *И.В. Эрнст*[1]

[1] Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2] Алтайский государственный педагогический университет (Барнаул, Россия)

Investigation of four-dimensional locally homogeneous (Pseudo)Riemannian Manifolds with an isotropic Schouten — Weyl Tensor

P.N. Klepikov[1], *S.V. Klepikova*[1], *K.O. Kizbikenov*[2], *I.V. Ernst*[1]

[1] Altai State University (Barnaul, Russia)
[2] Altai State Pedagogical University (Barnaul, Russia)

Локально однородные (псевдо)римановы многообразия изучались в работах многих математиков. Их обобщением являются локально конформно однородные (псевдо)римановы пространства, на которых транзитивно действуют конформные преобразования. Такие многообразия также ранее исследовались как в римановом случае, так и в псевдоримановом.

В работе Е.Д. Родионова, В.В. Славского и Л.Н. Чибриковой было доказано, что из локально конформно однородного (псевдо)риманова пространства можно с помощью конформной деформации получить локально однородное пространство, если тензор Вейля (или тензор Схоутена — Вейля в трехмерном случае) имеет ненулевой квадрат длины. Таким образом возникает задача об изучении (псевдо)римановых локально однородных и локально конформно однородных многообразий, тензор Схоутена — Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам не равен нулю.

В данной работе приводится алгоритм, с помощью которого можно решить задачу о классификации четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена — Вейля.

Ключевые слова: (псевдо)риманово многообразие, изотропный тензор Схоутена — Вейля, системы компьютерной математики.

Locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds were studied by many mathematicians. Their generalization is a locally conformally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds on which a conformal transformations act transitively. Such manifolds were previously studied both in the Riemannian case and in the pseudo-Riemannian case.

In the paper of E.D. Rodionov, V.V. Slavsky and L.N. Chibrikova it was proved that a locally homogeneous manifold could be obtained from a locally conformally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds by a conformal deformation if the Weyl tensor (or the Schouten — Weyl tensor in the three-dimensional case) has a nonzero squared length. Thus, the problem arises of studying (pseudo)Riemannian locally homogeneous and locally conformally homogeneous manifolds, the Schouten — Weyl tensor of which has zero squared length, and itself is not equal to zero.

In this paper, we present an algorithm that can solve the classification problem of four-dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with a nontrivial isotropy subgroup and an isotropic Schouten — Weyl tensor.

Key words: (pseudo)Riemannian manifold, isotropic Schouten — Weyl tensor, systems of computer mathematics.

DOI 10.14258/izvasu(2018)4-14

1. Введение, определения и постановка задачи. (Псевдо)римановы многообразия с изотропным тензором Схоутена — Вейля естественным образом возникают при изучении локально конформно однородных (псевдо)римановых пространств [1]. Ранее данные многообразия в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой изучались в работах [2, 3]. В них

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-31-00033 мол_а).

была получена полная классификация метрических групп Ли, тензор Схоутена — Вейля которых является изотропным. Данная работа продолжает исследования многообразий с изотропным тензором Схоутена — Вейля в случае четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии.

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X, Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим как

$$r(X, Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X, V)Y), \quad s = \mathrm{tr}_g(r).$$

Тензор Вейля W определим равенством:

$$W = R - A \owedge g,$$

где $A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right)$, $(A \owedge g)(X, Y, Z, V) = A(X, Z)g(Y, V) + A(Y, V)g(X, Z) - A(X, V)g(Y, Z) - A(Y, Z)g(X, V)$.

Тензор Схоутена — Вейля определяется следующим равенством:

$$SW(X, Y, Z) = \nabla_Z A(X, Y) - \nabla_Y A(X, Z).$$

При размерности многообразия $n \geqslant 4$ тензор Схоутена — Вейля связан с дивергенцией тензора Вейля следующим равенством [4]:

$$SW = -(n-3)\,\mathrm{div}\, W.$$

Если скалярная кривизна (псевдо)риманова многообразия является константой (например, в случае локально однородного пространства), то формула для вычисления тензора Схоутена — Вейля упрощается:

$$SW = \frac{1}{n-2}\left(\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z)\right).$$

Определение 1 [2]. Векторное поле v определяет инфинитезимальное изометричное преобразование (псевдо)риманова пространства и называется *киллинговым*, если

$$v_{i,j} + v_{j,i} = 0. \qquad (1)$$

Соответственно, векторное поле v определяет инфинитезимальное конформное преобразование (псевдо)риманова пространства и называется *конформно-киллинговым*, если

$$v_{i,j} + v_{j,i} = 2w\, g_{ik}, \qquad (2)$$

где $w = v_{k,i}g^{ik}/n$.

Определение 2 [2]. Пусть (M, g) — связное (псевдо)риманово многообразие, для любой точки x_0 которого и любого касательного вектора $v_0 \in T_{x_0}M$ существует векторное поле $v(x)$ в окрестности точки x_0, удовлетворяющее уравнению (1) такое, что $v(x_0) = v_0$. Многообразие в этом случае назовем *локально однородным пространством.* Соответственно, если векторное поле $v(x)$ удовлетворяет системе уравнений (2), то многообразие назовем *локально конформно однородным пространством.*

Ранее локально конформно однородные пространства изучались, например, в статьях [5–8]. В работе [2] доказана

Теорема 1. *Пусть (M, g) — локально конформно однородное связное пространство, и пусть хотя бы в одной точке имеем $\|W\|^2 \neq 0$ ($\|SW\|^2 \neq 0$ при $\dim M = 3$). Тогда (M, g) конформно эквивалентно локально однородному пространству.*

Таким образом, возникает задача об изучении (псевдо)римановых локально однородных и локально конформно однородных многообразий, тензор Схоутена — Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам не равен нулю.

Определение 3. Тензор Схоутена — Вейля SW будем называть *изотропным*, если квадрат его длины равен нулю ($\|SW\|^2 = 0$), а сам тензор не равен нулю ($SW \neq 0$).

Замечание. *Отметим, что в случае римановых многообразий из равенства нулю квадрата длины тензора Схоутена — Вейля следует, что сам тензор равен нулю. Действительно, в ортонормированном базисе из векторов в касательном пространстве произвольной точки многообразия квадрат длины тензора Схоутена — Вейля представляет собой сумму квадратов всех компонент, а значит, равен нулю тогда и только тогда, когда каждая компонента тензора равна нулю.*

При достаточно малой размерности локально однородного (псевдо)риманова пространства становится возможным применение систем компьютерной математики для изучения локально однородных (псевдо)римановых многообразий с изотропным тензором Схоутена — Вейля. Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять квадрат длины тензора Схоутена — Вейля на локально однородном (псевдо)римановом пространстве (подробнее см. [9, 10]).

Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — (необязательно редуктивное) дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, $h = \dim \mathfrak{h}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ — базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k,$$
$$[h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c^k_{ij}, C^k_{ij} и $\bar{c}^k_{ij}$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом вычислим представление изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)^k_j = (\psi(e_i))^k_j = \bar{c}^k_{ij} \tag{3}$$

и запишем условие инвариантности метрического тензора g:

$$(\psi_i)^t \cdot g + g \cdot \psi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, h, \tag{4}$$

где $(\psi_i)^t$ — транспонированная матрица.

Далее, с помощью уже известных структурных констант и матрицы метрического тензора, найдем компоненты связности Леви-Чивита ∇:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(c^k_{ij} + g^{sk}c^l_{sj}g_{il} + g^{sk}c^l_{si}g_{jl}\right),$$
$$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}\bar{c}^k_{ij} - \frac{1}{2}g^{sk}\bar{c}^l_{is}g_{jl}:$$

где $\nabla_{u_i}u_j = \Gamma^k_{ij}u_k$, $\nabla_{h_i}u_j = \bar{\Gamma}^k_{ij}u_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il} + c^l_{ij}\Gamma^p_{lk} + C^l_{ij}\bar{\Gamma}^p_{lk}\right)g_{ps},$$
$$r_{ik} = R_{ijks}g^{js}.$$

Далее, находятся компоненты ковариантной производной тензора Риччи

$$r_{ij,k} = r_{sj}\Gamma^s_{ki} + r_{is}\Gamma^s_{kj},$$

вычисляется тензор Схоутена — Вейля

$$SW_{ijk} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij,k} - r_{ik,j}\right),$$

а также квадрат его длины

$$\|SW\|^2 = SW_{ijk}SW_{\alpha\beta\gamma}g^{i\alpha}g^{j\beta}g^{k\gamma}.$$

2. Пример вычислений. В качестве примера рассмотрим четырехмерное локально однородное псевдориманово пространство $1.1^1.3$ (по классификации [11]). В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует базис $\{e_1, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_1\}$ и $\{u_i\}$ базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Скобки Ли на базисных векторах имеют вид:

$$[e_1, u_1] = u_1, \ [e_1, u_3] = -u_3, \ [u_1, u_3] = e_1 + u_2.$$

Вычислим представление изотропии (3):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и запишем условие (4) инвариантности метрического тензора:

$$\alpha_{12} = 0, \ \alpha_{14} = 0, \ \alpha_{11} = 0,$$
$$\alpha_{23} = 0, \ \alpha_{33} = 0, \ \alpha_{34} = 0.$$

Решая данную систему уравнений относительно компонент метрического тензора, получаем, что инвариантное скалярное произведение обязано иметь вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

и иметь либо лоренцеву $(+,+,+,-)$, либо нейтральную $(+,+,-,-)$ сигнатуру.

Далее, используя вышеприведенные формулы, вычисляем компоненты тензора Схоутена — Вейля

$$SW_{132} = -SW_{123} = SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha^2_{13}},$$
$$SW_{134} = -SW_{143} = SW_{341} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha^2_{13}}$$

и квадрат его длины

$$\|SW\|^2 = -\frac{3\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})^2}{4\alpha^6_{13}}.$$

Решая уравнение $\|SW\|^2 = 0$, получим два решения

$$\alpha_{22} = 0 \ \text{ или } \ \alpha_{22} = \alpha_{13},$$

однако во втором случае тензор Схоутена — Вейля будет тривиальным. Таким образом, получим следующую теорему

Теорема 2. *Четырехмерное локально однородное псевдориманово пространство* $1.1^1.3$ *имеет изотропный тензор Схоутена — Вейля тогда и только тогда, когда инвариантная метрика* g *имеет вид*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$. *В этом случае инвариантное скалярное произведение обязано иметь нейтральную* $(+,+,-,-)$ *сигнатуру.*

3. Заключение. В результате проведенных исследований построена математическая модель, которая позволяет получить полную классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и тривиальным тензором Схоутена — Вейля.

Библиографический список

1. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2002. — Vol. 43, № 2.

2. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces // Siberian Advances in Mathematics. — 2007. — Vol. 17, № 3.

3. Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. About the Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorenzian Lie groups // arXiv:1708.06614, 2017.

4. Besse A. Einstein manifolds — Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg, 1987. DOI: 10.1007/978-3-540-74311-8

5. Salimi Moghaddam H.R. On Ricci Soliton metrics conformally equivalent to left invariant metrics // arXiv:1401.0744, 2016.

6. Podoksenov M.N. Conformally homogeneous Lorentz manifolds. II // Siberian Mathematical Journal. — 1992. — Vol. 33, № 6.

7. Liimatainen T., Salo M. Nowhere conformally homogeneous manifolds and limiting Carleman weights // Inverse Problems and Imaging. — 2012. — Vol. 6, № 3. DOI: 10.3934/ipi.2012.6.523

8. Alekseevsky D. Lorentzian manifolds with transitive conformal group // Note di Matematica. — 2017. — Vol. 37, № 1. DOI: 10.1285/i15900932v37suppl1p35

9. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях // Известия АлтГУ. — 2017. — № 4 (96). DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-19

10. Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия АлтГУ. — 2017. — № 1 (93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-28

11. Komrakov B.B. Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. — 2001. — Vol. 8.