

Инверсия листа Мёбиуса

М.А. Чешкова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

An Inversion of a Mobius band

M.A. Cheshkova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Если на поверхности в E^3 существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней. Односторонней поверхностью является лист Мебиуса. В евклидовом пространстве E^3 рассматриваются две гладкие вектор-функции $s = s(u), l = l(u), u \in [-\pi, \pi]$. Предполагается, что $s = s(u)$ есть 2π -периодическая, $l = l(u) - 2\pi$ -антипериодическая.

С использованием найденных функций определяется уравнение листа Мёбиуса. Находятся дезориентирующие контуры. Исследуется инверсия листа Мёбиуса. Доказывается, что если лист Мебиуса не проходит через центр инверсии, то инверсия листа Мёбиуса есть лист Мёбиуса. Доказывается также, что если лист Мёбиуса не проходит через центр инверсии, то его дезориентирующие контуры при инверсии перейдут в дезориентирующие контуры. Рассматривается пример листа Мёбиуса. На торе задается замкнутая кривая с помощью 4π -периодической вектор-функции $\rho = \rho(u)$. Тогда функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi))$ есть 2π -периодическая, а функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi))$ есть 2π -антипериодическая. Определяются уравнения листа Мёбиуса и его инверсии. С помощью системы компьютерной математики строятся исследуемые поверхности.

Ключевые слова: лист Мёбиуса, инверсия, периодические функции.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-29

Введение. Если на поверхности в E^3 существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским.

If a closed curve (disorienting contour) exists the surface in E^3 , and the local orientation in the tangent space changes its sign while tracing this curve, then the surface is called a one-sided surface. A Mobius band is the one-sided surface. Two smooth vector-functions are considered in the Euclidian space E^3 : $s = s(u), l = l(u), u \in [-\pi, \pi]$. It is assumed that $s = s(u)$ is a 2π -periodic vector-function, and $l = l(u)$ is a 2π -antiperiodic vector-function. Equations for the Mobius band and the disorienting contours are found using the obtained functions. An inversion of Mobius band is studied. It is proved that if the Mobius band does not cross through the center of inversion, then the inversion of the Mobius band is a Mobius band. It is also proved that if the Mobius band does not cross through the center of inversion, then the disorienting contours of the Moebius band transit to disorienting contours also. An example of the Mobius band is considered. The closed curve is defined on a torus using 4π -periodic vector-function $\rho = \rho(v)$. Then vector-function $s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi))$ is a 2π -periodic vector-function and the function $l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi))$ is a 2π -antiperiodic vector-function. Equations of the Mobius band and its inversion are developed using the obtained functions. Examples of these surfaces are constructed with mathematical software packages.

Key words: Mobius band, inversion, periodic function.

Библиография работ на эту тему приведена в работе [2].

К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3, с. 304], римская поверхность [3, с. 305; 4, с. 302], поверхность Боя [3, с. 305], бутылка Клейна [3, с. 306]. Римская поверхность, поверхность Боя и скрещенный колпак с крышкой являются моделью проективной плоскости. Односторонние поверхности были исследованы автором [5–13].

1. Основной результат. В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим две гладкие вектор-функции $s = s(u)$, $l = l(u)$, $u \in [-\pi, \pi]$. Предполагается, что $s = s(u)$ есть 2π -периодическая, $l = l(u)$ есть 2π -антипериодическая функции, не равные нулю на этом промежутке, и векторное произведение $[s'(u), l(u)] \neq 0$.

С помощью этих функций построим пример односторонней поверхности, которая является моделью листа Мёбиуса, и исследуем её.

Поверхность M зададим параметрически в виде

$$r(u, v) = s(u) + vl(u), \quad (1)$$

$u \in [-\pi, \pi], v \in [-1, 1]$.

Теорема 1. Поверхность M определяет модель листа Мёбиуса, а кривая

$$dk : r(u, 0) = s(u) \quad (2)$$

– дезориентирующий контур поверхности M .

Доказательство. Рассмотрим лист Мёбиуса как фактор-пространство [14, с. 75]

$$M^* = [-\pi, \pi] \times [-1, 1] / [(-\pi, -v) \sim (\pi, v)].$$

Действительно, $r(-\pi, -v) = s(-\pi) + (-v)l(-\pi) = s(\pi) - (-v)l(\pi) = r(\pi, v)$.

Определим вектор нормали вдоль кривой $r(u, 0) = s(u)$.

$$\text{Имеем } r_u(u, 0) = s'(u), r_v(u, 0) = l(u).$$

Так как $s'(u + 2\pi) = s'(u)$, $l(u + 2\pi) = -l(u)$, то $n(u, 0) = [s'(u), l(u)] = -n(u + 2\pi, 0)$.

Следствие. Любая кривая $dk1 : r(u, v(u)) = s(u) + v(u)l(u)$ на листе Мёбиуса, где $v(u)$ 2π -антипериодическая функция, есть также дезориентирующий контур.

Доказательство. Действительно, $r_u(u, v(u)) = s'(u) + v(u)l'(u)$, $r_v(u, v(u)) = l(u)$. $n(u, v(u)) = [r_u(u, v(u)), r_v(u, v(u))] = [s'(u), l(u)] + v(u)[l'(u), l(u)] = -n(u + 2\pi, v(u + 2\pi))$. Таким образом, кривая $dk1 : r(u, v(u)) = s(u) + v(u)l(u)$ есть дезориентирующий контур.

Рассмотрим инверсию [15, с. 482]

$$r^* = \frac{m^2 r}{\langle r, r \rangle} \quad (3)$$

относительно сферы радиуса m с центром в начале координат.

Теорема 2. Если лист Мёбиуса не проходит через центр инверсии, то инверсия листа Мёбиуса есть лист Мёбиуса.

Доказательство. Пусть функция $r = r(u, v)$, $u \in [-\pi, \pi], v \in [-1, 1]$ определяет модель листа Мёбиуса. Склейка прямоугольника определяется равенствами $(-\pi, -v) = r(\pi, v)$.

Рассмотрим функцию $\psi = \langle r, r \rangle$. По условию теоремы $\psi \neq 0$ на поверхности.

$$\text{Нетрудно проверить, что } \psi(\pi, v) = \psi(-\pi, -v).$$

$$\text{Имеем } r^*(-\pi, -v) = r^*(\pi, v).$$

Поверхность $r^* = r^*(u, v)$ есть модель листа Мёбиуса.

Обозначим поверхность, которая получается из поверхности M путем инверсии (3), через MI .

Теорема 3. Если лист Мёбиуса не проходит через центр инверсии, то дезориентирующие контуры поверхности M при инверсии (3) перейдут в дезориентирующие контуры поверхности MI .

Доказательство. Имеем

$$r_u^*(u, v) = \frac{m^2}{\psi(u, v)} \left(-\frac{\psi'_u(u, v)r(u, v)}{\psi(u, v)} + r_u(u, v) \right)$$

$$r_v^*(u, v) = \frac{m^2}{\psi(u, v)} \left(-\frac{\psi'_v(u, v)r(u, v)}{\psi(u, v)} + r_v(u, v) \right).$$

$$n^*(u, v) = \frac{m^4}{\psi(u, v)^2} \left(n(u, v) - \frac{\psi'_u(u, v)}{\psi(u, v)} [r(u, v), r_v(u, v)] + \frac{\psi'_v(u, v)}{\psi(u, v)} [r(u, v), r_u(u, v)] \right).$$

Рассмотрим функцию $\psi(u, v) = \langle s(u), s(u) \rangle + v^2 \langle l(u), l(u) \rangle + 2v \langle s(u), l(u) \rangle$.

Замечаем, что

$$\psi(u + 2\pi, v(u + 2\pi)) = \psi(u, v(u));$$

$$\psi'_u(u + 2\pi, v(u + 2\pi)) = \psi'_u(u, v(u));$$

$$\psi'_v(u + 2\pi, v(u + 2\pi)) = -\psi'_v(u, v(u));$$

$$n(u + 2\pi, v(u + 2\pi)) = -n(u, v(u)), v(u + 2\pi) = -v(u).$$

$$\text{Итак, } n^*(u + 2\pi, v(u + 2\pi)) = -n^*(u, v(u)).$$

Теорема доказана.

2. Пример листа Мёбиуса M .

Рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ , заданную 4π -периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической.

Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, то функция

$$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi)) \quad (4)$$

есть 2π -периодическая, не равная нулю, а вектор-функция

$$l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi)) \quad (5)$$

есть 2π -антипериодическая, не равная нулю.

Рассмотрим тор в E^3

$$r(u, v) =$$

$$((a + b\cos(v))\cos(u), (a + b\cos(v))\sin(u), b\sin(v)). \quad (6)$$

Зададим линию $v = ku/2$, где k – нечетное число.

Тогда вектор-функция

$$\begin{aligned} \rho(u) &= ((a + b\cos(ku/2))\cos(u), \\ &(a + b\cos(ku/2)\sin(u), b\sin(ku/2)) \end{aligned} \quad (7)$$

$u \in [-2\pi, 2\pi]$ есть 4π -периодическая (обмотка тора).

Положим $b = 1, k = 1$.

Имеем

$$s(u) = (a\cos(u), a\sin(u), 0),$$

$$l(u) = (\cos(u)\cos(u/2), \sin(u)\cos(u/2), \sin(u/2)).$$

Лист Мёбиуса M зададим в виде

$$r = (a\cos(u) + v\cos(u)\cos(u/2), a\sin(u) +$$

$$v\sin(u)\cos(u/2), v\sin(u/2)), u \in [-\pi, \pi], v \in [-1, 1].$$

Рассмотрим линию $u = 0$.

Имеем $r = (a - v)(1, 0, 0), v \in [-1, 1]$. Это отрезок прямой. При $a > 1$ он не содержит центр инверсии $O(0, 0, 0)$.

Для определенности положим $a = 2$.

Построим дезориентирующий контур $dk : v = 0$ (средняя окружность) и дезориентирующий контур $dk1 : v = 4/5\sin(u/2)\sin(u)$ (рис. 1).

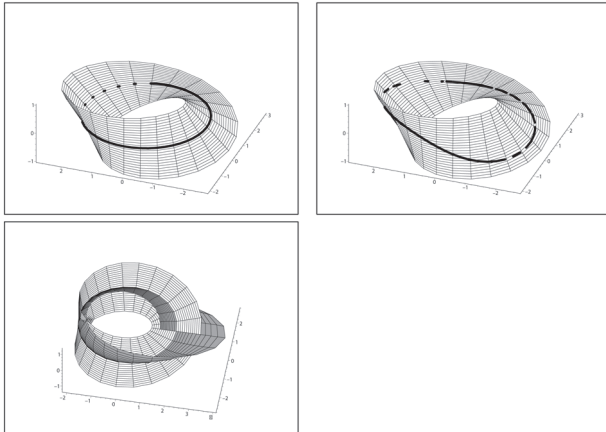


Рис. 1. Дезориентирующий контур $dk : v = 0$, дезориентирующий контур $dk1 : v = 4/5\sin(u/2)\sin(u)$. Поверхности $M, MI, m = 2$

Исследуем инверсию (3) поверхности M . Рассмотрим следующие случаи:

- 1) $m = a = 2$; 2) $m = 3 = a + 1$; 3) $m = 1 = a - 1$; 4) $m = 7/2 > 3$; 5) $m = 4/5 < 1$.

Прямая, содержащая прямолинейную образующую $r = r(0, v), v \in [-1, 1]$ листа Мёбиуса, проходит через центр инверсии. Образующая $r = r(0, v), v \in [-1, 1]$ преобразуется в отрезок прямой. Остальные прямолинейные образующие преобразуются в дуги окружностей.

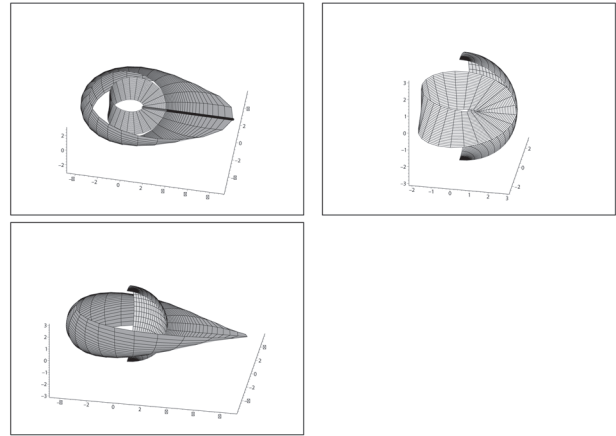


Рис. 2. Поверхности $M, MI, m = 3$ и фрагмент сферы

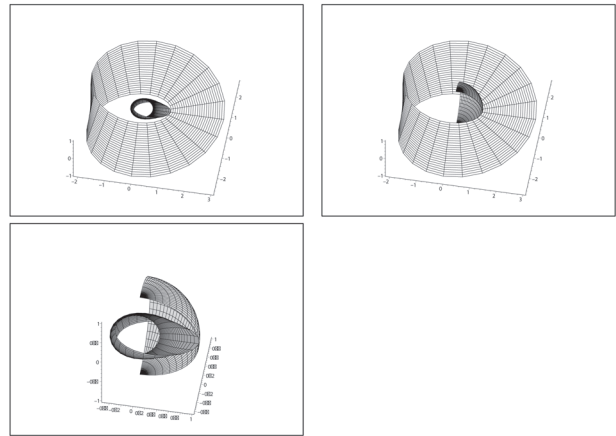


Рис. 3. Поверхности $M, MI, m = 1$ и фрагмент сферы

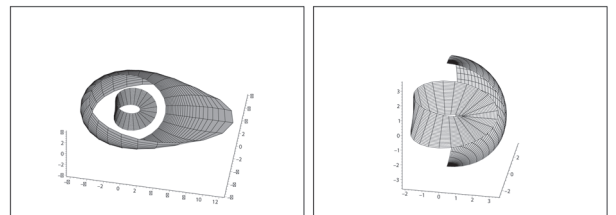


Рис. 4. Поверхности $M, MI, m = 7/2$ и фрагмент сферы

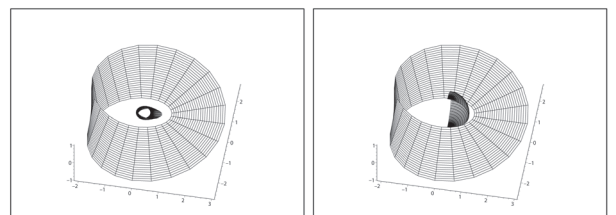


Рис. 5. Поверхности $M, MI, m = 4/5$ и фрагмент сферы

Случай 1), $m = a = 2$. Построим лист Мёбиуса M (светлый), его инверсию MI (темный), кривую MS (светлая) и MSI (темная) для $m = 2$. Поверхности M, MI пересекаются (см. рис. 1).

Случай 2), $m = 3 = a + 1$. Построим лист Мёбиуса M (светлый), его инверсию MI (темный) для $m = 3$ и фрагмент сферы (см. рис. 2). Поверхности M, MI касаются, причем M внутри сферы, а MI вне сферы.

Случай 3), $m = 1 = a - 1$. Построим лист

Мёбиуса M (светлый), его инверсию MI (темный) для $m = 1$. Поверхности M, MI касаются, причем MI внутри сферы, а M вне сферы (см. рис. 3).

Случай 4), $m = 7/2 > 3$. Построим лист Мёбиуса M (светлый), его инверсию MI (темный) для $m = 7/2$ и фрагмент сферы (см. рис. 4).

Случай 5), $m = 4/5 < 1$. Построим лист Мёбиуса M (светлый), его инверсию MI (темный) для $m = 4/5$ и фрагмент сферы (см. рис. 5).

Библиографический список

- Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Soc., 1:1 (1900).
- Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мёбиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, № 5.
- Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. – М., 2006.
- Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М., 1981.
- Чешкова М.А. Об одной модели бутылки Клейна // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2016. – № 1(89). DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-32.
- Чешкова М.А. Односторонние поверхности // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2015. – № 1/2(85). DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-30.
- Чешкова М.А. О плоском листе Мёбиуса // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2013. – № 1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2013)1.2-09.
- Cirilo-Lombaeeto D.I Coherent states for a quantum particle on Mobius // Письма в журнал “Физика элементарных частиц и атомного ядра”. – 2009. – Т. 6, № 5.
- Словеснов А.В. Ленты Мёбиуса с плоской метрикой // Вестник Московского гос. ун-та. Серия 1: Математика. – 2009. – № 5.
- Шалагинов М.Ю., Иванов М.Г., Долгополов М.В. Задачи с оператором Лапласа на топологических поверхностях // Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Серия: Физ-мат. науки. – 2011. – № 2(23).
- Борисюк А.Р. Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Общий случай // Математический сборник. – 2015. – Т. 196, № 4.
- Набеева Л.Р. Классификация узлов в утолщенной бутылке Клейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. – 2012. – № 26 (280).
- Карпухин М.А. Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна // Математический сборник. – 2013. – Т. 204, № 12.
- Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. – М., 1995.
- Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М., 1966.