УДК 517.95 + 532.58

Устойчивость решения по начальным данным задачи о колебаниях ледового покрова в канале*

К.А. Шишмарев

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Stability of Ice Cover Oscillations in a Channel Problem Solution with Initial Data

K.A. Shishmarev

Altai State University (Barnaul, Russia)

В рамках линейной теории гидроупругости рассматривается начально-краевая задача о колебаниях ледового покрова в бесконечном канале, вызванных движением внешней нагрузки. В основе математической модели лежит связанная система дифференциальных уравнений, описывающая вертикальное отклонение ледового покрова и движение жидкости в канале. Ледовый покров моделируется уравнением тонкой вязкоупругой пластины. Вязкоупругие свойства льда моделируются на основе реологического закона Кельвина – Фойгта. Жидкость в канале невязкая и несжимаемая. Связь двух задач заключена в линеаризованных условиях – кинематическом и динамическом. Система уравнений замыкается следующими условиями: жесткого защемления для пластины на стенках канала; непротекания для потенциала скорости течения; затухания колебаний на бесконечности. Исследования в данной работе посвящены проблемам корректности постановок задач, описываемых совместными уравнениями динамики вязкоупругой пластины и идеальной жидкости. В пункте 1 доказана теорема об устойчивости по начальным данным классического решения начально-краевой задачи вязкоупругих колебаний ледового покрова в канале. В пункте 2 доказан аналог теоремы пункта 1 для упругих колебаний ледового покрова. Теоремы доказаны с использованием методов получения энергетических оценок, а также специальных функциональных неравенств. Вопросы устойчивости описанных задач исследованы при конечных временах.

Ключевые слова: устойчивость, начально-краевая задача, идеальная жидкость, вязкоупругие колебания, ледовый покров, внешняя нагрузка.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-30

In this paper, an initial-boundary problem of ice cover oscillations in an infinite channel caused by a moving load is considered within the linear theory of hydroelasticity. Mathematical model is based on a combined system of differential equations describing vertical deflection of the ice cover and motion of fluid in the channel. The ice cover is modeled by the equation of a thin viscoelastic plate. Viscoelastic properties of ice are modeled by the Kelvin-Voigt rheological law. The liquid in the channel is inviscid and incompressible. The relation between the viscoelastic and hydrodynamic parts of the problem is established by the linearized kinematic and dynamical conditions. The system of equations is closed by conditions of clamped edges for the plate on the walls of the channel, conditions of impermeability for the flow velocity potential, and damping conditions for the oscillations far away from the load. The investigation in this paper is devoted to the correctness of problems formulations described by combined equations of a viscoelastic plate and an ideal fluid. In section 1, the stability theorem for the classical solution of the initial boundary-value problem of viscoelastic oscillations of the ice cover in the channel with respect to initial data is proved. In section 2, the similar theorem is proved for elastic oscillations of the ice cover. Theorems are proved using energy estimation methods and special functional inequalities. Stability of described problems is studied for finite times.

Key words: stability, initial-boundary value problem, ideal fluid, viscoelastic oscillations, ice cover, external load.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

Введение. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\Delta\varphi(x,y,z,t)=0 \quad (x,y,z,t)\in\Omega_T; \qquad (1)$$

$$Mw_{tt}+D\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w=P(x,y,t)-$$
$$=\rho_l\varphi_t(x,y,0,t)-\rho_l g w(x,y,t) \quad (x,y,t)\in\Pi_T, \qquad (2)$$

решаемую в областях $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, $\Pi_T=\Pi\times(0,T)$, $\Omega=\{-\infty<x<\infty, -L<y<L, -H<z<0\}$, $\Pi=\{-\infty<x<\infty, -L<y<L\}$ при следующих начально-краевых условиях:

$$\varphi_y=0 \quad (y=\pm L); \quad \varphi_z=0 \quad (z=-H);$$
$$\varphi(x,y,0,t)=w(x,y,t); \quad w=w_y=0; \quad (y=\pm L);$$
$$w(x,y,0)=w^1(x,y); \quad w_t(x,y,0)=w^2(x,y);$$
$$w\to 0, \quad w_x\to 0, \quad \varphi\to 0 \qquad (|x|\to\infty). \qquad (3)$$

Данная начально-краевая задача описывает колебания ледового покрова, "примороженного" к стенкам бесконечного канала [1,2]. Здесь (x,y,z,t) – эйлеровы координаты; $\varphi(x,y,z,t)$, $w(x,y,t)$ – соответственно потенциал скорости течения идеальной жидкости и прогиб ледового покрова; $P(x,y,t)$ – внешняя нагрузка (заданная функция своих аргументов); постоянные $D>0$, $M>0$, $\rho_l>0$, $g>0$, $\tau>0$ – соответственно изгибная жесткость ледовой пластины, масса льда на единицу площади, плотность жидкости, ускорение силы тяжести, коэффициент запаздывания вязко-упругого материала Кельвина – Фойгта; $\nabla^4=\Delta^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}$. Искомыми являются функции $\varphi(x,y,z,t)$, $w(x,y,t)$.

В данной работе под решением задачи (1) – (3) понимается пара функций $w(x,y,t)$ и $\varphi(x,y,z,t)$, определенных на Ω_T и Π_T соответственно и удовлетворяющих рассматриваемой системе уравнений и краевым и начальным условиям, как непрерывные в Ω_T и Π_T функции. Совместная система уравнений динамики тонкой вязко-упругой или упругой пластины и жидкости исследовалась численно и аналитически для разных начально-краевых условий. (см., например, [3–7] и др.). Обзор работ, посвященных задачам с неограниченной тонкой упругой пластиной, приведен в [1]. Рассматриваемая задача была исследована численными методами в случае примороженного ледового покрова к двум стенкам [5, 8, 9], к одной стенке [10], и в случае незакрепленного ледового покрова в канале [11]. Задачи с телом, погруженным в жидкость, при наличии ледового покрова рассмотрены в [12, 13].

Разрешимость начально-краевых задач для уравнений Эйлера и динамики тонкой пластины подробно исследованы по отдельности [14–16]. Единственность решения в задаче протекания с заданным вихрем для нестационарных уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости доказана в работе [14]. Корректность начально-краевых задач для уравнения колебаний балки исследована в [17,18]. Существование решения задачи изгиба упругой пластинки с жестким включением доказана в [15]. Однозначная разрешимость задачи сопряжения двух упругих однородных балок, одна из которых моделируется балкой Эйлера — Бернулли, а другая балкой Тимошенко, доказана в [16].

Основной результат данной работы состоит в теореме, сформулированной далее в пункте 1.

1. Случай вязко-упругих колебаний. Пусть существуют два отличных от нуля решения w_1,φ_1 и w_2,φ_2 системы (1) – (3), удовлетворяющих разным начальным условиям:

$$w_1(x,y,0)=w_1^1(x,y) \quad w_{1,t}(x,y,0)=w_1^2(x,y),$$
$$w_2(x,y,0)=w_2^1(x,y) \quad w_{2,t}(x,y,0)=w_2^2(x,y).$$

Функции $w_1^0=w_1^1(x,y)-w_2^1(x,y)$ и $w_2^0=w_1^2(x,y)-w_2^2(x,y)$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$D\tau||\nabla^4 w_1^0||^2_{2,\Pi}+M||w_2^0||^2_{2,\Pi}+$$
$$\rho_l||\varphi^0(x,y,0)||^2_{2,\Pi}+\frac{D\tau}{2}||Y(x,y,0)||_{1,\Pi}\le\delta, \qquad (4)$$

где

$$Y(x,y,t)=\left(w^2_{xx}(x,y,t)+w^2_{yy}(x,y,t)+2w^2_{xy}(x,y,t)\right);$$
$$Y(x,y,0)=\left({w^0_{1,xx}}^2+{w^0_{1,yy}}^2+2{w^0_{1,xy}}^2\right);$$

$\varphi^0(x,y,z)=\varphi_1(x,y,z,0)-\varphi_2(x,y,z,0)$, и $||\cdot||_{2,\Pi}$ и $||\cdot||_{1,\Pi}$ – соответствующие нормы функций в пространствах $L_2(\Pi)$ и $L_1(\Pi)$.

Функции $w=w_1-w_2$ и $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ удовлетворяют следующей задаче:

$$Mw_{tt}+D\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w=-\rho_l\varphi_t-\rho_l g w; \qquad (5)$$
$$\Delta\varphi(x,y,z,t)=0 \qquad (x,y,z,t)\in\Omega_T; \qquad (6)$$
$$\varphi_y=0 \quad (y=\pm L), \quad \varphi_z=0 \qquad (z=-H);$$
$$\varphi_z=w_t \quad (z=0); \qquad (7)$$
$$w=0, \quad w_y=0 \qquad (y=\pm L); \qquad (8)$$
$$\varphi(x,y,z,t),\ w(x,y,t),\ w_x(x,y,t)\to 0 \quad (|x|\to\infty); \qquad (9)$$
$$w(x,y,0)=w_1^0; \quad w_t(x,y,0)=w_2^0. \qquad (10)$$

Теорема 1 *Для решения задачи* (5) – (10) *справедливы следующие оценки:*

$$||w||^2_{2,\Pi}+||w_t||^2_{2,\Pi}+||Y||^2_{2,\Pi}+||\nabla\varphi||^2_{2,\Omega}\le C\delta,$$

где C – константа, зависящая от параметров задачи.

Заметим, что решение (φ, w) задачи (5) – (10) обладает следующими свойствами:

$$\int\limits_{\Pi} w(x,y,t)\, d\Pi = \int\limits_{\Pi} w_1^0(x,y)\, d\Pi \quad t \in [0,T], \quad (11)$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi(x,y,z,t)|^2\, d\Omega = \int\limits_{\Pi} \varphi(x,y,0,t) w_t\, d\Pi, \quad (12)$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla\varphi d\Omega = \int\limits_{\Pi} F w_t d\Pi, \quad (13)$$

где $F = F(x,y)$ – произвольная непрерывная гладкая ограниченная в Π функция.

Интегрируя уравнение (6) по области $\Omega_R = \{-R < x < R, -L < y < L, -H < z < 0\}$, учитывая условия (7) и формулу Гаусса-Остроградского, получим после предельного перехода при $R \to \infty$:

$$\int\limits_{\Omega} \triangle\varphi\, d\Omega = \int\limits_{\Pi} \varphi_z(x,y,0,t)\, d\Pi =$$
$$= \int\limits_{\Pi} w_t(x,y,t)\, d\Pi = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi} w(x,y,t)\, d\Pi = 0.$$

Привлекая условия (10), выводим (11).

Умножим теперь уравнение (6) на φ и проинтегрируем полученное равенство по Ω_R. С учетом формулы Гаусса–Остроградского и условий (7) после предельного перехода при $R \to \infty$ приходим к равенству

$$-\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(\nabla\varphi\cdot\vec{n})\, d\partial\Omega =$$
$$= -\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega + \int\limits_{\Pi} \varphi(x,y,0,t) w_t\, d\Pi = 0,$$

из которого следует (12).

Умножим теперь уравнение (6) на $F(x,y)$ и проинтегрируем полученное равенство по Ω_R. С учетом формулы Гаусса – Остроградского и условий (7) после предельного перехода при $R \to \infty$ приходим к равенству

$$-\int\limits_{\Omega} \nabla\varphi\cdot\nabla F\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} F(x,y)(\nabla\varphi\cdot\vec{n})\, d\partial\Omega =$$
$$= -\int\limits_{\Omega} \nabla\varphi\cdot\nabla F\, d\Omega + \int\limits_{\Pi} F w_t\, d\Pi = 0,$$

из которого следует (12).

Уравнение (5) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(D\tau\nabla^4 w + D\int\limits_0^t \nabla^4 w d\tau + M w_t + \right.$$
$$\left. +\rho_l\varphi(x,y,0,t) + \rho_l g\int\limits_0^t w d\tau\right) = 0. \quad (14)$$

Интегрируя (14) по t, с учетом условий (10), приходим к тождеству

$$D\tau\nabla^4 w + D\int\limits_0^t \nabla^4 w d\tau + M w_t + \rho_l\varphi + \rho_l g\int\limits_0^t w d\tau =$$
$$= D\tau\nabla^4 w_1^0 + M w_2^0 + \rho_l\varphi(x,y,0,0) = V^0(x,y). \quad (15)$$

Умножим тождество (15) на $w_t(x,y,t)$ и проинтегрируем по области $\Pi_R = \{-R < x < R, -L < y < L\}$. Получим

$$D\tau\int\limits_{\Pi_R} w_t\nabla^4 w\, d\Pi_R + D\int\limits_{\Pi_R}\left(\int\limits_0^t \nabla^4 w d\tau\right) w_t\, d\Pi_R +$$
$$+ M\int\limits_{\Pi_R} w_t^2\, d\Pi_R + \rho_l\int\limits_{\Pi_R} \varphi w_t\, d\Pi_R +$$
$$+ \rho_l g\int\limits_{\Pi_R}\left(\int\limits_0^t w d\tau\right) w_t\, d\Pi_R = \int\limits_{\Pi_R} V^0 w_t\, d\Pi_R. \quad (16)$$

Последовательно интегрируя по частям слагаемые в тождестве (16), используя условия (7), (9) и свойство (12) и совершая в итоговом тождестве предельный переход по R, получим

$$M\int\limits_{\Pi} w_t^2 d\Pi + \rho_l\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega + \frac{D\tau}{2}\frac{d}{dt}Y(t) + \frac{D}{2}\frac{d^2}{dt^2}Z(t) +$$
$$+\frac{\rho_l g}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\Pi} u^2\, d\Pi = DY(t) + \rho_l g\int\limits_{\Pi} u_t^2\, d\Pi + \int\limits_{\Pi} V^0 w_t\, d\Pi, \quad (17)$$

где

$$Z(t) = \int\limits_{\Pi} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xy}^2) d\Pi.$$

Используя неравенство Коши, получим

$$\int\limits_{\Pi} V^0 w_t d\Pi \le \frac{M}{2}\int\limits_{\Pi} w_t^2 d\Pi + \frac{1}{2M}\int\limits_{\Pi} {V^0}^2 d\Pi.$$

Используя последнюю оценку, усилим правую часть тождества (17)

$$\frac{M}{2}\int\limits_{\Pi} w_t^2 d\Pi + \rho_l\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega +$$
$$+\frac{D\tau}{2}\frac{d}{dt}Y(t) + \frac{D}{2}\frac{d^2}{dt^2}Z(t) + \frac{\rho_l g}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\Pi} u^2\, d\Pi \le$$
$$\le DY(t) + \rho_l g\int\limits_{\Pi} u_t^2\, d\Pi + \frac{1}{2M}\int\limits_{\Pi} {V^0}^2 d\Pi. \quad (18)$$

Используя представление

$$w^2(x,y,t) = 2\int\limits_0^t w(x,y,\tau) w_\tau(x,y,\tau) d\tau$$

и неравенство Гельдера, получим

$$\int\limits_{\Pi} w^2 d\Pi \le T \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Pi} w_\tau^2 d\Pi \right) d\tau. \tag{19}$$

Усиливая правую часть (18) с помощью (19) и условий теоремы, и полагая

$$\widetilde{Y}(t) = M \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Pi} w_\tau^2 d\Pi \right) d\tau + \frac{1}{2} D\tau Y(t),$$

$$C_1 = \max\left(\frac{2}{\tau}, \frac{T\rho_l g}{2M} \right),$$

приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\left(\widetilde{Y} e^{-C_1 t} + e^{-C_1 t} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} DZ(t) + \frac{1}{2}\rho_l g \int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi \right)\right) +$$

$$+C_1 e^{-C_1 t} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} DZ(t) + \frac{1}{2}\rho_l g \int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi \right) \le \frac{\delta}{2M} e^{-C_1 t}. \tag{20}$$

Неравенство (20) проинтегрируем по t от 0 до t_1. Учитывая, что

$$\left.\frac{dZ(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi \right|_{t=0} = 0,$$

выводим

$$\widetilde{Y} e^{-C_1 t_1} + e^{-C_1 t_1} \frac{d}{dt_1}\left(\frac{1}{2} DZ(t_1) + \frac{1}{2}\rho_l \int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi \right) +$$

$$+C_1 e^{-C_1 t_1} \left(\frac{1}{2} DZ(t_1) + \frac{1}{2}\rho_l \int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi \right) +$$

$$+C_1^2 \int\limits_0^{t_1} e^{-C_1 t} \left(\frac{1}{2} DZ(t) + \frac{1}{2}\rho_l \int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi \right) \le$$

$$\le \widetilde{Y}(0) - \frac{\delta}{2MC_1}\left(e^{-C_1 t_1} - 1\right) \le \widetilde{Y}(0) + \frac{\delta}{2MC_1} =$$

$$= \frac{D\tau}{2} Y(0) + \frac{\delta}{2MC_1} \le \delta \left(\frac{2MC_1 + 1}{2MC_1} \right).$$

Первое, третье и четвертое слагаемые левой части полученного неравенства неотрицательны. Поэтому

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{1}{2} DZ(t_1) + \frac{1}{2}\rho_l \int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi \right) \le \delta \left(\frac{2MC_1 + 1}{2MC_1} \right).$$

Откуда выводим

$$Z(t) \le \frac{2\delta T C_2}{D}, \quad \int\limits_{\Pi} u^2 d\Pi \le \frac{2\delta T C_2}{\rho_l g}.$$

$$\widetilde{Y} \le \delta C_2 e^{C_1 T}, \quad Y(t) \le \frac{2\delta C_2}{D\tau} e^{C_1 T},$$

где $C_2 = (2MC_1 + 1)/2MC_1$. Возвращаясь в (19) и (18), получим

$$\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Pi} w_\tau^2 d\Pi \right) d\tau \le \frac{\delta C_2}{M} e^{C_1 T},$$

$$\int\limits_{\Pi} w^2 d\Pi \le \frac{T\delta C_2}{M} e^{C_1 T}, \quad \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 \, d\Omega \le \frac{2\delta C_2}{\rho_l} e^{C_1 T}.$$

Теорема доказана.

2. Случай упругих колебаний. Пусть существует два отличных от нуля решения w_1, φ_1 и w_2, φ_2 системы (1) – (3) в случае $\tau = 0$, удовлетворяющие разным начальным условиям

$$w_1(x, y, 0) = w_1^1(x, y) \quad w_{1,t}(x, y, 0) = w_1^2(x, y),$$

$$w_2(x, y, 0) = w_2^1(x, y) \quad w_{2,t}(x, y, 0) = w_2^2(x, y).$$

Функции $w_1^0 = w_1^1(x, y) - w_2^1(x, y)$ и $w_2^0 = w_1^2(x, y) - w_2^2(x, y)$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$\frac{\rho_l g}{2} ||w_1^0||_{2,\Pi}^2 + \frac{M}{2} ||w_2^0||_{2,\Pi}^2 + \frac{D}{2} ||Y(x, y, 0)||_{1,\Pi} \le \delta, \tag{21}$$

Докажем аналог теоремы 1 для упругих колебаний, заменив условие (4) на (21). Функции $w = w_1 - w_2$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$M w_{tt} + D\nabla^4 w = -\rho_l \varphi_t - \rho_l g w \tag{22}$$

и уравнениям и условиям (6) – (10). Заметим, что решение (φ, w) рассматриваемой задачи при $\tau = 0$ обладает свойствами (11) – (13). Последовательно умножая уравнение (22) на w_t, интегрируя результат по Π_R и совершая предельный переход по R с учетом условий (7) – (8), приходим к тождеству

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{2} \int\limits_{\Pi} w_t^2 \, d\Pi + \frac{\rho_l}{2} \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi^2 \, d\Omega + \right.$$

$$\left. + \frac{D}{2} \int\limits_{\Pi} Y(x, y, t) \, d\Pi + \frac{\rho_l g}{2} \int\limits_{\Pi} w^2 \, d\Pi \right) = 0, \tag{23}$$

Интегрируя тождество (23) по t, получим

$$\frac{M}{2} \int\limits_{\Pi} w_t^2(x, y, t) d\Pi + \frac{\rho_l}{2} \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi^2(x, y, z, t) d\Omega +$$

$$+ \frac{D}{2} \int\limits_{\Pi} Y(x, y, t) \, d\Pi + \frac{\rho_l g}{2} \int\limits_{\Pi} w^2(x, y, t) d\Pi =$$

$$= \frac{M}{2}\int\limits_{\Pi} w_t^2(x,y,0)d\Pi + \frac{\rho_l}{2}\int\limits_{\Omega} \nabla\varphi^2(x,y,z,0)d\Omega +$$

$$+\frac{D}{2}\int\limits_{\Pi} Y(x,y,0)\; d\Pi + \frac{\rho_l g}{2}\int\limits_{\Pi} w^2(x,y,0)d\Pi. \quad (24)$$

Привлекая условия теоремы, из (24) получим

$$\int\limits_{\Pi} w_t^2(x,y,t)d\Pi \le \frac{2}{M}\delta, \quad \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi^2 d\Omega \le \frac{2}{\rho_l}\delta,$$

$$\int\limits_{\Pi} Y(x,y,t)\; d\Pi \le \frac{2}{D}\delta, \quad \int\limits_{\Pi} w^2(x,y,t)d\Pi \le \frac{2}{\rho_l g}\delta.$$

Теорема доказана.

Заключение. Для решения рассмотренной системы уравнений динамики ледовой пластины и жидкости в канале доказана устойчивость по начальным данным. Рассмотрены случаи вязкоупругих и упругих колебаний.

Библиографический список

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice. — Kluwer Academic Publishers, 1996.

2. Hydroelasticity in marine technology. Edited by S. Malenica, N. Vladimir and I.Senjanovic. VIDICI d.o.o., 2015.

3. Sturova I.V. Unsteady three–dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // J. Fluid Mech. — V. 730.— 2013.

4. Жесткая В.Д., Джабраилов М.Р. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову с трещиной // ПМТФ. — V. 49. — 2008. — № 3.

5. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/1(85). DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.1-22.

6. Шишмарев К.А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2(85). DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-35.

7. Matiushina A.A., Pogorelova A.V., Kozin V.M. Effect of Impact Load on the Ice Cover During the Landing of an Airplane // International Journal of Offshore and Polar Engineering. — V. 26. — 2016.— № 1.

8. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves propagating along a channel with ice cover // European Journal of Mechanics B/Fluids. — V. 47. — 2014.

9. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. — V. 59. — 2016.

10. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Părău E.I. Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall // Journal Enginering Mathematic. — V. 68. — 2010.

11. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic waves in channel with free ice cover. Fluid Dynamics, 2015, №6.

12. Ткачева Л.А. Колебания цилиндрического тела, погруженного в жидкость, при наличии ледяного покрова // ПМТФ. — Т. 56. — 2012, № 6.

13. Шишмарев К.А. Математическая модель взаимодействия ледового покрова и гидродинамического диполя в канале // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2017. — № 1 (93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-30.

14. Vaigant V.A., Papin A.A. On the uniqueness of the solution of the flow problem with a given vortex // JMathematical notes. — 2014. — V. 96(6).

15. Хлуднев А.М. Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журн. индустр. матем., — 2011. — V. 4(1).

16. Neustroeva N.V., Lazarev N.P. Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic beams // ib. Elektron. Mat. Izv., V. 3. — 2016. — № 7.

17. Lu H., Sun L., Sun J. Existence of positive solutions to a non-positive elastic beam equation with both ends fixed // Boundary Value Problems. — 2012. — № 56.

18. Basson M., de Villiers M., van Rensburg N.F.J. Solvability of a Model for the Vibration of a Beam with a Damping Tip Body // Journal of Applied Mathematics. — 2014.