УДК 514.764.2

О солитонах Риччи на 3-симметрических лоренцевых многообразиях*

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Ricci Solitons on 3-Symmetric Lorentzian Manifolds

D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, I.V. Ernst

Altai State University (Barnaul, Russia)

Важным обобщением уравнения Эйнштейна на (псевдо)римановых многообразиях является уравнение солитона Риччи, которое впервые было рассмотрено Р. Гамильтоном. Задача нахождения солитонов Риччи является сложной, и ее решение становится возможным при ограничениях либо на строение многообразия, либо на размерность, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи. Решение уравнения солитона Риччи сводится к решению системы уравнений в частных производных при наличии на многообразии специальной системы координат. На лоренцевых многообразиях Уокера, т.е. псевдоримановых многообразиях, допускающих гладкое параллельное распределение изотропных векторов, имеется специальная система координат Бринкмана, что дает возможность исследовать уравнение солитона Риччи на них. Геометрия многообразий Уокера исследовалась в работах многих математиков. В настоящей статье рассмотрено уравнение солитона Риччи на неразложимых 3-симметрических лоренцевых многообразиях, которые являются многообразиями Уокера. Класс неразложимых 3-симметрических лоренцевых многообразий Уокера был исследован Д.В. Алексеевским, А.С. Галаевым, которые построили на них локальную систему координат Бринкмана. В данной работе доказана локальная разрешимость уравнения солитона Риччи на неразложимых 3-симметрических лоренцевых многообразиях произвольной размерности. Эти исследования продолжают исследования авторов и К. Онды, В. Батата уравнения солитонов Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях.

Ключевые слова: солитон Риччи, многообразие Уокера, лоренцево многообразие, k-симметрическое многообразие, система коодинат.

An important generalization of Einstein equations on (pseudo)Riemannian manifolds is the Ricci soliton equation which was first discussed by R. Hamilton. The solving of the Ricci soliton equation becomes possible when there are some restrictions on the structure of the manifold, or the dimension, or the class of metrics, or a class of vector fields, which appears in the Ricci soliton equation. If there is a special coordinate system, then the problem of solving the Ricci soliton equation reduces to solving a system of PDE's. There are Brinkman coordinates on Lorentzian Walker manifolds, which are Lorentzian manifolds with a parallel (in terms of Levi-Civita) distribution of isotropic lines. This fact allows one to investigate the Ricci soliton equation on these manifolds. The geometry of Walker manifolds and Ricci solitons on them were studied by many mathematicians. In this paper, we investigate the Ricci soliton equation on 3-symmetric indecomposable Lorentzian manifolds. These manifolds have been studied by D.V. Alekseevskii and A.S. Galaev, who have built a special local coordinate system. This article continues the authors' study and the study of K. Honda and B. Batat, who have investigated Ricci solitons on 2-symmetric Lorentzian manifolds.

Key words: Ricci soliton, Walker manifold, Lorentzian manifold, k-symmetric manifold, coordinate system.

DOI 10.14258/izvasu(2018)1-21

1. Введение. Уравнение солитона Риччи является обобщением уравнения Эйнштейна, впервые данный термин был введен Р. Гамильтоном (см. [1, 2]). В общем случае задача исследования и классификации солитонов Риччи является достаточно сложной, и поэтому она рассматривается при некоторых ограничениях на многообразие (см. [3–5]). К числу многообразий с такими ограничениями относятся k-симметрические лоренцевы многообразия, которые были исследованы Д.В. Алексеевским, А.С. Галаевым. В данной работе рассматривается уравнение солитона Риччи на 3-симметрических лоренцевых многообразиях. Показана разрешимость уравнения в произвольной размерности. Приведена схема получения общего решения.

2. Основные определения. *Псевдоримановым многообразием* называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется *лоренцевым многообразием.*

Полное (псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется многообразием Эйнштейна, если тензор Риччи r удовлетворяет уравнению Эйнштейна:

$$r = \Lambda \cdot g$$

для некоторой константы $\Lambda \in \mathrm{R}$.

Полное (псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если тензор Риччи r удовлетворяет уравнению солитона Риччи:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g,$$

где $\Lambda \in \mathrm{R}$, $L_X g$ — производная Ли метрики g в направлении полного дифференцируемого векторного поля X.

Важный класс псевдоримановых многообразий, на которых возникают солитоны Риччи — *многообразия Уокера* ([6, 7]) — псевдоримановы многообразия, обладающие гладким параллельным (в смысле связности Леви — Чивита) распределением изотропных прямых. 3-симметрические лоренцевы многообразия также являются многообразиями Уокера. На любом многообразии Уокера $(\mathcal{M}, g)$ можно локально ввести систему координат $(v, x^1, ..., x^n, u)$ так, что метрика g примет вид

$$g = 2dvdu + h + 2Adu + H(du)^2, \tag{1}$$

где $h = h_{ij}(x^1, ..., x^n, u)dx^i dx^j$ — u-параметическое семейство римановых метрик, $A = A_i(x^1, \dots, x^n, u)dx^i$ – u-параметрическое семейство 1-форм, H — локальная функция на M. Векторное поле ∂_v определяет параллельное распределение изотропных прямых.

Среди многообразий Уокера отдельный подкласс образуют многообразия с метриками *pp-волн*, которые локально задаются уравнением 1 при $A = 0$, $h = \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$, и $\partial_v H = 0$, т.е.

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + H(x^1, \dots, x^n, u)(du)^2.$$

Метрики pp-волн в случаях, когда функция H является квадратичной на $\mathbb{R}^n$:

$$H(u, x^1, \dots, x^n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u)x^i x^j,$$

называют *плоскими волнами.*

Псевдориманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется симметрическим порядка k, если

$$\nabla^k R = 0, \quad \nabla^{k-1} R \neq 0,$$

где $k \geq 1$ и R – тензор кривизны (M, g).

3. Система координат. Для римановых многообразий из условия $\nabla^k R = 0$ вытекает $\nabla R = 0$. Однако псевдоримановы k-симметрические пространства существуют при всех $k \geq 2$.

Солитоны Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях существуют при любом Λ (см. [8]). Оказывается, что таким же свойством обладают все локально неразложимые 3-симметрические лоренцевы многообразия.

Для изучения уравнения солитона Риччи на 3-симметрическом лоренцевом многообразии используется специальная система координат, построенная А.С. Галаевым в работе [9]:

Теорема. *Локально неразложимое лоренцево многообразие $(\mathcal{M}, g)$ размерности $n + 2 \geq 4$ является 3-симметрическим в том и только в том случае, если оно локально является pp-волной специального вида, то есть в окрестности каждой точки можно ввести координаты $v, x^1, ..., x^n, u$ так, что*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + H(du)^2,$$

$$H = (H_{2ij}u^2 + H_{1ij}u + H_{0ij})x^i x^j,$$

где H_{2ij}, H_{1ij} и H_{0ij} — вещественные симметричные матрицы, матрица H_{2ij} — невырожденная диагональная.

4. Уравнение солитона Риччи в координатах. Доказательство разрешимости. Нами доказана

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта 1148).

Теорема. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — локально неразложимое 3-симметрическое лоренцево многообразие размерности $n+2 \geq 4$. Уравнение солитона Риччи 2. на многообразии $(\mathcal{M}, g)$ имеет решение для любой константы Λ.*

Доказательство. Вначале выпишем уравнение солитона Риччи для произвольных pp-волн. Пусть X — векторное поле на $\mathcal{M}$ с координатами $V(v, x^i, u)$, $X_j(v, x^i, u)$, $U(v, x^i, u)$, где V, X_j, U — гладкие функции. Уравнение солитона Риччи в специальной системе координат Бринкмана для pp-волн принимает вид:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2U_v & = & 0 \\ U_{x^j} + X_{j,v} & = & 0 \\ U_u + V_v & = & \Lambda \\ 2X_{j,x^j} & = & \Lambda \\ X_{j,x^i} + X_{i,x^j} & = & 0 \\ HU_{x^j} + X_{j,u} + V_{x^j} & = & 0 \\ -\frac{1}{2}\Delta H + 2U_uH + 2V_u + UH_u + & & \\ + \sum_{j=1}^{n} X_j H_{x^j} & = & \Lambda H \end{array}\right. \qquad (2)$$

Далее мы находим частное решение, используя вид функции H:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = (V, X_j, U), \\ V = \Lambda v + \frac{u^3}{6}\sum H_{2ii} + \frac{u^2}{4}\sum H_{1ii} + \frac{u}{2}\sum H_{0ii}, \\ X_j = \frac{\Lambda x^j}{2}, \\ U = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

5. Общее решение. Поскольку два векторных поля, удовлетворяющих уравнению солитона Риччи при фиксированной константе Λ, отличаются на поле Киллинга, для описания общего решения уравнения солитона Риччи возможно использовать общий вид решения уравнений полей Киллинга для pp-волн.

Пусть X — векторное поле на $\mathcal{M}$ с координатами $V(v, x^i, u)$, $X_j(v, x^i, u)$, $U(v, x^i, u)$, где V, X^j, U — гладкие функции.

Уравнение киллингова поля в системе координат Бринкмана имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2U_v & = & 0 \\ U_{x^j} + X_{j,v} & = & 0 \\ U_u + V_v & = & 0 \\ 2X_{j,x^j} & = & 0 \\ X_{j,x^i} + X_{i,x^j} & = & 0 \\ HU_{x^j} + X_{j,u} + V_{x^j} & = & 0 \\ 2U_uH + 2V_u + X_jH_{x^j} + UH_u & = & 0 \end{array}\right. \qquad (3)$$

В работе [10] найдены решения уравнения Киллинга для pp-волн: если $(\mathcal{M}, g)$ – неразложимая pp-волна, то X – киллингово векторное поле в том и только в том случае, если

$$X = (c - av - \dot{\Psi}^\top \cdot x)\partial v + (\Psi + F \cdot x)^i\, \partial x^i + (au + b)\partial u, \qquad (4)$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $a, b, c \in \mathrm{R}$, $F \in so(n)$ – постоянные, и $\Psi \in C^\infty(\mathrm{R}, \mathrm{R}^n)$ – решение уравнения

$$\ddot{\Psi}^\top \cdot x - grad(H)^\top (\Psi + F \cdot x) - (au + b)\dot{H} - 2aH = 0. \qquad (5)$$

Для произвольных 3-симметрических многообразий размерности n общее решение уравнения солитона Риччи выписывается громоздко, однако в малых размерностях данная схема позволяет выписать общее решение явно.

6. Заключение. В результате проведенных исследований доказана локальная разрешимость уравнения солитона Риччи на 3-симметрических лоренцевых многообразиях. Данные результаты продолжают авторские исследования [8] по существованию солитонов Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях.

Библиографический список

1. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. — 1988. — V. 71.

2. Hamilton R.S. Three manifolds with positive Ricci curvature // J. Diff. Geom. — 1982. — V. 17.

3. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. — 2010. — V. 11.

4. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — V. 14.

5. Lauret J. Ricci soliton solvmanifolds // Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik. — 2011. — V. 650.

6. Walker A.G. On parallel fields of partially null vector spaces // Quart. J. Math., Oxford Ser. — 1949. — V. 20.

7. M. Brozos-Vázquez, E. Garcı́a-Rı́o, P.Ǵilkey, S.Ńikcevic and R.V́azquez-Lorenzo. The geometry of Walker manifolds. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics // Morgan & Claypool Publ. — 2009.

8. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 2-симметрических четырехмерных лоренцевых многообразиях // Изв. Алт. гос. ун-та, 2017. — № 4.

9. Galaev A.S. Classification of third-order symmetric Lorentzian manifolds // Classical Quantum Gravity. — 2015. — V. 32, No. 2.

10. Globke W., Leistner T. Locally homogeneous pp-waves // Journal of Geometry and Physics. — 2016. — V. 108.