

## Вторичные режимы магнитогидродинамического течения в изогнутой трубе

*А.В. Проскурин<sup>1</sup>, А.М. Сагалаков<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова (Барнаул, Россия)

<sup>2</sup> Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

## Secondary Regimes of Magnetohydrodynamic Flow in a Bent Channel

*A. V. Proskurin<sup>1</sup>, A. M. Sagalakov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Polzunov Altai State Technical University (Barnaul, Russia)

<sup>2</sup> Altai State University (Barnaul, Russia)

Исследование течений электропроводящей жидкости в магнитном поле становится актуальным по мере реализации планов строительства исследовательских и промышленных термоядерных реакторов. Такие установки содержат большое количество узлов сложной формы, в которых жидкие металлы движутся в присутствии магнитных полей. Эксперименты в этой области очень затратны, поэтому большая роль в исследовательских и проектных работах отводится численному моделированию. Авторами рассмотрено течение вязкой электропроводящей жидкости в трубе, изогнутой под углом в девяносто градусов. Жидкость протекает по трубе под действием градиента давления, магнитное поле направлено параллельно входному патрубку. Для моделирования течения использовался МГД-решатель, построенный на спектрально-элементной библиотеке *Nektar++*. Спектрально-элементный метод сочетает высокую точность спектральных и пространственную гибкость конечно-элементных методов. В настоящее время спектрально-элементные методы активно разрабатываются. Авторы обнаружили вторичные стационарные режимы магнитогидродинамического течения, которые отличаются от случая без магнитного поля: во входном патрубке образуется вихрь или противоток жидкости, тогда как отрыв потока в выходном патрубке подавляется магнитным полем.

**Ключевые слова:** магнитная гидродинамика, изогнутая труба, спектрально-элементный метод.

DOI 10.14258/izvasu(2018)1-07

**Введение.** Исследование течений электропроводящей вязкой жидкости в магнитном поле становится актуальным по мере реализации планов строительства термоядерных реакторов, которые охлаждаются жидкими металлами. Эксперименты в этой области очень затратны, поэтому боль-

The study of electrically conductive fluid flow in a magnetic field becomes relevant when plans for construction of research and industrial thermonuclear reactors are implemented. Such facilities contain a large number of complex shape pipes, in which liquid metals move in the presence of magnetic fields. Real life experiments are costly, so a large role in research and design is given to numerical modeling. The authors consider the flow of a viscous electrically conductive liquid within a 90 degree bent pipe. The liquid flows through the pipe under the action of a pressure gradient, the magnetic field is directed parallel to the inlet branch of the channel. The MHD solver based on the *Nektar++* spectral/hp library is used for flow simulation. The spectral/hp method includes high accuracy of spectral methods and spatial flexibility of finite-element methods. At the present time, spectral-element methods are actively developed. In the paper, secondary stationary modes of magnetohydrodynamic flow are revealed to be different from the case without the magnetic field: a vortex or counterflow of liquid is formed in the inlet branch of a channel, while the flow separation in the outlet branch is suppressed by the magnetic field.

**Key words:** magnetohydrodynamics, bend pipe, spectral/hp element method.

шая роль в проектных работах отводится математическому моделированию, в том числе с использованием суперкомпьютеров. Такие численные исследования тоже достаточно сложны и даже для хорошо изученных задач могут приводить к новым интересным результатам [1].

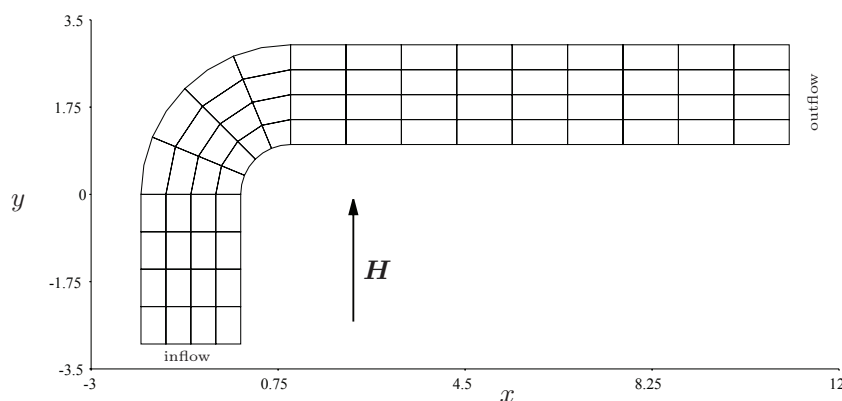


Рис. 1. Изогнутый канал

Одной из часто встречающихся конфигураций течения является изогнутая труба, как показано на рисунке 1. Между областями границы «inflow» и «outflow», через одну из которых жидкость поступает в канал, а через другую – вытекает, действует постоянный градиент давления. Введена прямоугольная система координат с осями  $x$ ,  $y$ . Магнитное поле направлено вдоль оси  $y$ . Без магнитного поля такая конфигурация хорошо исследована (см., например, работы [2, 3] и библиографию в них). Детальное исследование течений электропроводящих жидкостей в таких типовых конфигурациях представляет значительный интерес для проектирования жидкометаллических аппаратов и является предметом современных исследований по всему миру.

**Постановка задачи.** Запишем уравнения Навье-Стокса, следуя, например, [4, 5],

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{H}), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость,  $p$  – давление;  $\nu$  – вязкость;  $\rho$  – плотность;  $\mathbf{F}$  – магнитная сила;  $\mathbf{H}$  – напряженность внешнего магнитного поля.

Закон Ома имеет форму

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{j}$  – плотность электрического тока;  $\varphi$  – электрический потенциал;  $\sigma$  – электропроводность. Используя закон сохранения заряда  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , можно вывести уравнение для электрического потенциала

$$\Delta \varphi = \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (3)$$

Система (1) может быть записана в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + N (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\Delta \varphi = \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{H}),$$

где  $Re = \frac{L_0 V_0}{\nu}$  – число Рейнольдса;  $N = \frac{\sigma H_0^2 L_0}{\rho V_0}$  – число Стюарта;  $L_0$ ,  $V_0$ ,  $H_0$  – масштаб длины, скорости и магнитного поля. Представление (4) называют приближением слабо электропроводящей жидкости. Эта система широко используется в исследованиях потоков жидких металлов, адекватность модели обсуждается, например, в работе [6], где сделаны соответствующие ссылки.

Граничные условия для скорости на твердой стенке имеют вид

$$\mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Граничные условия для электрического потенциала на идеально-электропроводящей стенке имеют вид

$$\varphi = \text{const}, \quad (6)$$

а на непроводящей стенке

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (7)$$

**Численный метод.** В промышленной вычислительной гидродинамике большую роль играют методы низкого порядка точности, реализованные, например, программными комплексами *Ansys*, *OpenFoam* и др. Эти методы построены на разбиении вычислительной области на небольшие участки, на которых решение приближенно представляется полиномами малых степеней. Для такого подхода характерно медленное увеличение

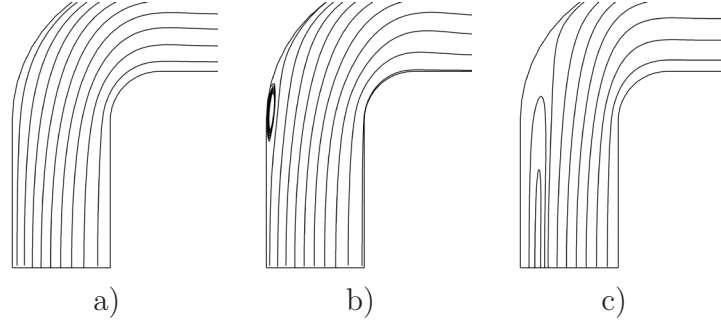


Рис. 2. Линии тока при увеличении магнитного поля

точности вычислений при уменьшении шага узлов вычислительной сетки и большая геометрическая гибкость. В противоположность методам низкого порядка, методы высокого порядка (спектральные методы) приближенно представляют решение в виде комбинации полиномов произвольных степеней, при увеличении этих степеней точность растет намного быстрее, чем при уменьшении шага узлов сетки для методов первой группы. Традиционные спектральные методы пока применимы лишь для областей простой формы вроде прямоугольников, треугольников, кругов. Сейчас активно развивается спектрально-элементный метод [7], который является комбинацией этих двух подходов.

В данной работе использовался МГД-решатель, построенный на спектрально-элементной библиотеке `Nektar++` [8, 9]. В основе МГД-решателя лежит решатель `IncNavierStokesSolver` для несжимаемой вязкой жидкости из этой библиотеки. Вопросы точности и сходимости рассмотрены в [10].

`IncNavierStokesSolver` использует численную схему с коррекцией скорости [11]. Введем временную сетку  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$ . Используя разностную схему первого порядка, можно определить первую промежуточную скорость  $\tilde{\mathbf{v}}$  при помощи уравнения

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_n}{\delta t} = -(\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n + \mathbf{F}_n + N \mathbf{v}_n \times (-\nabla \varphi_n + \mathbf{v}_n \times \mathbf{H}), \quad (8)$$

где  $\mathbf{F}$  – сила, действующая на жидкость, которую `Nektar++` позволяет задать на этом шаге. Электрический потенциал находится из уравнения  $\Delta \varphi_n = \nabla(\mathbf{v}_n \times \mathbf{H})$ , после чего можно рассчитать магнитные силы. Определим вторую промежуточную скорость так

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} = -\nabla p_{n+1}. \quad (9)$$

Уравнение Пуассона для давления

$$\Delta p_{n+1} = \nabla \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} \right) \quad (10)$$

выводится при использовании  $\text{div} \hat{\mathbf{v}} = 0$ . Таким образом, на этом шаге приближенно выполняется условие соленоидальности скорости. Граничные условия для давления ставятся в [11]. На последнем шаге схемы решается уравнение

$$\left( \Delta - \frac{Re}{\delta t} \right) \mathbf{v}_{n+1} = -\frac{Re}{\delta t} \tilde{\mathbf{v}} + Re \nabla p_{n+1}, \quad (11)$$

которое позволяет определить скорость  $\mathbf{v}_{n+1}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ .

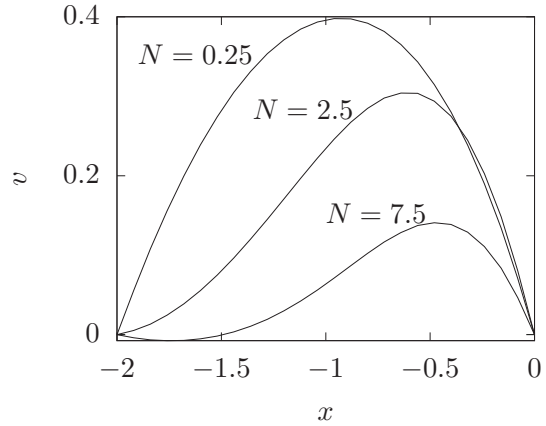


Рис. 3. Профили скорости на входе в канал

**Результаты вычислений.** Для того, чтобы произвести вычисления, зададим масштаб длины – половину ширины канала, масштаб скорости  $V_0 = 1 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ , внешнее магнитное поле также положим равным 1 Э. Зададим вязкость так, чтобы число Рейнольдса стало 100. В области `outflow` зададим значение давления 0, а в области `inflow` – от 1 до 15.

Стационарное течение находили путем интегрирования нестационарной задачи по времени до момента установления постоянной скорости. Расчетная сетка приведена на рисунке 1, порядок аппроксимации равен 10. Время интегрирования и порядок аппроксимации подбирались так, чтобы погрешность скорости была не более  $10^{-4}$ . Стенки приняты изолирующими.

На рисунке 2 приведены линии тока при следующих параметрах:  $N = 1$ ,  $P = 1$ (a),  $N = 2.5$ ,  $P = 15$ (b),  $N = 5$ ,  $P = 5$  (c). В первом случае наблюдается ламинарное течение. Во втором случае в левой части канала присутствует небольшой вихрь. В случае течения непроводящей жидкости такой вихрь, связанный с отрывом течения от стенки, может образовываться после поворота в зоне отрыва. В третьем случае в левой части подводящего канала наблюдается противотечение.

На рисунке 3 приведены профили скорости на входе в канал при  $N = 0.25$ ,  $N = 2.5$ ,  $N = 7.5$ , во всех случаях  $P = 5$ . Профиль течения существенно зависит от величины магнитных сил. В случае малого магнитного параметра  $N$  про-

филь скорости почти параболический. При увеличении  $N$  профиль теряет симметричность за счет уменьшения скорости в левой части, а при дальнейшем увеличении магнитного параметра возникает противоточное течение. Максимальная величина такого противотока – 6% от максимальной положительной скорости. Это значение соответствует общепринятой величине погрешности 5% для инженерных гидродинамических расчетов, которой часто руководствуются, когда задают величину элементов расчетной сетки для стандартных программных комплексов. Спектрально-элементный метод позволяет проводить рутинные расчеты с намного более высокой точностью, что в рассмотренном в статье примере позволило обнаружить интересный эффект образования вихрей и противотока.

**Заключение.** В работе обнаружены интересные режимы течения в изогнутой под углом девяносто градусов трубе. По-видимому, магнитное поле стабилизирует течение в выводном патрубке, и вихри образуются в начальной части канала до изгиба. Также в этой области канала наблюдается противотечение.

## Библиографический список

1. Proskurin A.V., Sagalakov A.M. A new branch of instability of the magnetohydrodynamic Poiseuille flow in a longitudinal magnetic field // Technical Physics Letters. — 2008. — Т. 34, № 3.
2. Pellegrini M., Endo H., Ninokata H. Numerical investigation of bent pipe flows at transitional Reynolds number // In Progress in Nuclear Energy. — 2011, Volume 53, Issue 7. DOI:10.1016/j.pnucene.2011.02.005.
3. Spedding P., Benard E., McNally G. Fluid flow through 90 degree bends // AsiaPacific Journal of Chemical Engineering. — 2004. — Т. 12, № 1-2. DOI:10.1002/apj.5500120109.
4. Davidson P.A. An Introduction to Magnetohydrodynamics. — Cambridge: 2001.
5. Landau L., Lifshitz E. Electrodynamics of Continuous Media (Second Edition Revised and Enlarged), volume 8 of Course of Theoretical Physics. — Amsterdam: 1984.
6. Krasnov D., Zikanov O., Boeck T. Comparative study of finite difference approaches in simulation of magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number. // Computers & fluids. 2011, 50(1). DOI:10.1016/j.compfluid.2011.06.015.
7. Patera A.T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion // Journal of computational Physics. — 1984. — Т. 54, № 3.
8. Cantwell C.D., Moxey D. et al Nektar plus plus : An open-source spectral/hp element // Computer Physics Communications. — 2015, 192. DOI:10.1016/j.cpc.2015.02.008
9. Karniadakis G., Sherwin S. Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics: Second Edition. — Oxford: 2005.
10. Proskurin A.V., Sagalakov A.M. A spectral/hp element solver for magnetohydrodynamics // arXiv preprint arXiv:1707.08957. — 2017.
11. Karniadakis G., Israeli M., Orszag S. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations // Journal of computational physics — 1991. — 97,2. DOI:10.1016/0021-9991(91)90007-8.