

Численное решение одномерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде**Р.А. Вирц¹, А.А. Папин¹, В.А. Вайгант²*¹ Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)² Боннский университет (Бонн, Германия)**Numerical Solution of the One-Dimensional Problem of Filtration of an Incompressible Fluid in a Viscous Porous Medium***R.A. Virts¹, A.A. Papin¹, W.A. Weigant²*¹ Altai State University (Barnaul, Russia)² Bonn University (Bonn, Germany)

Процесс фильтрации жидкости в деформируемой пористой среде описывается системой, состоящей из уравнений сохранения массы для жидкой и твердой фаз, закона Дарси, реологического соотношения типа Максвелла и закона сохранения баланса сил. Предполагается, что пороупругая среда обладает преимущественно вязкими свойствами и плотности фаз являются постоянными. В случае одной пространственной переменной переход к переменным Лагранжа позволяет свести исходную систему определяющих уравнений к одному уравнению для искомой пористости. Целью работы является численное исследование возникающей начально-краевой задачи. В пункте 1 дается постановка задачи и краткий обзор литературы по близким к данной теме работам. В пункте 2 проводится преобразование системы уравнений, в результате которого для пористости возникает нелинейное уравнение третьего порядка. В пункте 3 предложен алгоритм численного решения одномерной начально-краевой задачи. Для численной реализации используется однородная разностная схема для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и схема Рунге — Кутты второго порядка аппроксимации. Полученное решение удовлетворяет физическому принципу максимума. В пункте 4 рассматривается более общий случай сведения исходной системы к одному уравнению.

Ключевые слова: пористость, фильтрация, пороупругость, закон Дарси.

DOI 10.14258/izvasu(2018)4-11

1. Постановка задачи. В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-08-00291.

The process of fluid filtration in a deformable porous medium is described by a system of equations consisting of the equations of mass conservation for the liquid and solid phases, the Darcy law, the Maxwell-type rheological relation, and the law of conservation of the balance of forces. It is assumed that the poroelastic medium has predominantly viscous properties and the phase densities are constant. In the case of one spatial variable, the transition to Lagrange variables makes it possible to reduce the initial system of determining equations to one equation for the required porosity. The paper is aimed to study the initial — boundary value problem numerically. In clause 1, the task is set and a brief review of the literature on related work. In paragraph 2, the system of equations is transformed, resulting in a nonlinear third-order equation for porosity. In paragraph 3 we propose an algorithm for the numerical solution of a one-dimensional initial-boundary problem. For numerical realization, we use a homogeneous difference scheme for a second-order equation with variable coefficients and a Runge — Kutta scheme of second-order approximation. The obtained solution satisfies the physical principle of maximum. In paragraph 4, we consider a more general case of reducing the original system to a single equation.

Key words: porosity, filtration, poroelasticity, Darcy law.

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \vec{v}_f \rho_f) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_s(1 - \phi)}{\partial t} + \operatorname{div}((1 - \phi) \vec{v}_s \rho_s) = 0, \quad (2)$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f + \rho_f \vec{g}), \quad (3)$$

$$\operatorname{div} v_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e\right), \quad (4)$$

$$p_e = p_{tot} - p_f, \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} - \rho_{tot} \vec{g} = 0, \quad (5)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi)p_s, \quad \rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi)\rho_s. \quad (6)$$

Система (4)–(6) решается в области $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$, при краевых и начальных условиях

$$v_s|_{x=0, x=1} = v_f|_{x=0, x=1} = 0, \quad \phi|_{t=0} = \phi^0(x).$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное нестационарное движение магмы в горной породе. Для описания процесса используются законы сохранения масс для каждой из фаз, закон Дарси для жидкой фазы, учитывающий движение твердого скелета, реологическое соотношение типа Максвелла, закон сохранения импульса системы в целом [1–4]. Здесь ρ_f, ρ_s, v_f, v_s — соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, ϕ — пористость, p_f, p_s — соответственно давления жидкой и твердой фаз, p_e — эффективное давление, p_{tot} — общее давление, ρ_{tot} — плотность двухфазной среды, g — плотность массовых сил; $k(\phi)$ — коэффициент фильтрации, $a_1(\phi)$ — коэффициент объемной вязкости. Плотности жидкой и твердой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, t) \in Q_T$.

Ближкие по структуре системы рассматривались в работах [5–12]. В этих работах на основе ряда упрощающих предположений исходные системы сводились к одному уравнению высокого порядка. В [5] установлена локальная разрешимость задачи Коши пространствах С.Л. Соболева. В [6, 7] исследованы решения типа «простой волны». Вопросы обоснования моделей фильтрации в деформируемой пористой среде в модельных случаях исследованы в [13–16].

2. Одномерная задача. Рассмотрим одномерный случай и перейдем в этой системе уравнений к переменным Лагранжа [15]. Пусть $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x, t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} = v_s(\bar{x}, \tau), \quad \bar{x}|_{\tau=t} = x.$$

Положим $\hat{x} = \bar{x}(0, x, t)$ и возьмем за новые переменные \hat{x} и t . Тогда $1 - \phi(\hat{x}, t) = (1 -$

$\phi^0(\hat{x}))\hat{J}(\hat{x}, t)$, где $\hat{J}(\hat{x}, t) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(\hat{x}, t)$ — якобиан перехода. Вместо (1)–(6) имеем

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{(1 - \hat{\phi})}{1 - \phi^0} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi} \hat{v}_f) = v_s \frac{(1 - \hat{\phi})}{1 - \phi^0} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\phi},$$

$$\frac{\partial(1 - \hat{\phi})}{\partial t} + \frac{(1 - \hat{\phi})^2}{1 - \phi^0} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = 0,$$

$$\hat{\phi}(\hat{v}_s - \hat{v}_f) = k(\phi) \left(\frac{1 - \hat{\phi}}{1 - \phi^0} \frac{\partial \hat{p}_f}{\partial \hat{x}} - \hat{\rho}_f \hat{g} \right),$$

$$\frac{(1 - \hat{\phi})}{1 - \phi^0} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = -a_1(\hat{\phi}) \hat{p}_e - a_2(\hat{\phi}) \frac{\partial \hat{p}_e}{\partial t},$$

$$\frac{(1 - \hat{\phi})}{1 - \phi^0} \frac{\partial \hat{p}_{tot}}{\partial \hat{x}} = -\hat{\rho}_{tot} \hat{g}.$$

Поскольку

$$\hat{v}_s \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi} \hat{v}_s) - \hat{\phi} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}},$$

то уравнение неразрывности для жидкой фазы можно привести к виду

$$\frac{1}{1 - \hat{\phi}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{1 - \phi^0} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) + \frac{1}{1 - \phi^0} \hat{\phi} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = 0.$$

Используя уравнение неразрывности для твердой фазы, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{\phi}}{1 - \hat{\phi}} \right) + \frac{1}{1 - \phi^0} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) = 0.$$

Переходя от (\hat{x}, t) к массовым лагранжевым переменным (y, t) по правилу $(1 - \phi^0(\hat{x}))d\hat{x} = dy$, $y(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} (1 - \phi^0(\eta))d\eta \in [0, 1]$ и формально заменяя y на x , приходим к следующей системе

$$\frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} + (1 - \phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{1 - \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \quad (8)$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi) \left((1 - \phi) \frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g \right), \quad (9)$$

$$(1 - \phi) \frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \quad (10)$$

$$(1 - \phi) \frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial t}. \quad (11)$$

Второе уравнение системы с учетом закона Дарси принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (k(\phi)((1-\phi) \frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g)) = 0. \quad (12)$$

Далее рассмотрим случай, когда $a_2(\phi) = 0$. Из (7) и (11) следует уравнение

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f).$$

Это уравнение можно представить в виде

$$p_{tot} - p_f = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t}, \quad (13)$$

где функция $G(\phi)$ определяется равенством

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}.$$

Уравнение (12) с учетом (10) и (13) переищем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\phi)(1-\phi) \frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (k(\phi)g(\rho_{tot} + \rho_f)). \quad (14)$$

Перейдем к безразмерным переменным $t' = \frac{t}{T}$, $x' = \frac{x}{L}$, следовательно, область изменения x' и t' есть единичный отрезок $[0,1]$, и так как $a_1(\phi) = \phi^m/\eta$, $k(\phi) = k\phi^n/\mu$, то в уравнении (14) возникнут безразмерные параметры $\lambda = k\eta/\mu L^2$ и $\varepsilon = gTL\rho_s/\eta$ и его можно представить в виде (штрихи опускаются)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\phi) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\phi^m(1-\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - b(\phi) \right), \quad (15)$$

где $a(\phi) = \phi^n(1-\phi)$, $b(\phi) = \varepsilon\phi^n(\rho_f/\rho_s + (1-\phi) + \phi\rho_f/\rho_s)$.

Для уравнения (15) рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть в исходной области в переменных Эйлера на границах берутся условия $v_s|_{x=0,x=1} = v_f|_{x=0,x=1} = 0$, тогда, учитывая (9), приходим к задаче для отыскания функций z и ϕ :

$$z = \frac{1}{\phi^m(1-\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (16)$$

$$zd(\phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\phi) \frac{\partial z}{\partial x} - b(\phi) \right) = 0, \quad (17)$$

$$(a(\phi) \frac{\partial z}{\partial x} - b(\phi))|_{x=0,x=1} = 0, \quad \phi|_{t=0} = \phi^0(x), \quad (18)$$

где $d(\phi) = \phi^m/\lambda(1-\phi)$.

3. Численное исследование. В области $Q_T = [0,1] \times [0,1]$ построим сетку с шагами $h = 1/N$, $\tau = 1/M$. Значение сеточной функции $\phi(x,t)$ в узлах сетки (x_i, t_n) будем обозначать ϕ_i^n , $i = 0, 1, \dots, N$; $n = 0, 1, \dots, M$. Уравнение (16) представим в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = z\phi^m(1-\phi),$$

аппроксимируем его двухэтапным методом Рунге – Кутты [17, с. 219].

Уравнение (17) системы аппроксимируем разностной схемой для однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами [18, с. 153]. В уравнениях (7), (8) и (9) также перейдем к безразмерным переменным $t' = \frac{t}{T}$, $x' = \frac{x}{L}$, $v'_s = \frac{v_s}{U}$, $v'_f = \frac{v_f}{U}$, $p'_f = \frac{p_f}{P}$, $U = \frac{L}{T}$, тогда уравнения для нахождения скоростей фаз и давления жидкой фазы с учетом (16) примут вид (штрихи опускаем):

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{z\phi^m}{1-\phi},$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial x} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} (v_s - v_f) - z\phi^{m-1},$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial x} = \frac{\varepsilon_1 + \lambda_1 \phi^{1-n}(v_s - v_f)}{1-\phi},$$

где $\lambda_1 = \frac{L^2 \mu}{TkP}$, $\varepsilon_1 = \frac{L\rho_f g}{P}$ – безразмерные параметры.

Рассмотрим следующие значения параметров [19, с. 563]: $\mu = 1$ Па · с, $L = 10^3$ м, $g = 10$ м/с², $T = 10^5$ с, $\rho_f = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_s = 3 \cdot 10^3$ кг/м³, $n = 3$, $m = 1$. Вязкость горной среды η принимает значения от 10^{13} Па · с до 10^{20} Па · с, проницаемость k может меняться от 10^{-19} м² до 10^{-7} м². Меняя значения этих двух величин, получим три варианта для параметров λ и ε . Численный расчет для пористости представлен на рис. 1. Когда $g = 0$, решение имеет вид $\phi = const$ и не зависит от выбора параметров λ и ε . Скорости фаз представлены на рис. 2. Давления p_f, p_s и p_{tot} построены с точностью до констант (см. рис. 3). Безразмерные параметры принимают значения $\lambda_1 = 10^4$, $\varepsilon_1 = 2,5 \cdot 10^2$. График функции $p'_e = ap_e$ представлен на рис. 4, где $a = \frac{\eta}{TP}$.

Для получения точного решения рассмотрим тестовый пример. Пусть $s = \frac{\phi}{1-\phi}$. Далее полагаем $a_1(\phi) = (1-\phi)$, тогда $\frac{\partial G}{\partial \phi} = \frac{1}{(1-\phi)^2}$, следовательно, $G = \frac{\phi}{1-\phi} = s$. Уравнение (14) запишем в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k(\phi(s))(1-\phi(s)) \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} - k(\phi(s)g(\rho_{tot} + \rho_f)))$$

и рассмотрим случай, когда величины $\psi = k(\phi(s))(1-\phi(s))$, $\omega = k(\phi(s))g(\rho_{tot} + \rho_f)$ можно

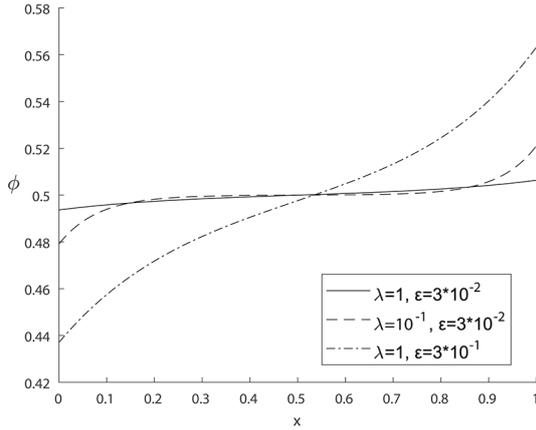


Рис. 1. Изменение пористости при $t = 1$

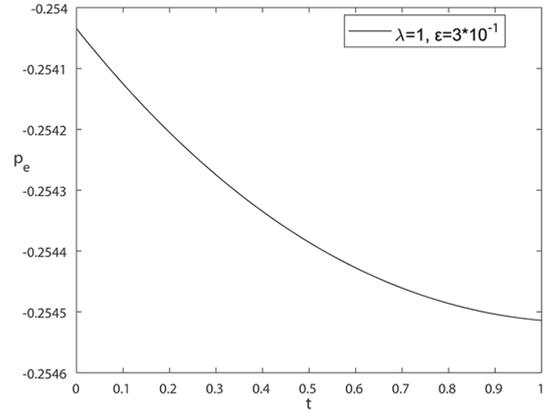


Рис. 4. Эффективное давление при $x = 1$

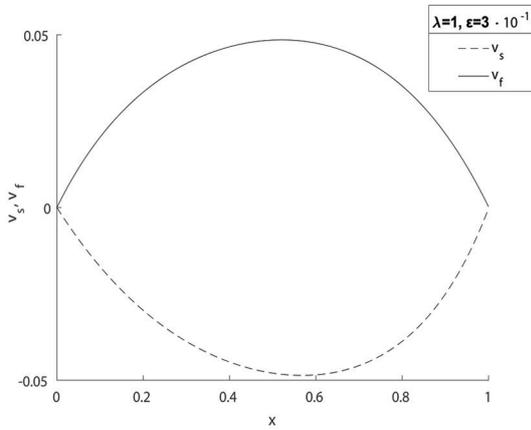


Рис. 2. Скорости жидкой и твердой фазы при $x = 1$

считать постоянными. Тогда приходим к следующей задаче

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} - \omega \right), \quad (19)$$

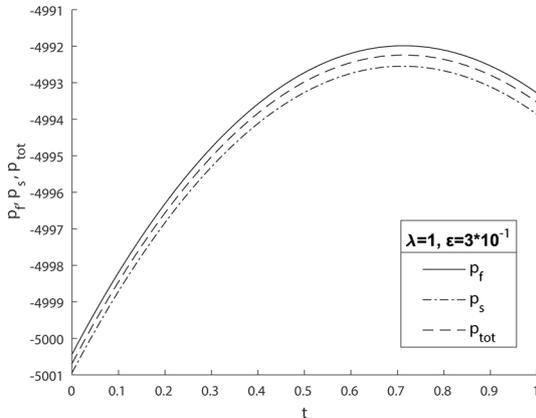


Рис. 3. Давления жидкой и твердой фаз и общее давление при $x = 1$

$$\left(\psi \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} - \omega \right) \Big|_{x=0,1} = 0, \quad s \Big|_{t=0} = s^0. \quad (20)$$

Точное решение задачи (19)–(20) имеет вид

$$s = s^0 + \frac{t \omega e^{-\frac{x}{\sqrt{\psi}}} \left(e^{\frac{2x}{\sqrt{\psi}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{\psi}}} \right)}{\left(e^{\frac{1}{\sqrt{\psi}}} + 1 \right) \sqrt{\psi}}. \quad (21)$$

Задача (19)–(20) решалась аналогично задаче (16)–(18). Численное решение с хорошей погрешностью сходится к точному решению на различных сетках.

4. Учет упругих свойств среды. Рассмотрим другой случай сведения системы типа (1)–(6) к одному уравнению высокого порядка. Далее полагаем $a_2(\phi) \neq 0$.

Проинтегрировав уравнение (12) от 0 до t , получим

$$\frac{\phi}{1 - \phi} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

где функция B имеет вид

$$B = \int_0^x \frac{\phi^0(\xi)}{1 - \phi^0(\xi)} d\xi + \int_0^t k(\phi) \left((1 - \phi) \frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g \right) d\tau.$$

Тогда

$$B_t = k(\phi) \left((1 - \phi) \frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g \right), \quad (22)$$

и с учетом (4), (10) уравнение (22) представим в виде

$$B_t = -k(\phi) \left((1 - \phi) \frac{\partial p_e}{\partial x} + g(\rho_{tot} + \rho_f) \right).$$

Выразив $\frac{\partial p_e}{\partial x}$, получим

$$-\frac{\partial p_e}{\partial x} = \frac{B_t}{k(\phi)(1 - \phi)} + \frac{g(\rho_{tot} + \rho_f)}{1 - \phi}. \quad (23)$$

Уравнение (11) с учетом (7) представим в виде

$$\frac{\phi_t}{1-\phi} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}. \quad (24)$$

Для простоты изложения ограничимся случаем $a_1(\phi) = \alpha_1\phi, a_2(\phi) = \alpha_2\phi, (\alpha_1, \alpha_2) = const$. Тогда уравнение (24) примет вид

$$\frac{\partial G_2(\phi)}{\partial t} = -\beta p_e - \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (25)$$

где

$$\frac{\partial G_2(\phi)}{\partial t} = \frac{1}{(1-\phi)a_2(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \beta = a_1(\phi)/a_2(\phi).$$

Продифференцировав уравнение (25) по x и воспользовавшись (23), получим уравнение для функции $B(x, t)$ вида

$$\frac{\partial^2 G_2(\phi)}{\partial x \partial t} = \frac{\beta B_t}{k(\phi)(1-\phi)} + \frac{g(\rho_{tot} + \rho_f)}{1-\phi} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_t}{k(\phi)(1-\phi)} + \frac{g(\rho_{tot} + \rho_f)}{1-\phi} \right),$$

где $\phi = B_x/(1 - B_x)$. Вопросам разрешимости начально-краевых задач для уравнения вида (26) посвящена книга [20].

5. Заключение. В работе проведено численное исследование одномерной нелинейной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде.

Библиографический список

1. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media // Elsevier. — New York, 1972.
2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. — Acta. — 11 (1998).
3. Morency S., Huismans R.S., Beaumont C, Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. — 112 (2007). — B10407.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М., 1987. — Ч. 1.
5. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein C.I. Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics // Nonlinearity. — 20 (2007).
6. Abourabia A.M., Hassan K.M., Morad A.M. Analytical solutions of the magma equations for molten rocks in a granular matrix // Chaos Solutions Fract. — 42 (2009).
7. Geng Y., Zhang L. Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equations // Applied Mathematics and computation. — 217 (2010).
8. Гоман В.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Численное решение двумерной задачи движения воды и воздуха в тающем снеге // Известия Алтайского государственного университета. — 2014. — № 1–2.
9. Шишмарев К.А. Теплоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых Алтайского государственного университета. — 2011. — № 8.
10. Токарева М.А., Вирц Р.А. Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде : сборник трудов Всероссийской конференции по математике. — 2016.
11. Байкин А. Н. Динамика трещины гидроразрыва пласта в неоднородной пороупругой среде: дис. ... физ.-мат. наук. — Новосибирск, 2016.
12. Dushin V.R., Nikitin V.F., Legros J.C., Silnikov M.V. Mathematical modeling of flows in porous media // WSEAS Transactions on Fluid Mechanics. — 2014. — Т. 9.
13. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Т. 722. — № 1.
14. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Т. 894. — № 1.
15. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local solvability of the system of the equation of one dimensional motion of magma // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. — 2017. — Т. 10. — № 3.

16. Токарева М.А. Конечное время стабилизации уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. — 2015. — Т. 2. — № 1.

17. Самарский А.А., Гулин А.А. Численные методы. — М., 1989.

18. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М., 1977.

19. Fowler A. Mathematical Geoscience. — Springer-Verlag London Limited, 2011.

20. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. — Новосибирск, 1983.