

Движение внешней нагрузки по битому льду в канале*

К.Н. Завьялова¹, К.А. Шшмарев¹, Т.И. Хабакпашева^{2,3}

¹ Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

² Университет Восточной Англии (Норидж, Великобритания)

³ Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Problem of a Moving Load in a Channel Covered with Broken Ice

K.N. Zavyalova¹, K.A. Shishmarev¹, T.I. Khabakpasheva^{2,3}

¹ Altai State University (Barnaul, Russia)

² University of East Anglia (Norwich, United Kingdom)

³ Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS (Novosibirsk, Russia)

В данной работе изучается влияние битого льда на образование гравитационных волн, вызванных движением внешней нагрузки вдоль канала. Внешняя нагрузка моделируется гладким локально распределенным давлением, которое движется вдоль центральной линии канала с постоянной скоростью. За основу математической модели берутся дифференциальное уравнение колебаний тонкого битого льда и уравнение Лапласа для потенциала скорости течения жидкости под битым льдом. Данные уравнения замыкаются граничными условиями непротекания на стенках и дне канала, кинематическим и динамическим условиями на границе раздела битый лед — жидкость. Исследуется решение в виде бегущей волны, которое не зависит от времени в системе координат, движущейся вместе с внешней нагрузкой. С помощью преобразования Фурье по переменной, направленной вдоль канала, рассматриваемая задача сводится к двумерной задаче относительно профиля гравитационной волны поперек канала, которая решается методом разделения переменных. Проведен анализ формирования гравитационных волн в канале, покрытом битым льдом. Показано, что для каждой скорости движения нагрузки существует счетное число гравитационных волн, распространяющихся вдоль канала со скоростью движения нагрузки. Приведен пример тестовых расчетов трехмерной задачи.

Ключевые слова: битый лед, приграничная зона ледового покрова, гравитационные волны, движущаяся нагрузка, канал,

DOI 10.14258/izvasu(2018)4-13

Введение. Целью данного исследования является изучение движения судна по битому льду

In this paper, the effect of broken ice on the formation of gravitational waves caused by an external load moving along a channel is studied. The external load is modeled by a smooth locally distributed pressure moving along the center line of the channel at a constant speed. The governing equations are the differential equation of oscillations of thin broken ice and the Laplace equation for a flow velocity potential under the broken ice. These equations are closed by the impermeability conditions on the walls and bottom of the channel, and by the kinematic and dynamic conditions at the broken ice-liquid interface. The traveling wave solution that does not depend on time in a coordinate system moving together with the external load is investigated. Using the Fourier transform along the channel the problem under consideration reduces to a two-dimensional problem with respect to the profile of the gravitational wave across the channel, which is solved by the method of separation of variables. The analysis of the formation of gravitational waves in the broken ice is provided. It is shown that for every speed of the load there is a countable number of gravitational waves propagating along the channel with the velocity of the load. Each wave has a given profile across the channel. An example of test calculations for a three-dimensional problem is shown.

Key words: broken ice, marginal ice zone, gravity waves, moving load, channel.

в канале или в реке. Предполагается, что лед был предварительно разрушен резонансным методом судном на воздушной подушке, которое движется вдоль замороженной части реки на определенной

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-08-00291.

скорости и создает напряженно-деформированное состояние ледового покрова. Вызванные напряжения могут быть достаточными для ломки льда ([1], [2], [3]). При движении судна по битому льду основной прикладной задачей является определение параметров, гарантирующих безопасное движение. При отсутствии упругих сил в битом льду могут возникать волны большой амплитуды, как в области движения судна, так и в отдалении от него, в частности на стенках канала и возле речных сооружений. Рассматриваемая задача является близкой по постановке к задачам движения кораблей в морских льдах по полынье, образованной впереди идущим ледоколом, или движения по приграничной зоне ледового покрова.

Случай, когда верхняя поверхность канала описывается ледовым покровом, хорошо изучен в прошлом. Прогрессивные волны в замороженном канале исследованы в [4], [5], [6], [7]. Колебания неограниченной тонкой ледовой пластины исследованы в [1], [8], [9], колебания полубесконечного ледового покрова в [10]. Рассмотренные задачи решались в рамках линейной теории гидроупругости. При исследовании вынужденных колебаний внешняя нагрузка моделировалась гладким локализованным пятном давления. Показано, что стенки канала имеют важную роль в формировании прогибов ледового покрова. Исследование колебаний ледового покрова проведено в [11], [12]. Оценка влияния периодической нагрузки на ледовый покров получена в [13], [14]. Вопросы корrekтности начально-краевых задач динамики порoупругого льда рассмотрены в [15], [16].

В данной работе рассматривается задача движения гладкого локализованного пятна давления вдоль битого льда в канале. Битый лед имеет постоянную толщину и моделируется поверхностью, обладающей массой, но с нулевой жесткостью. Жидкость в канале предполагается идеальной и несжимаемой [17]. Движение жидкости в канале является потенциальным и вызвано отклонением битого льда от состояния покоя. Краевые условия на функцию, описывающую колебания битого льда, на стенках канала отсутствуют. Основное внимание в статье уделено формированию колебаний битого льда для заданной скорости движения нагрузки [18].

Постановка задачи. Рассматривается прогиб битого льда в канале, вызванный движением внешней нагрузки вдоль канала. Канал имеет прямоугольное сечение с глубиной H , ($0 \geq z \geq -H$), и шириной $2L$, ($-L \leq y \leq L$). В направлении оси x канал не ограничен. Канал занят жидкостью плотностью ρ_ℓ . Рассматривается невязкая и несжимаемая жидкость, покрытая битым льдом постоянной толщины. Внешняя нагрузка моделируется локализованным гладким распределением давления над верхней поверхностью битого льда.

Задача прогиба битого льда в канале формулируется в рамках линейной теории гидроупругости. Прогиб $w(x, y, t)$ описывается уравнением колебания битого льда

$$Mw_{tt} = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0), \quad (1)$$

где $M = \rho_i h_i$ — масса битого льда на единицу площади, ρ_i — плотность льда. $p(x, y, 0, t)$ — гидродинамическое давление, действующее на нижнюю поверхность битого льда, $P(x, y, t)$ — внешнее давление, t — время. Внешнее давление движется вдоль центральной линии канала и моделируется гладкой функцией $P(x, y, t)$

$$P(x, y, t) = P_0 P_1 \left(\frac{x - Ut}{L} \right) P_2 \left(\frac{y}{L} \right) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (2)$$

$$P_1(\tilde{x}) = \frac{\cos(\frac{\pi c_1 \tilde{x}}{2} + 1)}{2} \quad (c_1 |\tilde{x}| < 1),$$

$$P_1(\tilde{x}) = 0 \quad (c_1 |\tilde{x}| \geq 1),$$

$$\tilde{x} = \frac{x - Ut}{L},$$

$$P_2(\tilde{y}) = \frac{\cos(\frac{\pi c_2 \tilde{y}}{2} + 1)}{2} \quad (c_2 |\tilde{y}| < 1),$$

$$P_2(\tilde{y}) = 0 \quad (c_2 |\tilde{y}| \geq 1), \quad \tilde{y} = \frac{y}{L},$$

где c_1, c_2 — безразмерные параметры внешней нагрузки, характеризующей размер зоны давления. Гидродинамическое давление на границе лед-жидкость удовлетворяет линеаризованному уравнению Бернулли

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_\ell \varphi_t - \rho_\ell g w \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (3)$$

где g — гравитационное ускорение, $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости течения, удовлетворяющий уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta \varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L)$$

и граничным условиям

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L),$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H). \quad (4)$$

Сформулированная задача записывается в безразмерных переменных

$$\tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{x} = \frac{x - Ut}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L},$$

$$\tilde{t} = \frac{U}{L} t, \quad \tilde{P} = P_1(\tilde{x}) P_2(\tilde{y}).$$

Рассматривается установившееся решение стационарной задачи. Предполагается, что искомые функции w и φ имеют следующую зависимость

$$w(x, y, t) = w(\tilde{x}L + Ut, L\tilde{y}, t) = w_{sc} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(\tilde{x}L + Ut, L\tilde{y}, t) = \varphi_{sc}\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

где $w_{sc} = \frac{P_0}{\rho \epsilon g}$ и $\varphi_{sc} = \frac{UP_0}{\rho \epsilon g}$, масштабы прогиба битого льда и потенциала скорости течения соответственно. В безразмерных переменных задача примет следующий вид (знак тильда опускается)

$$\alpha h Fr^2 w_{xx} + w = h Fr^2 \varphi_x - P_1(x)P_2(x) \quad (-\infty < x < \infty, -1 < y < 1, z = 0), \quad (5)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -1 < y < 1, -h < z < 0), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_z &= -w_x \quad (z = 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm 1), \\ \varphi_z &= 0 \quad (z = -h), \end{aligned} \quad (7)$$

где $Fr = U/\sqrt{gH}$ – число Фруда, $\alpha = \frac{\rho_i h_i}{\rho \epsilon L}$, $h = \frac{H}{L}$.

Решение поставленной задачи. Сформулированная задача (1) – (7) решается с помощью преобразования Фурье в направлении оси x . Уравнение пластины (5) дает

$$w^F(\xi, y)(1 - h\alpha Fr^2 \xi^2) = i\xi h Fr^2 \varphi^F(\xi, y, z) - P_2(y)P_1^F(\xi) \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} w^F(\xi, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{-i\xi x} dx, \\ \varphi^F(\xi, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z) e^{-i\xi x} dx, \\ P_1^F(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(x) e^{-i\xi x} dx. \end{aligned}$$

Представим функцию $\varphi^F(\xi, y, z)$ в виде

$$\varphi^F(\xi, y, z) = -i\xi J(\xi, y, z),$$

тогда система (1) – (7) примет вид

$$w^F(\xi, y)(1 - h\alpha Fr^2 \xi^2) = \xi^2 h Fr^2 J(\xi, y, z) - P_2(y)P_1^F(\xi), \quad (9)$$

$$\Delta J(\xi, y, z) = \xi^2 J(\xi, y, z), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} J_z(\xi, y, z) &= w^F(\xi, y) \quad (z = 0), \\ J_z(\xi, y, z) &= 0 \quad (z = -h), \\ J_y(\xi, y, z) &= 0 \quad (y = \pm 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Введем одномерные колебания в канале $\psi_i(y) = \cos(\pi i y)$ и функцию w^F будем искать в виде

$$w^F = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\xi) \psi_i(y). \quad (12)$$

Решая систему уравнений (10) – (11) методом Фурье, функция $J(\xi, y, z)$ примет вид

$$J(\xi, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\xi) \cos(\pi n y) Gc_n}{Gs_n}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} Gc_n &= \cosh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2}(h + z)), \\ Gs_n &= \sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} \sinh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} h). \end{aligned}$$

Подставим (13) и (12) в правую и левую части уравнения (9), умножим на $\cos(\pi n y)$ и проинтегрируем по dy на промежутке $[-1; 1]$. Получим представление для коэффициентов разложения $a_n(\xi)$

$$a_n(\xi) = \frac{-P_1^F(\xi)N_n}{1 - h\alpha Fr^2 \xi^2 - \frac{h Fr^2 \xi^2}{Gt_n}}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} Gt_n &= \sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} \tanh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} h), \\ N_n &= \frac{\sin((c_2 + n)\frac{\pi}{c_2})}{(c_2 + n)\pi} + \frac{\sin((c_2 - n)\frac{\pi}{c_2})}{(c_2 - n)\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi n}{c_2})}{n\pi}, \\ N_n(c_2 = n) &= c_2. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$w^F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-P_1^F(\xi)N_n}{1 - h\alpha Fr^2 \xi^2 - \frac{h Fr^2 \xi^2}{Gt_n}} \cos(\pi n y).$$

Функцию $w(x, y)$ найдем с использованием обратного преобразования Фурье

$$w(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^F(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (15)$$

С учетом разложения (12), интеграл (15) примет вид

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Коэффициенты $a_n(\xi)$, следуя (14), являются четными по ξ , тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \int_0^{\infty} a_n(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

Для численного решения пользуемся свойством преобразования Фурье, $w^F \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, и ограничиваем интегрируемую область конечным отрезком. Данный отрезок разбиваем на конечное число шагов N с шагом $\Delta\xi$ и ограничиваем количество функций в (12) конечным числом N_{mod} . Коэффициенты $a_n(\xi)$ приближаются линейными функциями на каждом отрезке по ξ , тогда

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \cos(\pi n y) \times \\ &\times \sum_{m=1}^N \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} a_n(\xi) \cos(x\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \cos(\pi n y) \times \\ &\times \sum_{m=1}^N \left[\frac{a_n(\xi_{m+1})}{x} (\sin(x\xi_{m+1}) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{\Delta\xi x}) - \right. \\ &\left. - \frac{a_n(\xi_m)}{x} (\sin(x\xi_m) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{\Delta\xi x}) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Тестирование численного алгоритма.

Точность описанного алгоритма тестировалась на функции внешней нагрузки $P_1(x)$. Для этого к функции P_1 последовательно применялись прямое и обратное преобразования Фурье. Функция P_1 имеет вид

$$P_1(x) = \frac{\cos(\pi c_1 x) + 1}{2} \quad (c_1|x| < 1),$$

$$P_1(x) = 0 \quad (c_1|x| \geq 1).$$

Домножим P_1 на $\frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{2\pi}}$ и проинтегрируем результат по x от $-\infty$ до ∞ , получим

$$P_1^F(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(\frac{\xi}{c_1})}{\pi c_1 - \xi} - \frac{\sin(\frac{\xi}{c_1})}{\pi c_1 + \xi} \right] + \frac{\sin(\frac{\xi}{c_1})}{\xi\sqrt{2\pi}},$$

$$P_1^F(0) = \frac{1}{c_1\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда функция P_1 выразится через P_1^F по формуле

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_1^F e^{ix\xi} d\xi, \quad (17)$$

где $e^{ix\xi} = \cos(x\xi) + i \sin(x\xi)$. В силу того, что P_1^F — четная функция, из (17) следует

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_1^F \cos(x\xi) d\xi.$$

Воспользуемся в последнем равенстве тем, что $\cos(x\xi)$ — четная функция, тогда

$$P_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} P_1^F \cos(x\xi) d\xi. \quad (18)$$

Рассмотрим конечную область интегрирования по $\xi \in [0, a]$. Разобьем интервал $[0, a]$ на N отрезков длиной $\Delta\xi$, тогда интеграл в правой части (18) примет вид

$$P_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^N \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} P_1^F(\xi) \cos(x\xi) d\xi. \quad (19)$$

Коэффициент P_1^F на отрезке $[\xi_m, \xi_{m+1}]$ аппроксимируется линейной функцией

$$P_1^F \approx \frac{P_1^F(\xi_{m+1}) - P_1^F(\xi_m)}{\Delta\xi} (\xi - \xi_m) + P_1^F(\xi_m).$$

Тогда решение уравнения (19) примет вид

$$P_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^N \left(\frac{P_1^F(\xi_{m+1})}{x} \left[\sin(x\xi_{m+1}) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{x\Delta\xi} \right] - \frac{P_1^F(\xi_m)}{x} \left[\sin(x\xi_m) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{x\Delta\xi} \right] \right). \quad (20)$$

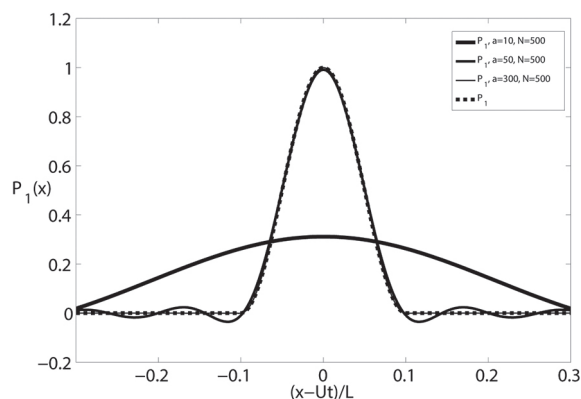


Рис. 1. Результаты расчетов тестовой задачи

Сравнение P_1 , вычисленной аналитически и вычисленной по формуле (20), приведено на рисунке 1. График оригинальной функции P_1 представлен пунктирной линией. Сплошными линиями показаны численные решения при разных параметрах тестовой задачи. Параметр количество шагов N при всех вычислениях оставляем постоянным и равным 500. Параметр размера интегрируемой области a изменялся от 10 до 300. Вычисления показали, что чем больше параметр a , тем выше точность численного решения. Заметим, что функция P_1 зависит от параметра c_1 , который определяет длину ненулевой области ($c_1|x| < 1$). Чем больше c_1 , тем меньше область и тем медленнее P_1^F стремится к 0. Численное решение задачи о колебаниях битого льда в канале получено для канала ширины $2L = 10$ м, толщина битого льда $h_i = 20$ см, плотность льда $\rho_i = 917$, плотность воды $\rho_l = 1024$, глубина канала $H = 2$ м.

Колебания битого льда в канале. Рассмотрим систему уравнений (1) – (4), где $P(x, z, t) = 0$. Решение для распространяющихся волн в битом льду имеет вид

$$w = A \cos(kx - \omega t) F(y).$$

Соответствующий потенциал скорости течения жидкости в канале имеет вид

$$\varphi = A\omega \sin(kx - \omega t) f(y, z),$$

где $A = const$ — амплитуда, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\omega = 2\pi/T$ — частота волны, λ — длина волны, T — период волны, $(kx - \omega t)$ — фаза волны. Колебания битого льда поперек канала $F(y)$ представим в виде суммы

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi ny}{L}\right).$$

Функция $f(y, z)$ удовлетворяет условиям на верхней и нижней границах канала

$$f_z(y, z) = F(y) \quad (z = 0),$$

$$f_z(y, z) = 0 \quad (z = -H).$$

Решением данной задачи является зависимость $\omega = \omega(k)$. Для канала получаем счетное число соотношений $\omega_n = \omega_n(k)$

$$\omega_n(k) = \sqrt{\frac{\rho_l g \sqrt{\mu_n + k^2}}{M \sqrt{\mu_n + k^2} + \rho_l \coth(\sqrt{\mu_n + k^2} H)}},$$

где $\mu_n = (\frac{\pi n}{L})^2$. Фазовая скорость распространения волн в канале вычисляется по формуле $C_n = \frac{\omega_n(k)}{k}$. Функции C_n составлены так, что $C_1 \leq C_2 \leq C_3$ и т.д. Каждая C_n соответствует волнам с профилем $\cos(\frac{\pi n y}{L})$ поперек канала. Фазовые ско-

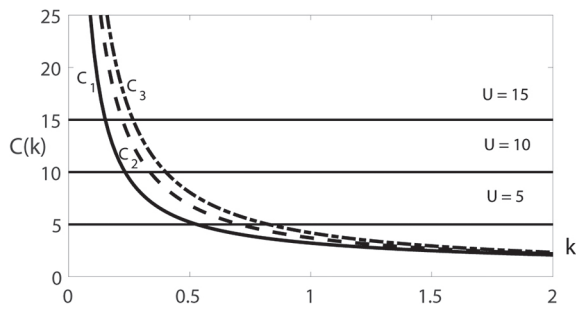


Рис. 2. Прямыми тонкими линиями показаны скорости. Кривые C_1, C_2, C_3 представляют собой фазовые скорости

рости для первых трех волн ($n = 1, 2, 3$) показаны на рисунке 2. Жирной сплошной линией показана C_1 , пунктирными C_2, C_3 . На графике построены горизонтальные линии для разной скорости U движения нагрузки. Данные линии имеют по одной точке пересечения с каждой фазовой скоростью. Для $U = 10$ м/с соответствующие волновые числа, при которых $C_n(k) = U$, равны $k_1 = 0.225, k_2 = 0.33, k_3 = 0.405^{-1}$. Решение задачи (5) – (7) получили численно согласно формуле (16). Результаты показаны на рисунках 3 – 5. На рисунке 4 показаны профили волн вдоль канала. Решение формируется из суммы волн. Профили этих волн поперек канала соответствуют $F_n(y) = \cos(\pi n y)$ и показаны на рисунке 3. Согласно рисунку 1 для каждой скорости U движения нагрузки существует распространяющаяся с этой же скоростью волна в канале с профилем $F_n(y)$. Длина каждой волны вычисляется как расстояние между пиками. Для первых трех волн: $\lambda_1 = 23.5, \lambda_2 = 18.5, \lambda_3 = 15.5$ м. Соответствующие волновые числа $\frac{2\pi}{\lambda_1}, \frac{2\pi}{\lambda_2}, \frac{2\pi}{\lambda_3}$ будут равны k_1, k_2, k_3 , вычисленным для распределяющихся волн. Отсюда следует, что нагрузка (корабль,

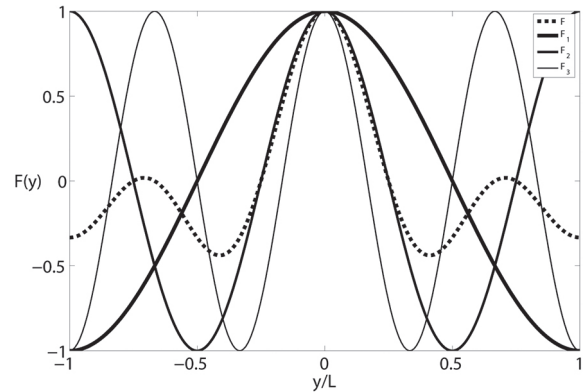


Рис. 3. Профили волн поперек канала. Сплошными линиями показаны волны для F_1, F_2, F_3 . Пунктирными линиями показана сумма этих волн

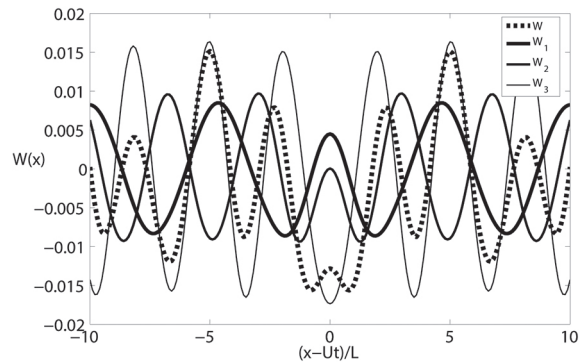


Рис. 4. Профили волн вдоль канала. Сплошными линиями показаны волны для W_1, W_2, W_3 . Пунктирными линиями показана сумма этих волн

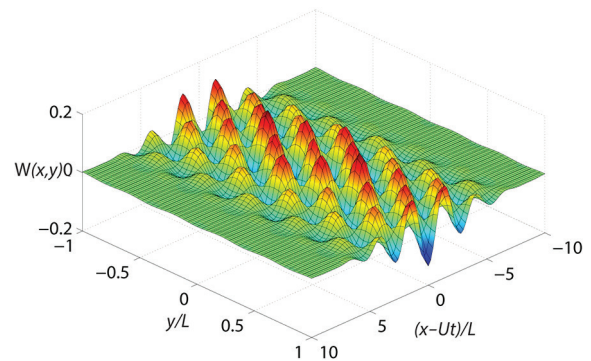


Рис. 5. Пример расчетов трехмерных колебаний битого льда в канале для $U = 5$ м/с и первых трех волн

судно на воздушной подушке и т.п.) создает волны, распространяющиеся вперед и назад в канале с той же скоростью, что и скорость U движения нагрузки. Такая волна будет для каждого профиля $F_n(y)$.

Пример трехмерных колебаний, составленный для первых трех волн, показан на рисунке 5.

Заключение. В работе исследована задача движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль канала. Задача решена в рамках линейной теории гидроупругости. Решение получено с помощью преобразования Фурье вдоль канала. Показано, что решение разбивается на сумму колебаний с заданным профилем поперек канала.

Для каждой скорости движения нагрузки существует счетное число волн, распространяющихся с этой же скоростью. Этот результат совпадает с результатом для гидроупругих волн и волн на свободной поверхности в канале. Приведены результаты расчетов тестовых расчетов трехмерной задачи. Основное отличие от гидроупругих волн в канале заключается в том, что на стенках могут образовываться волны большой амплитуды.

Библиографический список

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice. — Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A.. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel. — Applied Ocean Research. — 2016. — Т. 59.
3. Kozin V.M. Resonance Method of Breaking of Ice Cover. Inventions and Experiments. — М., 2007.
4. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн. // Известия АлтГУ. — 2012. — Вып. 1/2 (73).
5. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия АлтГУ. — 2012. — Вып. 1/1 (73).
6. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves propagating along a channel with ice cover // European Journal of Mechanics B/Fluids, 2014. К.А.В. 47.
7. Batyayev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic waves in channel with free ice cover. Fluid Dynamics, 2015. — 6.
8. Zhestkaya V.D. Numerical solution of the problem of an ice sheet under a moving load // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1999. — V. 40 (4).
9. Жесткая В.Д., Козин В.М. Численное решение задачи о воздействии ударного импульса на ледяной покров. — ПМТФ. — 2008. — Т. 49. — № 2.
10. Brocklehurst P. Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures // PhD thesis, University of East Anglia, UK, 2012.
11. Sturova I.V., Tkacheva L.A. Wave motion in a fluid under and inhomogeneous ice cover // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Т. 894. — № 1.
12. Стурова И.В., Ткачева Л.А. Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии // Полярная механика. — 2016. — № 3.
13. Ткачева Л.А. Колебания ледяного покрова с трещиной при воздействии периодической по времени нагрузки. — Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2017. — № 2.
14. Tkacheva L.A. Vibrations of an ice sheet with crack under a time-periodic load // Fluid Dynamics. — 2017. — Т. 52. — № 2.
15. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. — 2015. — Т. 2. — № 1.
16. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Т. 722. — № 1.
17. Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V., Chizhumov S.D., Dzhabailov M.P., Morozov V.S., Kustov A.N. Applied problems of the dynamics of ice cover. — М., 2008.
18. Шишмарев К.А., Завьялова К.Н. Свободные и вынужденные волны в канале, покрытом битым льдом // МАК: Математики — Алтайскому краю : сборник трудов всероссийской конференции по математике. — 2017.