УДК 517.538.7

Неявные итерационные схемы для решения стационарных задач несжимаемой жидкости с большим запасом устойчивости

Е.К. Ергалиев

Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова (Усть-Каменогорск, Казахстан)

Implicit Iterative Schemes for Solving Stationary Problems of an Incompressible Fluid with a Large Margin of Stability

Y.K. Yergaliyev

S. Amanzholov East Kazakhstan State University (Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan)

Работа посвящена построению и исследованию разностных схем для уравнений, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости в естественных переменных «вектор скорости — давление». Большое внимание уделено неявным разностным итерационным схемам, разработанным на основе идеи «слабой сжимаемости».

Математические проблемы, возникающие при изучении движения вязкой несжимаемой жидкости, актуальны как в теоретическом плане, так и при исследовании конкретных моделей, используемых в механике, физике и других естественных науках для описания реальных процессов. Процессы, связанные с течением вязкой несжимаемой жидкости, успешно описываются уравнениями Навье — Стокса. Данные системы уравнений являются нелинейными, не относятся к эволюционному типу Коши — Ковалевской. Отсутствие граничного условия для давления на твердых стенках рассматриваемой области, где задаются значения для компонент вектора скорости, и наличие малого параметра при старших производных также приводят к технологическим трудностям. Данные обстоятельства, безусловно, усложняют поиск аналитических решений таких систем уравнений, и при современном состоянии математики их можно решать только методами вычислительного характера.

Ключевые слова: итерационная схема, численный алгоритм, погрешность решения, поле скорости, изолиния функции тока.

This paper is devoted to construction and investigation of difference schemes for equations that describe the motion of a viscous incompressible fluid in natural "velocity-pressure vector" variables. Much attention is given to the implicit difference iterative schemes developed on the basis of the "weak compressibility" idea.

Mathematical problems arising in the study of viscous incompressible fluid motion are of current importance both in the theoretical plan and in the study of specific models used in mechanics, physics, and other natural sciences to describe real processes. The processes associated with the flow of a viscous incompressible fluid are successfully described by the Navier — Stokes equations. These systems of equations are nonlinear and do not belong to the evolutionary Cauchy — Kovalevskaya type. The absence of a boundary condition for the pressure on solid walls of the region under consideration, where the values for the velocity vector components and the small parameter for the higher derivatives are given, also lead to technological difficulties. These circumstances certainly complicate the search for analytical solutions of such systems of equations, and, with the current state of mathematics, they can be solved only by computational methods.

Key words: iterative scheme and numerical algorithm, the error of the solution, the speed, the contour of stream function.

DOI 10.14258/izvasu(2018)1-14

Введение

Численному решению системы дифференциальных уравнений несжимаемой жидкости конечно-разностными методами и их математическому обоснованию посвящены многочисленные монографии и научные статьи [1–4]. Построение эффективных численных алгоритмов для решения уравнений Навье — Стокса вязкой несжимаемой жидкости представляет большой интерес для специалистов в области вычислительной гидродинамики.

При рассмотрении этой системы в естественных переменных возникают вычислительные и теоретические трудности, обусловленные прежде всего отсутствием граничного условия для давления на твердых стенках и математического обоснования вопросов устойчивости, сходимости и получения оценок скорости сходимости. Поэтому дальнейшее развитие теории разностных методов решения уравнений несжимаемой жидкости является актуальной задачей вычислительной математики.

Постановка задачи

Рассмотрим следующую стационарную систему уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в прямоугольной области $D=\left\{0\le x_\alpha \le l_\alpha,\alpha=1,2,...,N\right\}$

$$\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u}+grad\,p=\nu\Delta\vec{u}+\vec{f}(x),\qquad x\in D, \tag{1}$$

$$div\,\vec{u}=0,$$

с краевыми условиями

$$\vec{u}\Big|_{\partial D}=0, \tag{2}$$

где $\vec{u}=(u_1,u_2,...,u_N)$ — вектор скорости; p — давление; ν — коэффициент вязкости.

Сначала будет исследована скорость сходимости одного класса итерационных схем для численного решения стационарных сеточных уравнений, соответствующая разностной аппроксимации системы (1), (2), вида

$$L_{h,\vec{u}}\vec{u}+\overline{grad}_h p=\nu\Delta_h\vec{u}+\vec{f}, \tag{3}$$

$$\underline{div}_h\vec{u}=0,\qquad x\in D_h, \tag{4}$$

с однородными краевыми условиями для компонент вектора скорости.

Здесь и далее приняты обозначения из теории разностных схем [1].

Предположим также, что операторы $L_{h,m}, m=\overline{1,N}$, соответствующие аппроксимации конвективных членов, являются энергетически «нейтральными», т.е.

$$(L_{h,m}u_m,u_m)=0,\ \forall m=\overline{1,N},$$

и выполняется дополнительное условие

$$\sum_{D_h}p(x)=0, \tag{5}$$

которое соответствует условию однозначности определения давления.

Для численного решения сеточных стационарных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «вектор скорости, давление» (3) – (4) рассмотрена итерационная схема, разработанная на основе идеи «слабой сжимаемости»:

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+L_{h,m}\vec{u}_m^{n+1}+(p^n-\tau_0\underline{div}_h\vec{u}^n)_{x_m}=\nu\Delta_h\vec{u}_m^{n+1}+\tau_0\delta(u_m^{n+1}-u_m^n)_{x_m\bar{x}_m}+f_m,\ \ m=1,2,...,N, \tag{6}$$

$$\frac{p^{n+1}-p^n}{\tau_0}+\underline{div}_h\vec{u}^{n+1}=0, \tag{7}$$

с однородными краевыми условиями

$$\vec{u}^{n+1}\Big|_{\partial D_h}=0, \tag{8}$$

где τ,τ_0,δ – положительные итерационные параметры.

Для предложенного алгоритма (6) – (8) доказана ограниченность итерации в случаях линейной и нелинейной задачи, а в случае задачи Стокса выявлено, что скорость сходимости не зависит от количества узлов конечно-разностной сетки [5, 6].

Разностное соотношение для погрешности решения в случае линейной задачи Стокса будет иметь вид:

$$\frac{z_m^{n+1}-z_m^n}{\tau}+(\pi-\tau_0\underline{div}_h\vec{z}^n)_{x_m}=\nu\Delta_h z_m^{n+1}+\tau_0\delta(z_m^{n+1}-z_m^n)_{x_m\bar{x}_m}, \tag{9}$$

$$\frac{\pi^{n+1}-\pi^n}{\tau}+\underline{div}_h\vec{z}^{n+1}=0, \tag{10}$$

где $\vec{z}_m^n(x)=u_m^n(x)-u_m(x),\quad x\in D_{h,m}$;

$\pi^n=p^n-p(x),\quad x\in D_h$, и имеет место следующая теорема о скорости сходимости итерационного процесса.

Теорема 1. Для погрешности итерационного процесса (9), (10) имеет место оценка

$$F^{n+1}\le qF^n, \tag{11}$$

где

$$F^n = \left\|\vec{z}^n\right\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0 d_2}\left\|p^n\right\|^2,\ q = \max\left\{1-\tau\tau_0 c_0^2,\ \frac{1}{d_2}\right\} < 1, \qquad (12)$$

$$d_2 = \min\left\{1+\tau\nu\varepsilon_1 d_1,\ 1+\frac{\nu\varepsilon_2}{\tau_0\delta}\right\},$$

$c_0, d_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ — равномерно ограниченные константы, не зависящие от параметров сетки.

Из соотношений (11), (12) видно, что величина $q, (0<q<1)$ не зависит от пространственных шагов сетки, т.е. скорость сходимости итерационного процесса (6) – (8) в линейном случае не зависит от количества узлов конечно-разностной сетки.

Далее исследована скорость сходимости итерационного алгоритма (6) – (8) для нелинейного случая. Здесь разностное соотношение для погрешности решения будет иметь вид:

$$\frac{z^{n+1}_m - z^n_m}{\tau} + L_{h,m}(\vec{u}^n)z^{n+1}_m + L_{m,h}(\vec{z}^n)u_m + (\pi - \tau_0\underline{div}_h\vec{z}^n)_{x_m} = \nu\Delta_h z^{n+1}_m + \tau_0\delta(z^{n+1}_{mx_m} - z^n_{m\bar{x}_m})_{x_m}, \qquad (13)$$

$$\frac{\pi^{n+1}-\pi^n}{\tau} + \underline{div}_h\vec{z}^{n+1} = 0.$$

Для погрешности итерации (13) показано, что, если данные задачи (3), (4) и параметры сетки удовлетворяют условиям:

$$\nu - c_0\left\|\nabla_h\vec{u}\right\|(1+\varepsilon_1) \ge \nu_0 > 0,\ 1-\frac{\tau c_0 c_1}{2\varepsilon_1 h^2}\left\|\nabla\vec{u}\right\| \ge \nu_1 > 0,\ \delta - N \ge \delta_1 > 0,$$

то имеет место следующая оценка:

$$E^{n+1} + \tau\tau_0\left\|\underline{div}_h\vec{z}^n\right\|^2 + 2\tau\nu_0\left\|\nabla_h\vec{z}^{n+1}\right\|^2 + \nu_1\left\|\vec{z}^{n+1}-\vec{z}^n\right\|^2 + \tau\tau_0\delta_1\sum_m\left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m} - z^n_{m,x_m}\right\|^2 \le E^n,$$

где $E^n = \left\|\vec{z}^n\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0}\left\|\pi^n\right\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m\left\|z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2,$

которая гарантирует сходимость итерации.

Для сравнения с другими известными алгоритмами и иллюстрации возможностей предложенного алгоритма (6) – (8) рассмотрена задача в каверне с двигающейся верхней границей при *Re*=100 для двумерного случая *N*=2. Для сравнения выбрана неявная разностная схема вида

$$\frac{u^{n+1/2}_m - u^n_m}{\tau} + L_h\vec{u}^{n+1/2}_m + \overline{grad}_h p^n = \nu\Delta_h u^{n+1/2}_m + \vec{f}, \qquad (14)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + \overline{grad}_h(p^{n+1} - p^n) = 0, \qquad (15)$$

$$\underline{div}_h\vec{u}^{n+1} = 0.$$

Итерации производились до выполнения критерия сходимости

$$\sum_m\left\|(p^n - \tau\underline{div}_h\vec{u}^n)_{x_m} - \nu\Delta_h u^n_m\right\| + \left\|\underline{div}_h\vec{u}^n\right\| \le 10^{-4}. \qquad (16)$$

Надо отметить, что во всех случаях критерий сходимости достигнут с указанной точностью.

В таблицах 1 и 2 приведены значения $n_0(\varepsilon)-$ количество итерации для удовлетворения критерия сходимости (16).

Таблица 1

Результаты расчетов по схеме (14), (15)

τ	33×33	65×65	129×129
0,15	85	281	1222
0,2	88	373	1627
0,3	129	557	2438
0,35	150	650	2844

Как видно в данной таблице, с уменьшением шага сетки количество итерации для алгоритма (14), (15) увеличивается.

Таблица 2

Результаты расчетов по схеме (6) – (8) для $\tau = 2$

τ_0	33×33	65×65	129×129
0,01	45	45	45
0,0125	42	43	43
0,025	42	42	43
0,03	40	43	43

Из таблицы видно, что для итерационной схемы (6) – (8) с увеличением количества узлов сетки $n_0(\varepsilon)$ количество итерации остается практически неизменным. С помощью предложенного алгоритма также была рассмотрена задача встречных течений несжимаемой жидкости в канале конечной длины с краевыми условиями, приведенными на рисунке 1. При численном решении задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости используются уравнения Навье — Стокса, записанные как относительно переменных «вектор скорости — давление», так и в переменных «функция тока — вихрь скорости» [7, 8].

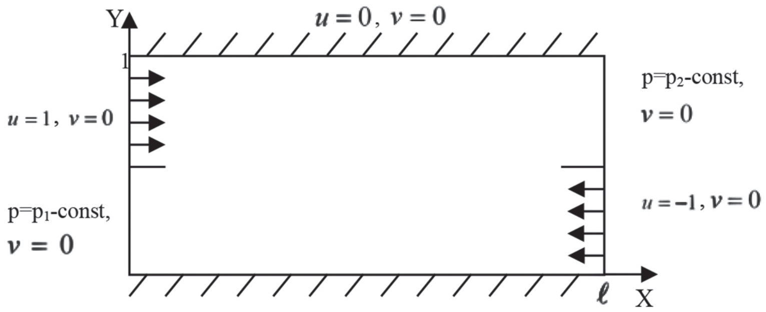


Рис. 1. Расчетная область для плоского течения

Таблица 3

Результаты расчетов при параметрах $\tau = \tau_0 = 0{,}05$, Re=1000

	(65×65)	(129×129)	(257×257)	(513×513)	(1025×1025)
$n_0(\varepsilon)$	368	379	381	396	419
Время счета	0:00:29	0:03:36	0:24:10	4:29:54	14:13:20

На рисунках 2–4 приведены поля скоростей и изолинии функции тока для различных значений длины рассмотренной области. По результатам вычислительного эксперимента можно заключить, что во всех случаях стационарный режим течения был достигнут [9, 10].

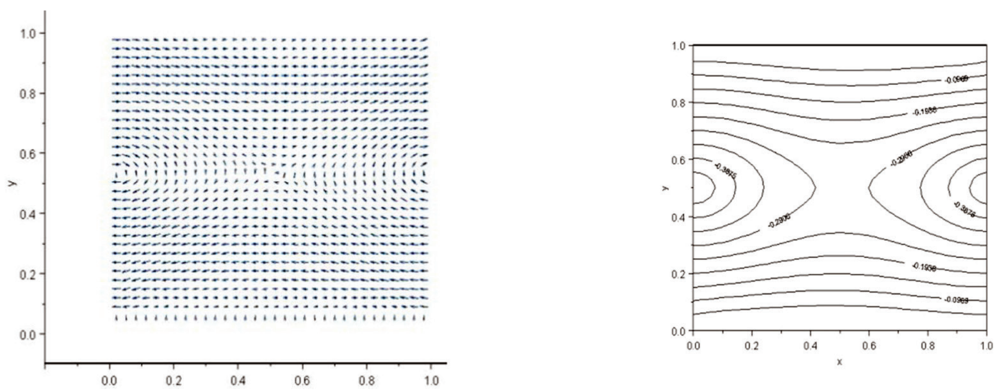


Рис. 2. Поле скорости и изолиния функции тока при Re=500, $\ell = 1$, (65×65)

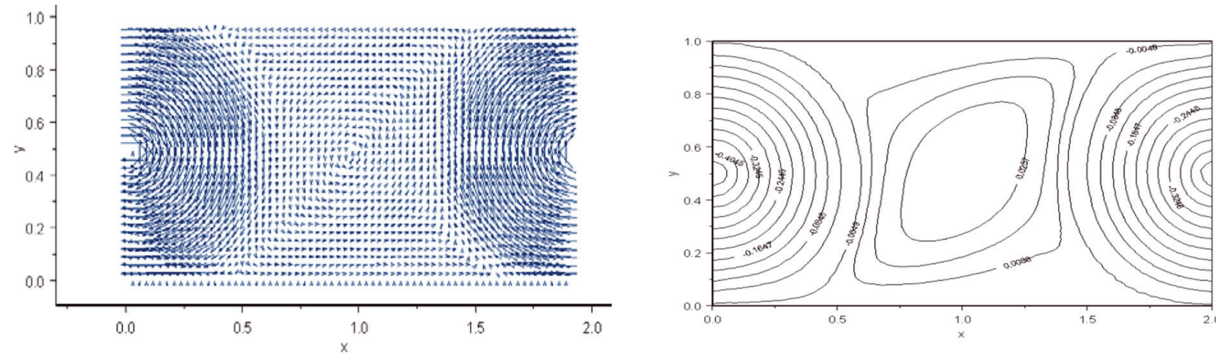
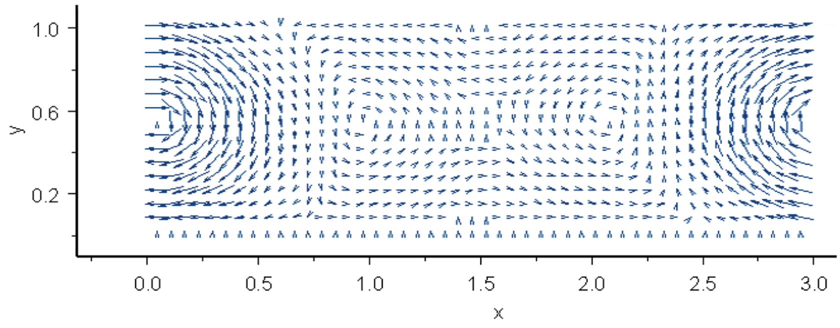
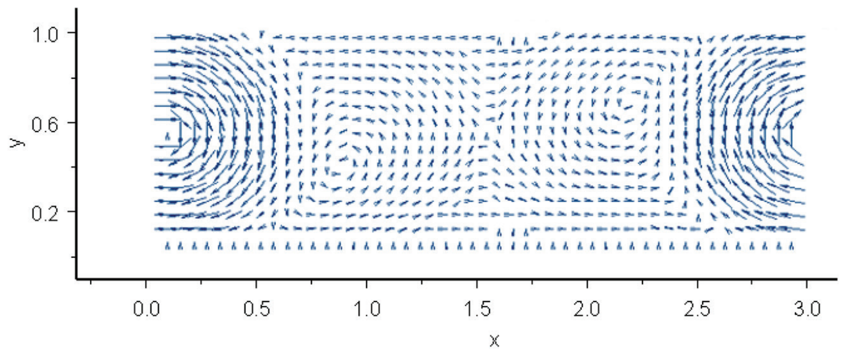


Рис. 3. Поле скорости и изолиния функции тока при $\ell = 2, (129 \times 65)$



а)



б)

Рис. 4. Векторные поля в прямоугольной области $\ell = 3, (193 \times 65)$: а — при Re=500; б — при Re=1000

Далее для численного решения сеточной стационарной задачи (3), (4) Навье — Стокса предложена новая итерационная схема вида

$$(E - \alpha \overline{grad}_h \underline{div}_h - \beta \Delta_h) \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} + L_h \vec{u}^{n+1} + \overline{grad}_h p^{n+1} = \nu \Delta_h \vec{u}^{n+1} + \vec{f}(x), \qquad (17)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau_0} + \underline{div}_h \vec{u}^{n+1} = 0, \qquad (18)$$

с однородными краевыми условиями

$$\vec{u}^{n+1} \Big|_{\partial D_h} = 0\,, \qquad (19)$$

где $\tau, \tau_0, \alpha, \beta -$ положительные итерационные параметры и предполагается, что выполняется дополнительное условие (5).

Исследована скорость сходимости итерации (17) – (19) в случае линейной задачи Стокса. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для итерационного процесса (17) – (19) будет справедлива оценка

$$\Omega^{n+1} \le q\Omega^n, \text{ где } \Omega^n = \left\|\vec{u}^n\right\|^2 + \alpha\left\|\underline{div}_h\vec{u}^n\right\|^2 + \beta\left\|\nabla_h\vec{u}^n\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0}\left\|p^n\right\|^2,$$

$$q = \left[\min\{(1+\frac{\tau\nu\delta}{2}),(1+\frac{\tau\tau_0}{\alpha}),(1+\frac{\tau\nu}{\beta}),(1+c_0^2\tau\tau_0 M)\}\right]^{-1} < 1,$$

δ, M — положительные константы. Здесь число q $(0 < q < 1)$, характеризующее скорость сходимости, не зависит от параметров пространственной сетки, т.е. предложенный алгоритм (17) – (19) обладает свойством равномерной сходимости.

Разностное соотношение для погрешности решения в случае нелинейной задачи будет иметь следующий вид:

$$(E - \alpha\overline{grad}_h\underline{div}_h - \beta\Delta_h)\frac{\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n}{\tau} + L_{h,\vec{u}}(\vec{u}^n)\vec{z}^{n+1} + L_{h,\vec{u}}(\vec{z}^n)\vec{u} + \overline{grad}_h p^{n+1} = \nu\Delta_h\vec{z}^{n+1} + \vec{f}(x), \tag{20}$$

$$\frac{\pi^{n+1} - \pi^n}{\tau_0} + \underline{div}_h\vec{z}^{n+1} = 0.$$

В этом случае, если предположить, что

$$1 - \frac{c_0\tau\left\|\nabla_h\vec{u}\right\|}{2\varepsilon_1\beta} \ge \nu_2 > 0, \quad 1 - \frac{c_0\left\|\nabla_h\vec{u}\right\|}{\nu}\left(1+\varepsilon_1\right) \ge \nu_1 > 0,$$

тогда для скорости сходимости справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для погрешности итерационного алгоритма (20) будет справедлива оценка $E^{n+1} \le qE^n$,

где $E^n = \left\|\vec{z}^n\right\|^2 + \dfrac{\tau}{\tau_0}\left\|\pi^n\right\|^2 + \alpha\left\|\underline{div}_h\vec{z}^n\right\|^2 + \beta\left\|\nabla_h\vec{z}^n\right\|^2,$

$$q = \frac{1}{\min\left\{1 + \tau\delta_0\varepsilon_2, 1 + \tau\tau_0\gamma, 1 + \frac{\varepsilon_3\tau}{\beta}, 1 + \frac{\varepsilon_4\tau}{\alpha}\right\}} < 1,$$

$\gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ — положительные константы.

Заключение

Для уравнений несжимаемой жидкости в естественных переменных «скорость — давление» в данной работе получены следующие результаты:

— для численного решения сеточных стационарных уравнений Навье — Стокса построена и исследована неявная итерационная разностная схема вида (6) – (8). Методом априорных оценок установлено, что в случае линейной задачи Стокса построенная схема не зависит от количества узлов пространственной сетки, т.е. обладает свойством равномерной сходимости;

— охарактеризованы свойства сходимости итерационного алгоритма в нелинейном случае: выявлено, что в случае нелинейной задачи исследование сходимости итерационного алгоритма (6) – (8) накладывает ограничение на решение, совпадающую по порядку с условием, гарантирующим существование и единственность решения исходной дифференциальной задачи;

— на основе идеи «слабой сжимаемости» разработана новая неявная многопараметрическая схема вида (17) – (19);

— получена оценка скорости сходимости итерационного алгоритма (17) – (19) для линейных и нелинейных стационарных уравнений и доказано, что предложенная схема сходится к нулевому стационарному решению со скоростью геометрической прогрессии.

Библиографический список

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М., 1982.

2. Воеводин А.Ф., Юшкова Т.В. Численный метод решения начально-краевых задач для уравнений Навье — Стокса в замкнутых областях на основе метода расщепления // Сибирский журнал вычислительной математики. — 1999. — Т. 2, № 4.

3. Zhilin Li, Cheng Wang. A Fast Finite Differenc Method For Solving Navier-Stokes Equations on Irregular Domains // Commun. Math. Sci., V. 1, №1 (2003).

4. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. — 2000. — Вып. 116.

5. Данаев Н.Т., Ергалиев Е.К. Об одном итерационном методе решения стационарных уравнений Навье — Стокса // Вычислительные технологии. —2006. — Т. 11, № 4.

6. Данаев Н.Т., Ергалиев Е.К. Об одной неявной итерационной схеме для задачи Стокса // Вестник КазНУ. Сер. математика, механика и информатика. — 2006. — № 3 (50).

7. Danaev N.T., Amenova F.S. About one Method to Solve Navier-Stokes Equation in Variables (ΩΨ) // Advances in Mathematical and Computational Methods, Information Engineering Research Institute, USA, № 3(2), 2013.

8. Дайковский А.Г., Полежаев В.И., Федосеев А.И. О расчете граничных условий для нестационарных уравнений Навье — Стокса в переменных (ψω) // Численные методы механики сплошной среды. — 1979. — Т. 10, № 2.

9. Мерзликина Д.А., Пышнограй Г.В., Пивоконский Р., Филип П. Реологическая модель для описания вискозиметрических течений расплавов разветвленных полимеров // Инженерно-физический журнал. — 2016. — Т. 89, № 3.

10. Merzlikina D.A., Pyshnograi G.V., Koshelev K.B., Kuznetcov A., Pyshnograi I.G., Tolstykh M.U. Mesoscopic Rhelogical Model for Polymeric Media Flows // Journal of Physics: Conference Series, V. 790, № 1, 2017.