УДК 517.5

О применении одного класса интегральных штрафных функций при решении вариационных задач

Т.В. Саженкова[1], *А.Н. Саженков*[1], *Е.А. Плотникова*[2]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Новосибирский государственный технический университет (Новосибирск, Россия)

Application of One Class of Penalty Functions for Solving Variation Problems

T.V. Sazhenkova[1], *A.N. Sazhenkov*[1], *E.A. Plotnikova*[2]

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Novosibirsk State Technical University (Novosibirsk, Russia)

Применение методов штрафных функций при решении нелинейных экстремальных задач с ограничениями позволяет использовать методы безусловной оптимизации. В этом направлении хорошо известны работы таких авторов, как А. Фиакко, Г. Мак-Кормик, Ж. Сеа, Э. Полак, И.И Ерёмин, Б.Т. Поляк и др. Наиболее полно в литературе представлены исследования вопросов сходимости метода штрафных функций для задач выпуклого программирования с конечным числом ограничений. При этом рассматривается вполне определенный круг функций в качестве штрафных. Для сведения численного решения задачи минимизации нелинейного выпуклого функционала на выпуклом замкнутом множестве в пространстве Соболева к решению экстремальной задачи на всем пространстве предлагается использовать класс интегральных штрафных функций, введенный в работах А.А. Каплана.

В данной работе проводится исследование интегральных штрафных функций в сравнении с результатами исследований для случая конечного числа ограничений. С использованием применяемых в этих исследованиях методов доказывается теорема, предоставляющая оценку скорости сходимости метода штрафов с интегральными штрафными функциями. Полученные результаты могут быть применены при численном исследовании задач данного вида.

Ключевые слова: минимизация квадратичного функционала, интегральные штрафные функции, выпуклое программирование.

DOI 10.14258/izvasu(2018)1-22

Application of penalty function methods for non-linear constrained extremum problems allows using unconstrained optimization methods. In this direction, the works of such authors as A.V. Fiacco, G.P. McCormick, J. Cea, E. Polak, I.I. Eremin, B.T. Polyak and others are well known. Investigation of the penalty function method convergence for convex programming problems with a finite number of constraints is the most complete in the literature. In this case, a completely defined range of functions is considered as a penalty.

We consider the minimization problem of non-linear convex functional on the convex closed set of Sobolev spaces. To solve this problem, one class of integral penalty functions introduced in papers by A.A. Kaplan is used. This leads to extremum problem on the whole Sobolev space. The estimation of convergence rate of the penalty method with integral penalty functions is obtained by generalizing the investigation methods for the case of a finite number of restrictions on the case of integral penalty functions. The obtained results can be used in numerical studies of similar problems.

Key words: quadratic functional minimization, integral penalty functions, convex programming.

Введение. Пусть D — область в пространстве R^2, Γ — кусочно-гладкая граница D, пространство $V = H_0^1(D)$ — пространство Соболева, т. е.

$$V = \left\{ u(x_1, x_2) \,\middle|\, u(x_1, x_2) \in L^2(D), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(D), i = 1,2,\ u = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma \right\},$$

$$K = \left\{ u(x_1, x_2) \,\middle|\, u(x_1, x_2) \in V, \left|\operatorname{grad} u(x_1, x_2)\right| \le 1 \text{ почти всюду в } D \right\}.$$

Подмножество K является выпуклым замкнутым множеством пространства V.

В работе рассматривается задача минимизации на K функционала

$$I(u) = \iint_D \Big(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv\Big) dx_1 dx_2 - 2\iint_D f u dx_1 dx_2,$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2) = a_{ji}(x_1, x_2) \in L^\infty(D)$,

$a_0 = a_0(x_1, x_2) \ge 0$ почти всюду в D, $f = f(x_1, x_2) \in L^2(D)$.

Здесь билинейная форма

$a(u,v) = \iint_D \Big(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv\Big) dx_1 dx_2$ является непрерывной на V, удовлетворяющей условию $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_1, x_2)\varepsilon_i\varepsilon_j \ge \gamma\|\varepsilon\|^2$, $\gamma > 0$ почти всюду в D для любого $\varepsilon \in R^2$. Данное условие дает для функционала $I(u)$ выполнение следующего неравенства:

$$I(u_1) - I(u_2) \ge \gamma\|u_1 - u_2\|^2.$$

Оператор, отвечающий представленной билинейной форме, обозначим A, таким образом, $a(u,v) = (Au, v)$. Тогда задача минимизации функционала $I(u)$ на K равносильна задаче упруго-пластичности [1]:

$Au = f$ в D_-,

$\left|\operatorname{grad} u(x_1, x_2)\right| = 1$ в D_1,

где $D_- = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, \left|\operatorname{grad} u(x_1, x_2)\right| < 1\right\}$,

$D_1 = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, \left|\operatorname{grad} u(x_1, x_2)\right| = 1\right\}$,

а функции $u(x_1, x_2)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2)$, $i = 1,2$ — «непрерывны» на кривой, разделяющей D_- и D_1. Здесь D_- является областью упругости, D_1 — областью пластичности, в них выполняются разные по сути уравнения. Условия $\left|\operatorname{grad} u(x_1, x_2)\right| \le 1$ и $\left\{u(x_1, x_2) = 0 \text{ на } \Gamma\right\}$ для правильного многоугольника D эквивалентны условию $u(x_1, x_2) \le \varphi(x_1, x_2)$, где функция $\varphi(x_1, x_2)$ является решением задачи $\big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\big)^2 + \big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\big)^2 = 1$, $\varphi(x_1, x_2) = 0$ на Γ. Поэтому для правильного многоугольника решение исходной задачи может быть сведено к решению вариационно-разностной задачи на неотрицательной четверти R_+^2 [2].

Для произвольной выпуклой области D с кусочно-гладкой границей задачу минимизации функционала $I(u)$ на K предлагается решать методом штрафов с использованием следующих интегральных функций штрафа: $\Phi_k^{(t)}(u) = A_k \iint_D \Big(g(u) + \sqrt{g^2(u) + A_k^{-2-t}}\Big) dx_1 dx_2$, где $t \ge 0$ — константа, $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $g(u) = \left|\operatorname{grad} u(x_1, x_2)\right|^2 - 1$.

Эти функции введены в рассмотрение А.А. Капланом [2]. Для их применения к различным задачам и допустимым множествам, естественно, требуется обсуждение возможности использования их в качестве штрафных, а также вопросов сходимости.

Случай конечного числа ограничений. В работах [3–7] представлены исследования вопросов сходимости методов штрафных функций в применении к задаче минимизации выпуклой функции f на компакте $K \subset R^n$, задаваемом системой неравенств $g_j(x) \le 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$ с выпуклыми функциями g_j, в предположении, что существует точка x_0, в которой $g_j(x_0) < 0$ для всех j (не пустая внутренность K). При этом в [3–5] рассматриваются штрафные функции типа срезки, обратная, логарифмическая и показательная штрафные функции, а в работах [6, 7] для решения поставленной задачи методом штрафов А.А. Капланом вводятся в рассмотрение функции:

$\Phi_k^{(t)}(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} \Big(g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2-t}}\Big)$, $t \ge 0$ — константа, $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$.

(Аналогом этих функций и являются интегральные штрафные функции.) В работах [8–10], с опорой на предшествующие результаты и методы исследований [3–6], установлена справедливость двух следующих теорем.

Теорема 1. Система функций:

$$\Phi_k^{(t)}(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} \left(g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2-t}} \right), \quad t \geq 0 \quad —$$

константа, $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ обладает свойствами:

1. $\Phi_k^{(t)} : R^n \to R$ — выпуклые функции.

2. $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k^{(t)}(x) = 0$, если $x \in \operatorname{int} K$.

3. $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k^{(t)}(x) = +\infty$, если $x \notin K$.

4. Начиная с некоторого номера функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k^{(t)}(x)$ достигают своего безусловного минимума, последовательность $\{x^k\}$ точек минимума функций F_k ограничена, любая ее предельная точка принадлежит множеству K и доставляет минимум f на K.

Приведенная теорема говорит о принадлежности рассматриваемого класса функций к внешним штрафным функциям для задачи минимизации выпуклой функции на компакте, задаваемом системой неравенств с выпуклыми функциями. Следующая далее теорема представляет оценку скорости сходимости метода штрафов для данного класса штрафных функций при $t > 0$.

Теорема 2. Если функции $f \in C^2(R^n)$, $g_j \in C^1(R^n)$, $j = 1, 2, ..., m$, $(f''(x)\varepsilon, \varepsilon) \geq \gamma \|\varepsilon\|^2$ при некотором $\gamma > 0$ и любых x и ε, тогда для $t > 0$ $\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{2m}{\gamma} A_k^{-\frac{t}{2}}$ начиная с некоторого номера k (x^* — точное решение исходной задачи).

Интегральные функции штрафа. Основываясь на результатах и алгоритмах работ [7–10], для рассматриваемых интегральных функций достаточно просто можно проследить удовлетворение их условиям принадлежности к штрафным функциям и установить справедливость следующей теоремы сходимости последовательности приближенных решений.

Теорема 3. При реализации метода штрафов для решения задачи минимизации функционала $I(u)$ на K с использованием системы интегральных штрафных функций начиная с некоторого номера выполняется следующая оценка скорости сходимости метода:

$$\left\|u^k - u^*\right\|^2 \leq \frac{A_k^{\tau-1}}{\gamma\sigma} \left(I(u^0) - I(u^*) \right) + \frac{mesD}{2\gamma} A_k^{-\tau-t}, \text{ где}$$

u^0 удовлетворяет условиям $\left|g(u^0)\right| \geq \sigma > 0$, $u^0 \in K$, γ — параметр сильной выпуклости функционала $I(u)$, τ — фиксированное число из интервала (0, 1), u^* — точное решение задачи.

Доказательство. Пусть u^k есть решение экстремальной задачи $I(u) + \Phi_k^{(t)}(u) \to \min$. Для достаточно больших k имеет место $u^k \in K$ и $\lambda_k = \frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma} < 1$. Используя выпуклость $g(u)$ и соотношение $\left|g(u)\right| \geq \sigma > 0$, получаем $g\left(u(\lambda_k)\right) \leq \lambda_k g(u^0) + (1 - \lambda_k) g(u^*) \leq A_k^{\tau-1}$, где $u(\lambda_k) = \lambda_k u^0 + (1 - \lambda_k) u^*$, $u^* \in K$. Соответствующие свойства интеграла и функций, из которых формируется $\Phi_k^{(t)}(u)$, дают справедливость следующих неравенств:

$$\Phi_k^{(t)}(u(\lambda_k)) = A_k \iint\limits_D \left(\sqrt{g^2(u(\lambda_k)) + A_k^{-2-t}} - \left|g(u(\lambda_k))\right| \right) dx_1 dx_2 =$$

$$= A_k^{-1-t} \iint\limits_D \left(\sqrt{g^2(u(\lambda_k)) + A_k^{-2-t}} + \left|g(u(\lambda_k))\right| \right)^{-1} dx_1 dx_2 \leq$$

$$\leq A_k^{-1-t} \iint\limits_D \left(\sqrt{A_k^{2(\tau-1)} + A_k^{-2-t}} + A_k^{\tau-1} \right)^{-1} dx_1 dx_2 \leq \frac{mes(D) \cdot A_k^{-\tau-t}}{2}.$$

Теперь, воспользовавшись выпуклостью функционала, получаем

$$I(u^k) + \Phi_k^{(t)}(u^k) \leq I(u(\lambda_k)) + \Phi_k^{(t)}(u(\lambda_k)) \leq$$

$$\leq \frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma} I(u^0) + \left(1 - \frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma} \right) I(u^*) + \frac{mes(D) \cdot A_k^{-\tau-t}}{2}.$$

Опуская среднюю часть этого двойного неравенства, поскольку $\Phi_k^{(t)}(u^k) \geq 0$ и $I(u_1) - I(u_2) \geq \gamma \left\|u_1 - u_2\right\|^2$, приходим к искомой оценке:

$$\gamma \left\|u^k - u^*\right\|^2 \leq I(u^k) - I(u^*) \leq \frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma} \left(I(u^0) - I(u^*) \right) + \frac{mes(D) \cdot A_k^{-\tau-t}}{2}.$$

Здесь остается только поделить на $\gamma > 0$.

Замечание. Полученные результаты носят теоретический характер и могут служить основой для соответствующего продвижения в численном исследовании задач данного вида.

Библиографический список

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения краевых нелинейных задач / пер. с франц. — М., 1972.

2. Каплан А.А. О некоторых приложениях программирования к решению нелинейных краевых задач // Вариационно-разностные методы математической физики. — Новосибирск, 1973.

3. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / пер. с англ. — М., 1972.

4. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / пер. с франц. — М., 1973.

5. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / пер. с англ. — М., 1974.

6. Каплан А.А. К вопросу о реализации метода штрафов. — Новосибирск, 1976.

7. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. — Новосибирск, 1981.

8. Пронь С.П., Саженкова Т.В. О численном исследовании одного класса штрафных функций // Вестник АлтГПА: Естественные и точные науки. — 2010. — № 2.

9. Карпова И.С., Саженкова Т.В. О применении некоторых классов штрафных функций в решении нелинейных задач с ограничениями // Сборник трудов молодых ученых АлтГУ. — 2015. — Вып. 12.

10. Гончарова А.В., Саженкова Т.В. Применение штрафных функций в решении экстремальных задач с ограничениями // МАК 2016 : сборник трудов всероссийской конференции по математике. — Барнаул, 2016.