УДК 514.764.2

Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля*

С.В. Клепикова, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Locally Homogeneous Pseudo-Riemannian 4-Manifolds with Isotropic Weyl Tensor

S.V. Klepikova, O.P. Khromova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Изучению конформно плоских (псевдо)римановых многообразий, т.е. многообразий с тривиальным тензором Вейля, посвящены работы многих математиков. Кроме того, можно рассматривать многообразия, тензор Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам он не является нулевым. Такие многообразия называют многообразиями с изотропным тензором Вейля.

В случае римановой метрики квадрат длины тензора в некотором ортонормированном базисе представляет собой сумму квадратов всех компонент и равен нулю, только если сам тензор тривиален. Поэтому естественно рассматривать лишь случай псевдоримановой метрики. В случае размерности 3 тензор Вейля тривиален и его аналогом является тензор Схоутена — Вейля (также известный как тензор Коттона). В работе Е.Д. Родионова, В.В. Славского, Л.Н. Чибриковой тензор Схоутена — Вейля был исследован для левоинвариантной лоренцевой метрики на трехмерных группах Ли, в т.ч. решена задача о его изотропности.

В данной работе приведены результаты по исследованию четырехмерных локально однородных пространств с нетривиальной подгруппой изотропии и левоинвариантной псевдоримановой метрикой с изотропным тензором Вейля.

Ключевые слова: локально однородные многообразия, тензор Вейля, инвариантная (псевдо)риманова метрика, изотропный тензор.

Papers of many mathematicians are devoted to studying of conformally flat (i.e., with the trivial Weyl tensor) (pseudo)Riemannian manifolds. Moreover, one can consider manifolds with Weyl tensors having zero squared length while itself being non zero. Also, such manifolds are called manifolds with isotropic Weyl tensors.

In the case of Riemannian metric, the squared length of the tensor in some orthonormal basis is the sum of the squares of all components. The squared length equals to zero if the tensor itself is trivial. Therefore, it is natural to consider only the pseudo-Riemannian metric case. For the dimension of 3, the Weyl tensor is trivial, and the Schouten-Weyl tensor (also known as the Cotton tensor) is identical with the Weyl tensor. In the paper of Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N., the Schouten-Weyl tensor was investigated for a left-invariant Lorentzian metric on three-dimensional Lie groups, including the problem of its isotropy.

In this paper, results of the study of four-dimensional locally homogeneous spaces with nontrivial isotropy subgroup and with invariant pseudo-Riemannian metric and an isotropic Weyl tensor are presented.

Key words: locally homogeneous manifolds, Weyl tensor, invariant (pseudo)Riemannian metric, isotropic tensor.

DOI 10.14258/izvasu(2018)1-17

1. Введение, основные обозначения и факты. Псевдориманово многообразие (M, g) называется локально конформно однородным, если псевдогруппа локальных конформных преобразований на нем действует транзитивно. Из работы [1] известно, что при конформной деформации локально однородное пространство переходит в локально конформно однородное пространство (см. подробнее [1–9]). Возникает вопрос: существует ли такое преобразование, с помощью которого из локально конформно однородного пространства можно получить локально однородное?

Известно, что если квадрат длины тензора Вейля $\|W\|^2$ не равен нулю (при $m = 3$ квадрат длины тензора Схоутена — Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю), то с помощью некоторого специально

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16–01–00336А).

выбранного конформного преобразования из локально конформного пространства возможно получить локально однородное пространство.

Если $\|W\|^2 = 0$, то в случае римановой метрики $W = 0$, поэтому естественно ограничиться лишь собственно псевдоримановым случаем.

Задача: *найти такие псевдоримановы многообразия, для которых одновременно* $\|W\|^2 = 0$ *и* $W \neq 0$ *(т.е. тензор Вейля является изотропным).*

В трехмерном случае аналогичная задача для тензора Схоутена — Вейля решена в работах [1,10], что является продолжением исследований Дж. Милнора [11] по левоинвариантным римановым метрикам на трехмерных группах Ли.

В данной работе представлено решение вышеприведенной задачи для случая размерности $m = 4$ с использованием классификации 4-мерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии [12].

Приведем математическую модель, позволяющую решить задачу об изотропности тензора Вейля на локально однородных псевдоримановых многообразиях.

Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G, через $\mathfrak{h}$ — подалгебру изотропии, а через $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (необязательно редуктивное) дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ однозначно определяет представление изотропии $\psi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\psi_X(Y) = [X, Y]_\mathfrak{m}$. Инвариантной (псевдо)римановой метрике на G/H соответствует невырожденная билинейная форма g на $\mathfrak{m}$ такая, что

$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \tag{1}$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Эта форма однозначно определяет связность Леви — Чивита $\nabla\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом

$$\nabla_X(Y_\mathfrak{m}) = \frac{1}{2}[X, Y]_\mathfrak{m} + v(X, Y), \tag{2}$$

где отображение $v\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется формулой

$$2g(v(X, Y), Z_\mathfrak{m}) = \\ = g(X_\mathfrak{m}, [Z, Y]_\mathfrak{m}) + g(Y_\mathfrak{m}, [Z, X]_\mathfrak{m}). \tag{3}$$

Тензору кривизны связности ∇ соответствует отображение $R\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что

$$R(X, Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X,Y]}. \tag{4}$$

Тензор Риччи ricc и скалярная кривизна sc определяются формулами

$$\mathrm{ricc}(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(X, Z)Y), \tag{5}$$

$$\mathrm{sc} = \mathrm{tr}_g(\mathrm{ricc}). \tag{6}$$

Компоненты тензора Вейля W имеют следующий вид:

$$W_{ijkt} = R_{ijkt} - \\ - \frac{\mathrm{ricc}_{ik}g_{jt} + \mathrm{ricc}_{jt}g_{ik} - \mathrm{ricc}_{it}g_{jk} - \mathrm{ricc}_{jk}g_{it}}{(n-2)} - \\ - \frac{\mathrm{sc}(g_{it}g_{jk} - g_{ik}g_{jt})}{(n-1)(n-2)}. \tag{7}$$

Квадрат длины тензора Вейля вычисляется по формуле

$$\|W\|^2 = W_{ijkt}W_{lnqr}g^{il}g^{jn}g^{kq}g^{tr}. \tag{8}$$

2. Изотропность тензора Вейля. Приведем алгоритм решения задачи об изотропности тензора Вейля (см. подробнее [13–15]):

1. Из классификации [12] находим вид ненулевых скобок Ли.
2. С помощью уравнения (1) выписываем матрицу метрического тензора.
3. Находим компоненты тензора Вейля W, используя формулы (2–7).
4. Вычисляем квадрат длины тензора Вейля $\|W\|^2$, используя (8).
5. Решаем систему уравнений $\|W\|^2 = 0$, $W \neq 0$.

Решая задачу об изотропности тензора Вейля для всех 186 случаев из классификации Б.Б. Комракова [12], получим следующий результат:

- в 77 случаях из классификации [12] тензор Вейля W является изотропным, причем:
  1) для 34 из них тензор Вейля W изотропен для любой инвариантной метрики;
  2) для остальных 43 случаев тензор Вейля W является изотропным лишь при определенных условиях на компоненты метрического тензора;
- в 109 случаях из классификации [12] тензор Вейля W не является изотропным, причем:
  1) в 15 случаях квадрат длины тензора Вейля $\|W\|^2$ не зануляется ни для какой инвариантной метрики;
  2) в 74 случаях все компоненты тензора Вейля W равны нулю;
  3) в 20 случаях тривиальность квадрата длины тензора Вейля $\|W\|^2$ влечет за собой тривиальность тензора Вейля W.

В таблице 1 представлены результаты для случая, когда тензор Вейля является изотропным при определенных условиях.

Замечание. *Для всех случаев, представленных в таблице 1, квадрат длины тензора Вейля тождественно равен нулю, кроме случаев* $1.1^1.1$,

$1.1^2.1$ *и* $1.3^1.1$. *В случае* $1.1^2.1$ *квадрат длины тензора Вейля представлен ниже, в случае* $1.1^1.1$

$$\|W\|^2 = \frac{\left(\alpha_{13}^4 - 13A\,\alpha_{13}^2 + 4A^2\right)\alpha_{22}^2}{3A^2\alpha_{13}^4},$$

где $A = \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2$; *в случае* $1.3^1.1$

$$\|W\|^2 = \frac{3\alpha_{44}^2}{8\alpha_{23}^4}.$$

3. Пример вычислений. В качестве примера рассмотрим случай $1.1^2.1$ из классификации [12].

В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = -u_2,$$
$$[u_1, u_4] = u_1, \quad [u_2, u_4] = 2u_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Метрический тензор имеет вид:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \alpha_{33} \neq 0 \\ \alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44} \end{matrix} \right\}.$$

Ненулевыми компонентами тензора Вейля являются:

$$W_{1214} = W_{1412} = W_{1414} = W_{2334} = -W_{3423} = = W_{3434} = \frac{\left(A + 2\alpha_{33}^2\right)\alpha_{22}\alpha_{44}}{6A\,\alpha_{33}},$$

$$W_{1324} = 2W_{1324} = W_{2314} = W_{1423} = 2W_{2413} = = W_{3412} = \frac{\alpha_{22}}{2},$$

$$W_{1212} = W_{2323} = \frac{\left(A + 2\alpha_{33}^2\right)\alpha_{22}^2}{6A\,\alpha_{33}},$$

$$W_{1313} = W_{2424} = -\frac{\left(A + 2\alpha_{33}^2\right)\alpha_{22}}{3A},$$

где $A = \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2$.

Квадрат длины тензора Вейля имеет следующий вид:

$$\|W\|^2 = \frac{4\alpha_{22}^2(4\alpha_{33}^4 + 13A\,\alpha_{33}^2 + A^2)}{3A^2\alpha_{33}^4}.$$

Он равен нулю в двух случаях:

1. При $\alpha_{22} = 0$. Но в этом случае зануляются компоненты тензора Вейля, следовательно, в данном случае тензор Вейля не является изотропным.
2. При $\alpha_{22} = \frac{2\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2(13 \pm 3\sqrt{17})}{2\alpha_{44}}$. В данном случае все компоненты тензора Вейля одновременно в ноль не обращаются.

Таблица 1

Псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Вейля W

№	$\det g \neq 0$	W изотропен
$1.1^1.1$	$\alpha_{13} \neq 0$ $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	$\alpha_{44} \neq 0$, $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{13}^2(3\sqrt{17} \pm 13) + 8\alpha_{24}^2}{8\alpha_{44}} \neq 0$
$1.1^2.1$	$\alpha_{33} \neq 0$ $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	$\alpha_{44} \neq 0$, $\alpha_{22} = \frac{2\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2(13 \pm 3\sqrt{17})}{2\alpha_{44}} \neq 0$
$1.3^1.1$		$\alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 \neq 0$, $\alpha_{44} = 0$
$1.3^1.2$		$\alpha_{44} \neq 0$, $\lambda \neq 0$
$1.3^1.4$		$\alpha_{44} \neq 0$
$1.3^1.5$		$\alpha_{33} \neq \frac{2\lambda\alpha_{34}}{\mu} - \frac{\alpha_{44}(2\mu + \lambda^2)}{\mu(\mu - 1)}$
$1.3^1.7$		$\lambda\alpha_{33} - 2\alpha_{34} - \alpha_{44} \neq 0$
$1.3^1.8$		$\alpha_{33} \neq 0$
$1.3^1.9$		$\alpha_{33} \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$
$1.3^1.12$		$\alpha_{33} \neq 0$, $2\mu \neq 1$, $\mu + \lambda \neq 1$
$1.3^1.15$	$\alpha_{23} \neq 0$	$\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}$
$1.3^1.16$		$\alpha_{33} \neq \alpha_{34}$
$1.3^1.19$		$\alpha_{33} \neq 0$
$1.3^1.20$		
$1.3^1.21$		$\alpha_{33} \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $2\lambda \neq 1$
$1.3^1.24$		$3\lambda \neq 2$, $\alpha_{33} \neq 2\lambda(\lambda - 1)\alpha_{44}$
$1.3^1.25$		$3\lambda \neq 2$, $-\alpha_{33} \neq 2\lambda(\lambda - 1)\alpha_{44}$
$1.3^1.28$		$\alpha_{33} \neq 2\alpha_{44}$
$1.3^1.29$		$\alpha_{33} \neq -2\alpha_{44}$
$1.3^1.30$		$\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $-2\alpha_{34} \neq$ $\neq (\mu - 1)\alpha_{33} + (\lambda - 1)\alpha_{44}$
$1.4^1.1$		$\alpha_{33} \neq 0$, $2\alpha_{22} \neq \alpha_{44}$
$1.4^1.2$		$\alpha_{33} \neq 0$, $p \neq 3$
$1.4^1.3$		$\alpha_{33} \neq \alpha_{44}$
$1.4^1.4$		$\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}$
$1.4^1.5$		$\alpha_{33} \neq 0$
$1.4^1.9$	$\alpha_{22} \neq 0$ $\alpha_{44} \neq 0$	$(2p - 1)^2 +$ $+ (\alpha_{22}(p(p + 1) - r) - \alpha_{44})^2 \neq$ $\neq 0$
$1.4^1.10$		$p(p + 1) \neq r$
$1.4^1.12$		$r \neq 0$
$1.4^1.14$		$r \neq 1$
$1.4^1.15$		$\alpha_{22} \neq -\alpha_{44}$
$1.4^1.16$		$\alpha_{22} \neq \alpha_{44}$
$1.4^1.18$		$\alpha_{22} \neq -\alpha_{44}$
$1.4^1.19$		$\alpha_{22} \neq \alpha_{44}$
$2.2^1.4$	$\alpha_{24} \neq 0$	$\alpha_{23} \neq 0$
$2.2^2.1$	$\alpha_{23} \neq 0$	$\alpha_{44} \neq 0$
$2.2^2.2$		
$2.5^1.1$	$\alpha_{24} \neq 0$	$\alpha_{33} \neq 0$
$2.5^1.2$		
$2.5^2.1$	$\alpha_{22} \neq 0$ $\alpha_{44} \neq 0$	
$2.5^2.2$	$\alpha_{44} \neq 0$	$s \neq 0$
$2.5^2.3$		
$2.5^2.4$		
$2.5^2.5$		

Таким образом, справедлива

Теорема. *Локально однородное псевдориманово многообразие* $1.1^2.1$ *имеет изотропный тензор Вейля тогда и только тогда, когда инвариантная метрика имеет вид*

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha_{24}^2-\alpha_{33}^2(13\pm3\sqrt{17})}{2\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{4,4} \neq 0$, $\frac{2\alpha_{24}^2-\alpha_{33}^2(13\pm3\sqrt{17})}{2\alpha_{44}} \neq 0$, $\alpha_{33} \neq 0$.

4. Заключение. В данной работе приведены результаты по исследованию четырехмерных локально однородных пространств с нетривиальной подгруппой изотропии и левоинвариантной псевдоримановой метрикой с изотропным тензором Вейля.

Результатом данной работы является решение задачи об изотропности тензора Вейля в случае 4-мерных локально однородных псевдоримановых многообразий, что дополняет результаты работ [1, 10, 16].

Библиографический список

1. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л. Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Мат. труды. — 2006. — Т. 9, № 1. DOI: 10.3103/S1055134407030030

2. Alekseevskiy D.V. Lorentzian manifolds with transitive conformal group // Note di Matematica. — 1974. — V. 37, № 1. DOI:10.1285/i15900932v37suppl1p35

3. Alekseevskiy D.V. Groups of conformal transformations of Riemannian spaces // Math. Sb. — 1985. — V. 89, № 1. DOI: 10.1070/SM1972v018n02ABEH001770

4. Alekseevsky D.V. The sphere and the Euclidean space are the only Riemannian manifolds with essential conformal transformations // Uspekhi Math. Nauk. — 1973. — V. 28, № 5.

5. Kühnel W., Rademacher H-B. Conformal transformations of pseudo-Riemannian manifolds Recent Development of Pseudo-Riemannian geometry — European Mathematical Society Publishing House, Switzerland: 2008. — P. 261–298. DOI: 10.4171/051

6. Ferrand J. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold // Math. Ann. — 1996. — V. 304, № 2. — P. 272–291.

7. Frances C. Essential conformal structures in Riemannian and Lorentzian structures Recent Development of Pseudo-Riemannian geometry — European Mathematical Society Publishing House, Switzerland: 2008. — P. 234–260. DOI: 10.4171/051

8. Podoksenov M.N. Conformally homogeneous Lorentzian manifolds // Sib. Mat. J. — 1992. — V. 33, № 6.

9. Takagi H. Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries // Tohoku Math. J. — 1975. — V. 27, № 1. DOI: 10.2748/tmj/1178241040

10. Клепиков П.Н., Клепикова С.В., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О тензоре Схоутена — Вейля трехмерных метрических групп Ли // математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сб. тр. Всерос. конф. Барнаул, 24–26 ноября 2015. — Барнаул, 2015.

11. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — V. 21. — P. 293–329. DOI: 1016/S0001-8708(76)80002-3.

12. Komrakov B.B. Einstein — Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. — 2001. — V. 8.

13. Хромова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений для определения основных геометрических характеристик нередуктивных однородных псевдоримановых многообразий // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сб. тр. Всерос. конф. Барнаул, 24–26 ноября, 2015. — Барнаул, 2015.

14. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях // Известия АлтГУ. — 2017. — № 4. DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-19

15. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo–riemannian four–manifolds // Tohoku Math. J. — 2014. — Vol. 66. DOI: 10.2748/tmj/1396875661

16. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН, серия: математика. — 2008. — Т. 419, № 6.