

Об одной модели тора

М.А. Чешкова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On a Torus Model

M.A. Cheshkova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Поверхность переноса — это поверхность, которая допускает параметризацию $r(u, v) = U(u) + V(v)$.

Поверхность переноса в E^3 можно рассматривать как параллельное перенесение одной линии вдоль другой.

В работе приводится пример тора M в E^3 , отличного от классического тора T , который получается при вращении окружности вокруг оси.

Мы рассматриваем тор M как поверхность переноса, которая получается при параллельном переносе одной окружности вдоль другой, причем окружности расположены во взаимно ортогональных пересекающихся плоскостях.

Пусть на торе M задана замкнутая кривая с помощью 4π -периодической вектор-функции.

С использованием найденной функции найдутся уравнения односторонних поверхностей. В частности, определяется уравнение листа Мебиуса, для которого краем является данная кривая.

Строится бутылка Клейна и разрезание ее на два листа Мебиуса, а также скрещенный колпак. Рассматривается инверсия торов T , M .

С помощью системы компьютерной математики строятся рассматриваемые поверхности.

Ключевые слова: поверхность переноса, тор, периодическая функция, инверсия, лист Мебиуса, бутылка Клейна, скрещенный колпак.

DOI 10.14258/izvasu(2018)1-24

1. Введение. Поверхность переноса [1, с. 315; 2, с. 130; 3; 4, с. 26] — это поверхность, которая допускает параметризацию

$$r(u, v) = U(u) + V(v).$$

Линии $U = U(u)$, $V = V(v)$ называются линиями переноса. Поверхность переноса в E^3 можно рассматривать как параллельное перенесение одной линии вдоль другой. К наиболее известным поверхностям переноса в E^3 относят эллиптический и гиперболический параболоиды и цилиндр,

The surface of parallel transfer is a surface that admits the parametrization $r(u, v) = U(u) + V(v)$. The surface of parallel transfer in E^3 can be considered as a surface produced by parallel transfer of one line along the other.

In this study the torus M is different from the classic torus T , which is obtained by rotating the circle along the axis. We consider the torus as the surface of parallel transfer obtained by parallel transfer of one circle along the other. The circles are located in mutually orthogonal intersecting planes.

The closed curve on the torus M is defined with the 4π -periodic vector-function.

Using this function, the equations of one-sided surfaces are obtained. In particular, the equation of the Mobius band with the mentioned curve being the boundary is found.

The Klein bottle is cut into two Moebius band. Also, the cross-cap is considered.

The inversion of torus T and the inversion of torus M is studied in this paper.

The studied surfaces are constructed in Euclidean space E^3 with the help of a mathematical software toolkit.

Key words: surface of parallel transfer, torus, periodic function, inversion, Klein bottle, Mobius band, cross-cap.

а в E^4 — это тор Клиффорда [4, с. 45; 5; 6]

$$r(u, v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v)).$$

Кривые переноса тора Клиффорда есть окружности, расположенные во взаимно ортогональных непесекающихся плоскостях.

2. Построение поверхности переноса.

$$r(u, v) = U(u) + V(v), u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi], \quad (1)$$

где $U = U(u)$, $V = V(v)$ есть окружности, расположенные во взаимно ортогональных пересекающихся плоскостях.

Положим

$$U(u) = (0, \cos(u), \sin(u)), V(v) = (\cos(v), \sin(v), 0).$$

Поверхность переноса (1) имеет вид

$$r(u, v) = (\cos(v), \sin(v) + \cos(u), \sin(u)), \quad (2)$$

$$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi].$$

Теорема 1.

Поверхность переноса $r(u, v) = (\cos(v), \sin(v) + \cos(u), \sin(u))$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$ определяет модель тора.

Доказательство.

Действительно,

$$r(-\pi, v) = U(-\pi) + V(v) = U(-\pi + 2\pi) + V(v) = r(\pi, v), r(u, -\pi) = U(u) + V(-\pi) = U(u) + V(-\pi + 2\pi) = r(u, \pi).$$

Имеем склейку противоположных сторон прямоугольника $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$ по точкам, лежащим на общей горизонтали, и одновременно склейку по точкам, лежащим на общей вертикали [7, с. 75].

Исследуем характер точек на поверхности M . Обычным способом [8, с. 132] определим гауссову кривизну K поверхности. Имеем

$$K = \frac{b}{g}, b = \det(b_{ij}), g = \det(g_{ij}), i, j = 1, 2,$$

$$g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle, r_1 = r_u, r_2 = r_v,$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \langle r_{ij}, [r_1, r_2] \rangle.$$

Имеем

$$K = \frac{\sin(v)\cos(u)}{g^2}, g = 1 - \sin(u)^2 \cos(v)^2. \quad (3)$$

Для параболических точек

$$\sin(v)\cos(u) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет четыре окружности $S_1 : r = r(u, 0)$, $S_2 : r = r(u, \pi)$, $S_3 : r = r(\pi/2, v)$, $S_4 : r = r(-\pi/2, v)$.

Точки касания этих окружностей

$$P_1(\pi/2, 0) = (1, 0, 1), P_2(-\pi, 0) = (1, 0, -1),$$

$$P_3(\pi/2, \pi) = (-1, 0, 1), P_4(-\pi/2, \pi) = (-1, 0, -1),$$

есть особые точки. Для них $g = 0$.

Замечаем, что

$$P_1 \in S_1, P_1 \in S_3, P_2 \in S_1, P_2 \in S_4,$$

$$P_3 \in S_3, P_3 \in S_2, P_4 \in S_3, P_4 \in S_2.$$

Для гиперболических точек

$$\sin(v)\cos(u) < 0.$$

Имеем три куска поверхности

$$G1 : u \in (\pi/2, \pi), v \in (0, \pi),$$

$$G2 : u \in (-\pi/2, \pi/2), v \in (0, \pi),$$

$$G3 : u \in (-\pi/2, \pi/2), v \in (-\pi, 0).$$

Для эллиптических точек

$$\sin(v)\cos(u) > 0.$$

Имеем три куска поверхности

$$E1 : u \in (-\pi/2, \pi/2), v \in (0, \pi),$$

$$E2 : u \in (-\pi, -\pi/2), v \in (-\pi, 0),$$

$$E3 : u \in (\pi/2, \pi), v \in (-\pi, 0).$$

На гиперболической части тора определяются две «диагональные» прямые $l_{14} = (P_1, P_4) : r = (\sin(u), 0, \sin(u))$, $l_{23} = (P_2, P_3) : r = (-\sin(u), 0, \sin(u))$.

Построим параболические, эллиптические и гиперболические точки поверхности M , прямые l_{14} , l_{23} (рис. 1, рис. 2).

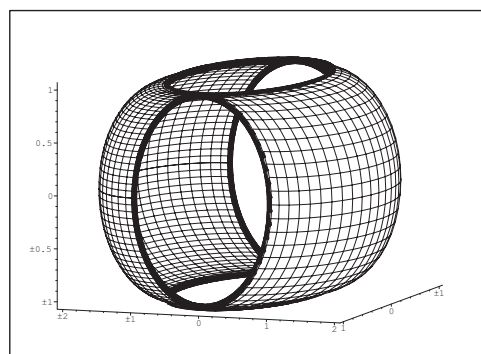
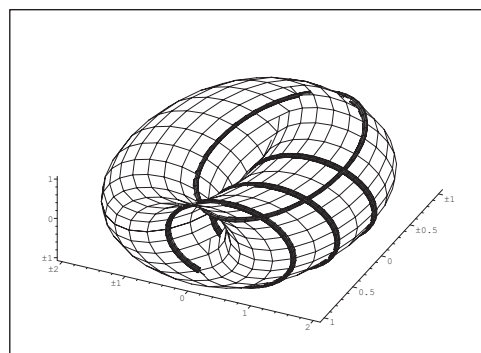


Рис. 1. Поверхность переноса M , параболические и эллиптические точки

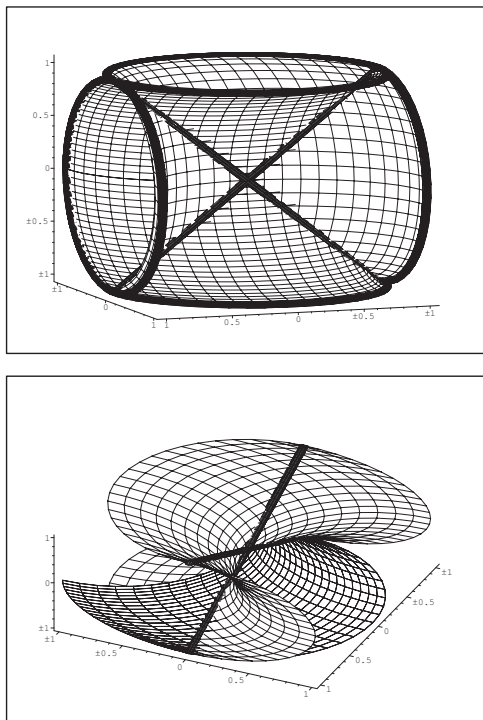


Рис. 2. Параболические и гиперболические точки, прямые l_{14} , l_{23} , фрагмент гиперболической части

Плоскость, проходящая через l_{14} ортогонально l_{23} , и плоскость, проходящая через l_{23} ортогонально l_{14} , пересекают эллиптическую часть тора по двум «диагональным» эллипсам $r = (\pm \sin(u), 2\cos(u), \sin(u)), (v = u + \pi, v = -u + \pi/2)$. Построим их (рис. 3).

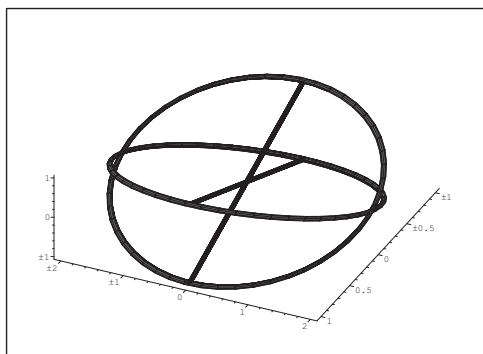


Рис. 3. Диагональные кривые на M

3. Односторонние поверхности. Рассмотрим на торе M кривую $v = \frac{u}{2}, u \in [-2\pi, 2\pi]$. Имеем обмотку тора

$$\rho(u) = (\cos(u/2), \sin(u/2) + \cos(u), \sin(u)),$$

$u \in [-2\pi, 2\pi]$.

Используя обмотку тора (рис. 4), можно построить модели односторонних поверхностей: листа Мебиуса, бутылки Клейна и проективной плоскости [4, с. 19; 4, с. 56; 4, с. 27]. Односторонние

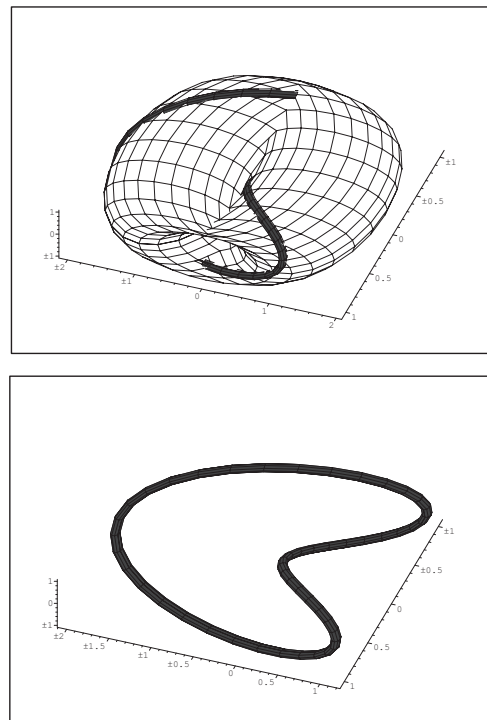


Рис. 4. Обмотка тора M

поверхности изучаются также в работах [9, с. 301; 10, с. 301; 11–18].

Вектор-функция $\rho = \rho(u)$ есть 4π -периодическая, функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi))$ есть 2π -периодическая, функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi))$ есть 2π -антипериодическая.

Имеем

$$s(u) = (0, \cos(u), \sin(u)), l(u) = (\cos(u/2), \sin(u/2), 0).$$

Лист Мебиуса. Поверхность M :

$$r(u, v) = s(u) + vl(u), u \in [-\pi, \pi], v \in [-1, 1]$$

есть модель листа Мебиуса, для которого кривая $\rho = \rho(u)$ есть край.

Построим его (рис. 5).

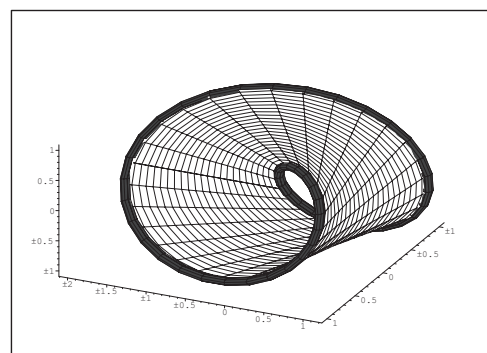


Рис. 5. Лист Мебиуса

Бутылка Клейна. Поверхность KL :

$$r(u, v) = (p + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u), p \neq \mp 1,$$

$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ определяет модель бутылки Клейна.

Бутылку Клейна можно разрезать на два листа Мебиуса. В качестве кривой разреза возьмем, например, кривую $r = r(u, \pi/3)$. Построим их (рис. 6, 7).

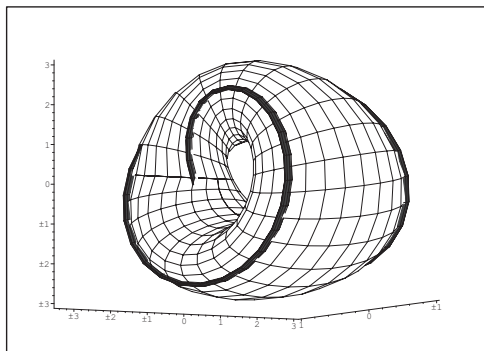


Рис. 6. Бутылка Клейна и разрез

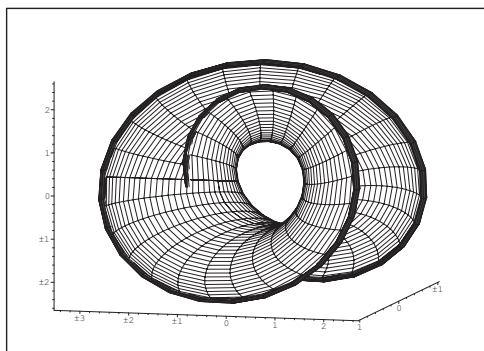
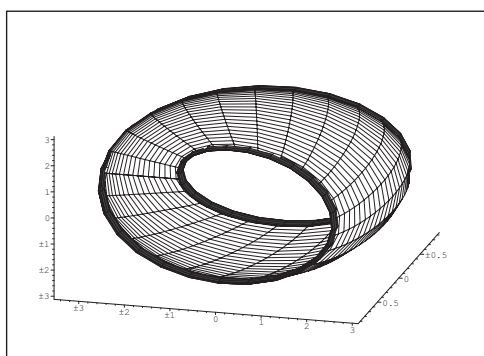


Рис. 7. Листы Мебиуса на бутылке Клейна

Скращенный колпак с крышкой. Поверхность P :

$$r(u, v) = (1 + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u),$$

$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ определяет модель проективной плоскости (скращенный колпак с крышкой).

Построим ее (рис. 8).

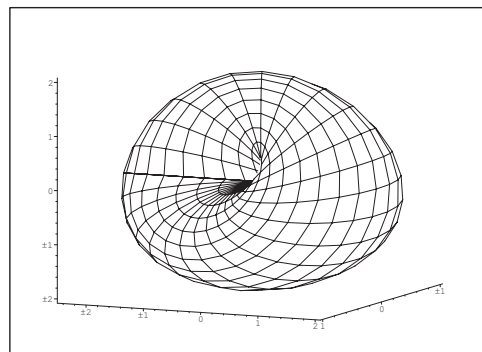


Рис. 8. Скращенный колпак с крышкой

4. Деформация тора.

Теорема 2.

Пусть вектор-функции $r_1 = r_1(u, v), r_2 = r_2(u, v)$ определяют модели тора. Тогда вектор-функции

$$r_t = tr_1(u, v) + (1 - t)r_2(u, v), t \in [0, 1], \quad (4)$$

$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ также определяют модели тора.

Доказательство.

Действительно,

$$r_t(-\pi, v) = r_t(\pi, v), r_t(u, -\pi) = r_t(u, \pi).$$

Имеем склейку противоположных сторон прямоугольника $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ по точкам, лежащим на общей горизонтали, и одновременно склейку по точкам, лежащим на общей вертикали.

Рассмотрим классический тор $T: r_2(u, v) = (2 + \cos(u))(\cos(v), \sin(v), 0) + \sin(u)(0, 0, 1)$ и $r_1 = r_1(u, v)$ — тор M .

Формула (4) определяет деформацию тора $r_1 = r_1(u, v)$ в тор $r_2 = r_2(u, v)$.

Построим деформацию T в M (рис. 9).

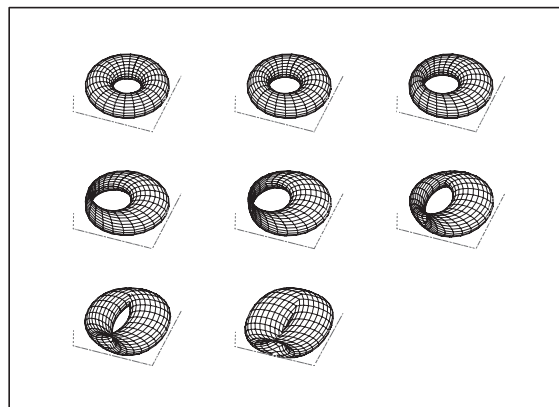


Рис. 9. Деформация T в M

5. Инверсия. Рассмотрим инверсию [19, с. 482; 20]

$$r^* - r_0 = \frac{m^2(r - r_0)}{\langle r - r_0, r - r_0 \rangle} \quad (5)$$

относительно сферы радиуса m с центром r_0 .

Положим $r_0 = (2, 0, 0), m = 2$. Инверсия тора T определяется уравнениями

$$\begin{aligned} x &= 2 + 4((2 + \cos(u))\cos(v) - 2)/ \\ &((2 + \cos(u))\cos(v) - 2)^2 + (2 + \cos(u))\sin(v)^2 + \sin(u)^2, \\ y &= 4((2 + \cos(u))\sin(v))/ \\ &((2 + \cos(u))\cos(v) - 2)^2 + (2 + \cos(u))\sin(v)^2 + \sin(u)^2, \\ z &= 4\sin(u)/ \\ &((2 + \cos(u))\cos(v) - 2)^2 + (2 + \cos(u))\sin(v)^2 + \sin(u)^2. \end{aligned}$$

Для инверсии тора M положим $r_0 = (2, 0, 2), m = 4$. Имеем

$$\begin{aligned} x &= 2 + 16(\cos(v) - 2)/ \\ &((\cos(v) - 2)^2 + (\sin(v) + \cos(u))^2 + (\sin(u) - 2)^2), \\ y &= 16(\sin(v) + \cos(u))\sin(v)/ \\ &((\cos(v) - 2)^2 + (\sin(v) + \cos(u))^2 + (\sin(u) - 2)^2), \\ z &= 2 + 16(\sin(u) - 2)/ \\ &((\cos(v) - 2)^2 + (\sin(v) + \cos(u))^2 + (\sin(u) - 2)^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Остановимся подробнее на этом случае. Рассмотрим диагональные прямые и их инверсию. Прямая $l_{13} = (P_1, P_3)$ определяется уравнениями $x = z, y = 0$, или $v = u - \pi/2, r = (\sin(u), 0, \sin(u))$. Центр инверсии $r_0 = (2, 0, 2)$ принадлежит этой прямой, но не отрезку $u \in [-\pi, \pi]$. Из (6) имеем $r = (2 + \frac{8}{\sin(u)-2}, 0, 2 + \frac{8}{\sin(u)-2})$. Имеем отрезок прямой l_{13} (рис. 10).

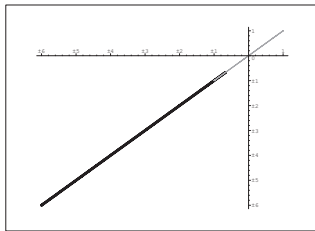


Рис. 10. Отрезок прямой l_{13} и его инверсия

Прямая $l_{24} = (P_2, P_4)$ определяется уравнениями $x = -z, y = 0$, или $u = -v - \pi/2, r = (\cos(v), 0, -\cos(v))$. Центр инверсии $r_0 = (2, 0, 2)$ не принадлежит этой прямой. Уравнения (6) примут вид

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{16(\cos(v) - 2)}{(\cos(v) - 2)^2 + (\cos(v) + 2)^2}, y = 0, \\ z &= 2 + \frac{16(\cos(v) - 2)}{(\cos(v) - 2)^2 + (\cos(v) + 2)^2}. \end{aligned}$$

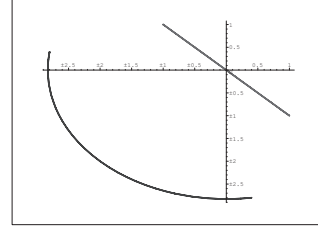


Рис. 11. Отрезок прямой l_{24} и его инверсия

Имеем часть окружности $x^2 + z^2 = 8, y = 0$ (рис. 11).

Построим инверсию окружностей $S1, S2, S3, S4$ (параболические точки тора M). Обозначим их соответственно через $IS1, IS2, IS3, IS4$. Полагая в формуле (6) $v = 0, v = \pi, u = \pi/2, u = -\pi/2$, определим уравнения $IS1, IS2, IS3, IS4$. Имеем $S1 : r = (\frac{2(1+2\sin(u))}{-3+2\sin(u)}, \frac{-8\cos(u)}{-3+2\sin(u)}, \frac{-2(-5+2\sin(u))}{-3+2\sin(u)})$,

$$S2 : r = (\frac{2(5+2\sin(u))}{-7+2\sin(u)}, \frac{-8\cos(u)}{-7+2\sin(u)}, \frac{-2(-1+2\sin(u))}{-7+2\sin(u)}),$$

$$S3 : r = (\frac{-2(-5+2\cos(v))}{-3+2\cos(v)}, \frac{-8\sin(v)}{-3+2\cos(v)}, \frac{2(1+2\cos(v))}{-3+2\cos(v)}),$$

$$S4 : r = (\frac{-2(-1+2\cos(v))}{-7+2\cos(v)}, \frac{-8\sin(v)}{-7+2\cos(v)}, \frac{2(5+2\cos(v))}{-7+2\cos(v)}).$$

Построим их (рис. 12).

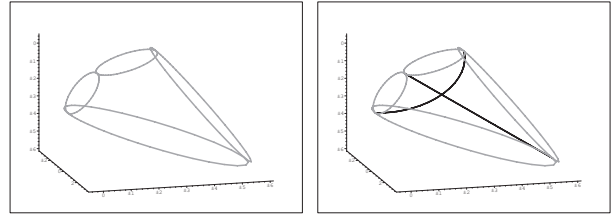


Рис. 12. Кривые $IS1, IS2, IS3, IS4, l_{13}, l_{24}$

Построим тор T (темный) и его инверсию для $r_0 = (2, 0, 0), m = 2$, тор M (темный) и его инверсию для $r_0 = (2, 0, 2), m = 4$ (рис. 13).

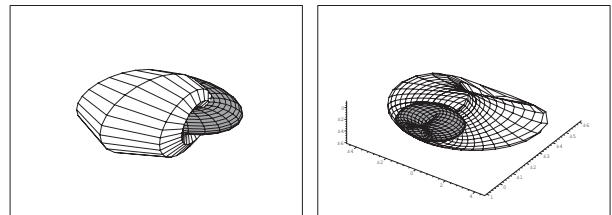


Рис. 13. Инверсия торов

Теорема 3.

Если тор не проходит через центр инверсии, то инверсия тора есть тор.

Доказательство.

Функция $r = r(u, v)$ в (5) удовлетворяет условию склейки $r(-\pi, v) = r(\pi, v)$, $r(u, -\pi) = r(u, \pi)$. По условию теоремы $f(u, v) = \langle r - r_0, r - r_0 \rangle \neq 0$.

Имеем

$$f(-\pi, v) = f(\pi, v), f(u, -\pi) = f(u, \pi),$$

$$r^*(-\pi, v) = r^*(\pi, v), r^*(u, -\pi) = r^*(u, \pi).$$

Таким образом, инверсия тора есть тор.

Так как тор T не проходит через центр инверсии $r_0 = (2, 0, 0)$, и тор M не проходит через центр инверсии $r_0 = (2, 0, 2)$, то инверсия тора T есть тор и инверсия тора M есть также тор.

Библиографический список

1. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. — М., 1963.
2. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М., 2006.
3. Кондрашов А.Н. Минимальные поверхности переноса в псевдоевклидовом пространстве // Межд. конференция-школа по геометрии и анализу, Новосибирск, 9–20 сентября 2002. — Новосибирск, 2002.
4. Чешкова М.А. Односторонние поверхности. — Барнаул, 2016.
5. Фоменко В.Т. Бесконечно малые ARG-деформации тора Клиффорда в E^4 // Вестник ТГПИ, Естественные науки. — 2007. — № 1.
6. Taimanov L.A. Finite-cap theory of the Clifford torus // International Mathematics Research Notices. — 2005. — № 2.
7. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. — М., 1995.
8. Поздняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. — М., 1990.
9. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. — 2007. — Т. 71, № 5.
10. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М., 1981.
11. Борисюк А.Р. Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Общий случай // Математический сборник. — 2005. — Т. 196. № 4.
12. Набеева Л.Р. Классификация узлов в утолщенной бутылке Клейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. — 2012. — № 26 (280).
13. Карпухин М.А. Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна // Математический сборник. — 2013. — Т. 204, № 12.
14. Журавлев В.Г. Множества ограниченного остатка на двулистной накрывающей бутылке Клейна // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 2014. — Т. 429, № 29.
15. Немировский С.Ю. Гомологический класс лагранжевой бутылки Клейна // Известия РАН. Сер. математическая. — 2009. — Т. 73, № 4.
16. Шевчишин В.В. Лагранжевы вложения бутылки Клейна и комбинаторные свойства группы классов отображений // Известия РАН. Сер. математическая. — 2009. — Т. 73, № 4.
17. Козлов И.К. Классификация лагранжевых расслоений // Математический сборник. — 2010. — Т. 201, № 11.
18. Шалагинов М.Ю., Иванов М.Г., Долгополов М.В. Задачи с оператором Лапласа на топологических поверхностях // Вестник Самарского гос. техни. ун-та. Сер.: Физико-математические науки. — 2011. — № 2.
19. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. — М., 1966.
20. Чешкова М.А. Пример инверсии бутылки Клейна // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — Барнаул, 2016. — Вып. 2.