УДК 514.142

Пересечения полиномиальных линий с плоскостями

И.В. Поликанова

Алтайский государственный педагогический университет
(Барнаул, Россия)

Intersections of Polinomial Curves with Planes

I.V. Polikanova

Altai State Pedagogical University (Barnaul, Russia)

Существуют различные подходы в определении таких характеристик линий, как соприкасающаяся плоскость, уплощение и его порядок. Различие в подходах обусловлено тем, что линии рассматриваются в разных пространствах: аффинном и проективном. Поэтому формулировки даются в терминах соответствующих структур: для кривых в аффинном пространстве – через линейную зависимость или независимость систем векторов, для кривых в проективном пространстве – через кратности пересечения линии с плоскостями. Взаимопроникновение двух точек зрения может быть реализовано посредством понятия кратности пересечения линии с поверхностью, общего для обоих пространств, либо переходом к аффинным картам для линий в проективном пространстве. В работе раскрыты связи между дифференциальным и алгебраическим определениями указанных понятий. И хотя равносильность обоих трактовок в области их общей применимости, по-видимому, подразумевается (аргументация по этому вопросу в литературе нам не встречалась), представляется полезным привести строгие обоснования, тем более, что имеются несоответствия, как частичные, так и принципиальные. В данной статье нами дана алгебраическая характеризация точек уплощения порядка k, соответствующая дифференциально-геометрической трактовке; исследованы кратности пересечений полиномиальных линий с плоскостями в n-мерном аффинном пространстве; выявлены необходимое и достаточное условия невырожденности полиномиальных кривых. Примером полиномиальных линий служат кривые Безье, играющие важную роль в компьютерной графике.

Ключевые слова: вырожденная линия, кратность пересечения линии с поверхностью, k-я соприкасающаяся плоскость, точки уплощения, полиномиальные линии.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-26

There are different approaches to determining such characteristics of a curve as osculating plane, flattening and its order. The difference in approaches is because the curves are considered in different spaces: affine and projective. Therefore, the wordings are given in terms of the relevant structures: for curves in affine space – through a linear dependence or independence of the vector systems, for curves in the projective space – through the intersection multiplicity of a curve and the planes. The interpenetration of the two points of view can be realized through the common to both spaces concept of intersection multiplicity of a curve and a surface or through a transition to affine charts for the curves in the projective space. The paper discloses the connection between the differential and algebraic definitions of these concepts. Although the equivalence of both interpretations in terms of general applicability, apparently, is meant (the author has not met the discussion on this question in literature), it is useful to provide a rigorous foundation, especially since there are partial and principal discrepancies. In this paper, an algebraic characterization of the flattening of order k, which corresponds to differential-geometric interpretation, is presented. The multiplicity of intersections of polynomial curves with the planes in n-dimensional affine space is investigated. A necessary and sufficient condition of non-degeneracy of polynomial curves is found. Bezier curves playing an important role in computer graphics are the example of such polynomial lines.

Key words: Degenerational curve, multiplicites of intersection of curve with surface, k-dimensional osculating plane, flattenings, polinomial curves.

1. Кратности пересечений, соприкосновения, уплощения. Будем рассматривать достаточно гладкие линии в n-мерном действительном аффинном пространстве A^n, задаваемые параметризацией

$$\vec{r} = \vec{r}(u) = (f_1(u), ..., f_n(u)),\ u \in I \qquad (1)$$

(I – числовой промежуток).

Будем обозначать точку линии, соответствующую параметру t, через $M(t)$. При этом точки, соответствующие разным параметрам, будем считать различными, даже если их координаты совпадают, в отличие от *точки-носителя*, определяемой исключительно своими координатами. Таким образом, если линия имеет точки самопересечения, то точке-носителю будут соответствовать несколько *параметрических точек.*

Множество точек пересечения линии $\gamma : (1)$ с гиперповерхностью $\sigma : F(x_1, ..., x_n) = 0$ определяется множеством решений уравнения:

$$F(f_1(u), ..., f_n(u)) = 0. \qquad (2)$$

Если равенство (2) выполняется тождественно, то линия целиком содержится в σ. Линия, целиком содержащаяся в некоторой гиперплоскости, называется *вырожденной.*

Обозначим $g(u) = F(f_1(u), ..., f_n(u))$.

Кратностью точки пересечения $M(t) \in \gamma \cap \sigma$ называется [1, с. 31] целое число m, такое, что t является решением системы уравнений:

$$g(u) = g'(u) = ... = g^{(m-1)}(u) = 0, \qquad (3)$$

а $g^{(m)}(t) \neq 0$.

Кратность точки пересечения $M(t)$ линии $\gamma :$ (1) с гладкой поверхностью δ, задаваемой системой уравнений

$$F_i(x_1, ..., x_n) = 0,\ i = 1, ..., s,$$

есть наименьшая из кратностей пересечения γ с каждой гиперповерхностью $F_i^{-1}(0)$ [2, с. 287]. Некоторые авторы используют для данного понятия термин «порядок соприкосновения» (order of contact [1, 2]). Мы в выборе терминологии учли замечание В.И. Арнольда [1, с. 31].

k-й соприкасающейся плоскостью линии γ в точке $M(t)$, $1 \leq k \leq n-1$, называется [3,4] k-мерная плоскость, определяемая набором линейно независимых векторов $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{r}\,''(t)$, ..., $\vec{r}\,^{(k)}(t)$, и точкой $M(t) \in \gamma$. 1-ю соприкасающуюся плоскость принято называть *касательной прямой*, а $(n-1)$-ю – *соприкасающейся гиперплоскостью.*

Точка $M(t)$ линии называется *точкой уплощения порядка* k, $1 \leq k \leq n-1$, если в ней система векторов $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$,..., $\vec{r}\,^{(k)}$ линейно независима, а добавление к ней вектора $\vec{r}\,^{(k+1)}$ делает её линейно зависимой [3]. Точки уплощения всех порядков называются *точками уплощения.*

Определение отражает локальную "близость" линии к соприкасающейся плоскости соответствующей размерности, а именно: гладкая линия содержится в k-мерной плоскости тогда и только тогда, когда все её точки являются точками уплощения порядка k ([4], леммы 2, 3). Точка $M(t)$ является точкой уплощения тогда и только когда, когда определитель $D[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), ..., \vec{r}\,^{(n)}(t)]$, составленный из координат векторов $\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), ..., \vec{r}\,^{(n)}(t)$, равен нулю.

Приведенные выше понятия не зависят от выбора параметризации. Если точке-носителю M линии соответствуют несколько параметрических точек, то одна из них может быть точкой уплощения, а другие не быть таковыми.

Пример 1. Линия $\gamma : \vec{r} = (t^4 - t^3, t^3 - 2t^2 + t)$ проходит через начало координат, которому соответствуют две параметрические точки $M(0)$ и $M(1)$: точка $M(0)$ является точкой уплощения 1-ого порядка, а $M(1)$ не является точкой уплощения. Касательная к γ в точке $M(0)$ – ось O_y. Кратность её пересечения с γ в точке $M(0)$ равна 3, а в точке $M(1)$ равна 1.

С. С. Анисов [5, 6] определяет порядок изолированной точки уплощения иначе: как разность между кратностью пересечения линии с предельной соприкасающейся гиперплоскостью в этой точке (предел соприкасающихся гиперплоскостей в близлежащих точках кривой) и размерностью пространства, а в неизолированных особых точках порядок уплощения полагается равным бесконечности. При таком подходе порядок точки уплощения может быть как угодно большим.

Пример 2. Линия $\gamma : \vec{r} = (t, t^n)$ проходит через начало координат $M(0)$. Согласно принятому нами определению $M(0)$ – точка уплощения 1-ого порядка. Касательной прямой к γ в точке $M(0)$ (соприкасающейся гиперплоскостью в A^2) служит ось O_x. Кратность пересечения её с γ определяется кратностью корня 0 уравнения $t^n = 0$, которая равна n. Следовательно, порядок уплощения точки $M(0)$ по С.С. Анисову равен $n-2$.

Предложение 1. *Точка $M(t)$ пересечения k-мерной плоскости с линией $\gamma : (1)$ имеет кратность $\geq s$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), ..., \vec{r}\,^{(s-1)}(t)$ принадлежат k-мерному векторному направляющему подпространству плоскости.*

Доказательство. Условие того, что линия γ : (1) в A^n имеет в точке $M(t)$ пересечение с k-мерной плоскостью

$$\sigma^k :\ b_{i1}x_1 + ... + b_{in}x_n + b_{i0} = 0,\ i = 1, ..., n-k \quad (4)$$

кратности $\geq s$ означает, что t – корень уравнений

$$b_{i1}f_1(u) + ... + b_{in}f_n(u) + b_{i0} = 0,\ i = 1, ..., n-k, \quad (5)$$

и всех уравнений

$$b_{i1}f_1'(u)+...+b_{in}f_n'(u)=0,\ \ ...$$
$$b_{i1}f_1^{(s-1)}(u)+...+b_{in}f_n^{(s-1)}(u)=0, \quad i=1,...,n-k,$$

получающихся их последовательным дифференцированием. А это означает, что векторы $\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t),...,\ \vec{r}^{\ (s-1)}(t)$ принадлежат k-мерному направляющему векторному подпространству

$$L_\sigma : b_{i1}x_1+...+b_{in}x_n=0,\ i=1,...,n-k, \quad (6)$$

плоскости σ^k. Обращая рассуждения, придём к обратному утверждению.

Следствие 1. *Соприкасающаяся гиперплоскость линии в точке $M(t)$ имеет кратность пересечения в ней не меньше n.*

Данный факт берётся за определение соприкасающейся гиперплоскости в [6] и не является эквивалентном приведённого выше определения. Согласно предложению 1 равносильным будет определение соприкасающейся гиперплоскости как любой гиперплоскости, компланарной векторам $\vec{r}\ '(t),\vec{r}\ ''(t),...,\ \vec{r}^{\ (n-1)}(t)$, т. е. в точках уплощения порядка $< n-1$ соприкасающаяся гиперплоскость определена, но не однозначно.

Предложение 2. *Точка $M(t)$ линии γ является точкой уплощения порядка $\le k$, тогда и только тогда, когда существует k-мерная плоскость, имеющая с γ в точке $M(t)$ пересечение кратности $\ge k+2$.*

Доказательство. Пусть $M(t)\in\gamma$ – точка уплощения порядка $\le k$. Тогда система векторов $\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t),...,\vec{r}^{\ (k+1)}(t)$ линейно зависима, а, следовательно, принадлежит некоторому k-мерному векторному подпространству L. Тогда k-мерная плоскость, проходящая через точку $M(t)$ и имеющая направляющее подпространство L, согласно предложению 1, будет иметь с γ кратность пересечения $\ge k+2$.

Наоборот, пусть некоторая k-мерная плоскость σ имеет с γ в точке $M(t)$ пересечение кратности $\ge k+2$. По предложению 1 векторы $\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t),...,$ $\vec{r}^{\ (k+1)}(t)$ принадлежат k-мерному направляющему векторному подпространству L_σ плоскости σ. Следовательно они линейно зависимы, а число линейно независимых среди них не превосходит k. Значит, точка $M(t)$ является точкой уплощения порядка $\le k$. Утверждение доказано.

Заменив предложение 2 на контрапозиционное утверждение, получим:

Следствие 2. *Всякая k-мерная плоскость имеет с линией γ в точке пересечения $M(t)$ кратность $\le k+1$ тогда и только тогда, когда $M(t)$ – точка уплощения порядка $> k$.*

Заменив в следствии 2 число k на $k-1$ и объединив полученный результат с предложением 2, получим следующую характеризацию точек уплощения.

Следствие 3. *Точка $M(t)$ линии γ является точкой уплощения порядка k тогда и только тогда, когда существует k-мерная плоскость, имеющая с γ пересечение в точке $M(t)$ кратности $\ge k+2$, а всякая $(k-1)$-мерная плоскость, проходящая через точку $M(t)$, имеет в ней с γ пересечение кратности $\le k$.*

Следствие 4. *k-мерная плоскость пересекает линию, не имеющую точек уплощения, в параметрических точках кратности, не превосходящей $k+1$.*

Предложение 3. *Если линия не имеет точек уплощения, то k-мерная плоскость имеет с ней точку пересечения $M(t)$ кратности $k+1$ тогда и только тогда, когда она соприкасающаяся в ней.*

Доказательство. Утверждение вытекает из предложения 1 и следствия 4, стоит лишь заметить, что отсутствие точек уплощения влечёт линейную независимость векторов $\vec{r}\ '(t),\vec{r}\ ''(t),...,$ $\vec{r}^{\ (k)}(t)$ при всех k.

Следствие 5. *Гиперплоскость пересекает линию, не имеющую точек уплощения, в параметрической точке с кратностью n тогда и только тогда, когда она соприкасающаяся в этой точке.*

Предложение 4. *Если линия имеет с плоскостью σ точку пересечения $M(t)$ кратности s, то с плоскостью δ, содержащей σ, она имеет в этой точке кратность пересечения $\ge s$.*

Доказательство. Пусть L_σ и L_δ – направляющие векторные подпространства плоскостей σ и δ соответственно. Если $\sigma\subset\delta$, то $L_\sigma\subset L_\delta$. По предложению 1, если s – кратность точки $M(t)$ пересечения плоскости σ с линией γ : (4), то $\vec{r}\ '(t),\vec{r}\ ''(t),...,\ \vec{r}^{\ (s-1)}(t)\in L_\sigma$. Следовательно, $\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t),...,\ \vec{r}^{\ (s-1)}(t)\in L_\delta$. По предложению 1 точка $M(t)$ пересечения δ с γ имеет кратность $\ge s$, что и требовалось доказать.

2. Пересечения полиномиальных линий с плоскостями. *Полиномиальной линией степени m* или, короче, PC^m будем называть множество в A^n, задаваемое параметризацией (1), где $f_1(u),...,f_n(u)$ – *координатные многочлены*, наивысшая степень которых равна m.

Теорема 1. *Пусть PC^m γ задаётся параметризацией*

$$\vec{r}=(a_{1j}u^j,a_{2j}u^j,...,a_{nj}u^j), \quad u\in I, \qquad (7)$$

где по индексу $j=0,1,...,m$ предполагается суммирование, причем, хотя бы один из коэффициентов a_{1m},..., a_{nm} отличен от нуля. Линия γ невырождена тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$(a_{ij})_{i=1,...,n}^{j=1,...,m} \qquad (8)$$

равен n.

Доказательство. Вырожденность γ означает, что её координатные многочлены удовлетворяют уравнению некоторой гиперплоскости

$$b_1 x_1 + ... + b_n x_n + b_0 = 0, \tag{9}$$

т.е. имеет место тождество

$$b_1 a_{1j} u^j + ... + b_n a_{nj} u^j + b_0 = 0, \tag{10}$$

влекущее равенства

$$b_1 a_{1j} + ... + b_n a_{nj} = 0,\ j = 1, ..., m,$$
$$b_1 a_{10} + ... + b_n a_{n0} + b_0 = 0.$$

Будем рассматривать их как систему $m+1$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных b_1,...,b_n,b_0. Система имеет ненулевое решение (причём среди b_1,...,b_n не все нули) только в случае, когда ранг матрицы (8) меньше n. Доказано.

Следствие 6. *PC^m в A^n при $m < n$ вырождена.*

Следствие 7. *PC^n в A^n невырождена тогда и только тогда, когда определитель матрицы (8) не равен нулю. В этом случае в некоторой АСК PC^n задаётся параметризацией*

$$\vec{r} = (u, u^2, u^3, ..., u^n), \quad u \in I. \tag{11}$$

Невырожденную PC^n в A^n будем называть *эникой* по аналогии с коникой ($n = 2$), кубикой ($n = 3$.) Нам представляется удобным зарезервировать этот краткий и поэтичный термин как родовой для всего класса этих кривых с учетом их кратности.

Теорема 2. *Невырожденная PC^m пересекается со всякой гиперплоскостью не более чем в m точках.*

Доказательство. Действительно, уравнение (10), определяющее множество точек пересечения невырожденной PC^m (7) с некоторой гиперплоскостью (9), имеет степень не выше m, и следовательно, не более m корней. Доказано.

Теорема 3. *Пусть $m \geq n$ для невырожденной PC^m γ в A^n. Тогда всякая k-мерная плоскость пересекает её не более, чем в $m-n+k+1$ точках с учётом их кратности, т. е. если кратности точек пересечения равны m_1, m_2, ..., m_s, то $m_1 + m_2 + ... + m_s \leq m - n + k + 1$.*

Доказательство. Предположим противное: некоторая k-мерная плоскость σ^k в A^n пересекает PC^m γ в точках X_1,...,X_s с кратностями m_1,...,m_s такими, что $m_1 + m_2 + ... + m_s > m - n + k + 1$. Проведём через σ^k произвольную гиперплоскость. Поскольку PC^m – невырожденная кривая, то найдётся точка $Y_1 \in \gamma$, не содержащаяся в этой гиперплоскости. Тогда через σ^k и точку Y_1 можно провести $(k+1)$-мерную плоскость σ^{k+1}. Продолжая ту же конструкцию, получим гиперплоскость, содержащую точки X_1,...,X_s, Y_1,...,Y_{n-1-k} линии γ. В силу предложения 4 сумма их кратностей $S \geq m_1 + m_2 + ... + m_s + n - 1 - k$. Согласно допущению $S > (m - n + k + 1) + (n - 1 - k) = m$, что противоречит теореме 2. Доказано.

Теорема 4. *Эника (11) в A^n – гладкая класса C^∞ линия, не имеющая точек уплощения.*

Доказательство. Заметим, что формулы (11) задают вложение числового промежутка I в R^n, а, значит, – единую карту для всей кривой. Так как все координаты кривой (11) являются бесконечное число раз дифференцируемыми функциями, то эника – гладкая линия класса C^∞.

Поскольку определитель

$$D[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', ..., \vec{r}\,^{(n)}] =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2u & 3u^2 & ... & A^1_{n-1}u^{n-2} & A^1_n u^{n-1} \\ 0 & 2 & 6u & ... & A^2_{n-1}u^{n-3} & A^2_n u^{n-2} \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n! \end{vmatrix} =$$
$$= 2!3!...n! \neq 0$$

(здесь $A^k_n = \frac{n!}{(n-k)!}$), то кривая не имеет точек уплощения.

Замечание. Сравнивая теорему 3 и следствие 4, видим зазор в $m - n$ единиц, допускающий возможность точек уплощения у PC^m при $m > n$. В действительном аффинном пространстве эта возможность может и не быть реализована. Например, линия $\gamma : \vec{r} = (t, 6t^2 + t^4)$, $t \in R$, не имеет действительных точек уплощения, но имеет 2 мнимые точки уплощения. Изучению количеств точек уплощения на различных типах кривых и их связей с другими проективными объектами посвящены работы [7–10]. Вопрос о существовании точек уплощения у полных полиномиальных кривых нами не исследовался.

Из теорем 3 и 4 вытекает

Следствие 8. *Всякая k-мерная плоскость пересекает энику не более чем в $k+1$ точках с учётом их кратности, т.е. если кратности точек пересечения равны m_1, m_2, ..., m_s, то $m_1 + m_2 + ... + m_s \leq k + 1$.*

Следствие 9. Система алгебраических уравнений $b_{i1}t + ... + b_{in}t^n + b_{i0} = 0$, $i = 1, ..., s$, ранг матрицы $(b_{ij})_{i=1,...,s,\ j=1,...,n}$ которой равен $n - k$, имеет не более $k + 1$ решений с учётом их кратности.

Следствие 10. *При всех $k = 1, ..., n-1$ k-ая соприкасающаяся плоскость к энике пересекает её в единственной точке (кратности $k+1$).*

Доказательство. Так как эника γ не имеет точек уплощения, то согласно предложению 3 точка $M(t)$ соприкосновения γ с k-й соприкасающейся плоскостью σ имеет кратность $k + 1$. А по следствию 8 других точек пересечения γ с σ быть не может. Утверждение доказано.

Библиографический список

1. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. — М., 1988.

2. Uribe-Vargas R. On Vertices, Focal Curvatures and Differential Geometry of Spase Curves // Bull. Braz. Math. Soc., new series. — 2005. — Т. 36(3).

3. Лейко С.Г. Р-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многоообразия // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1998. — № 6 (433).

4. Поликанова И.В. Некоторые свойства линий с аффинно-эквивалентными дугами // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. — Вып. 2/ под ред. Е. Д. Родионова. — Барнаул, 2016.

5. Анисов С.С. Выпуклые кривые в RP^n //Локальные и глобальные задачи теории особенностей: сб. ст. к 60-летию академика Владимира Игоревича Арнольда: труды МИАН 221. — М., 1998.

6. Anisov C.C. Projective convex curves // The Arnold-Gelfand mothematical seminars: geometry and singularity theory. — Boston, 1997.

7. Arnold V.I. On the number of flattening points on space curves // Amer. Math. Soc. Transl. (2) — 1995. — V. 171.

8. Седых В.Д. Теорема о четырёх вершинах пространственной кривой // Функциональный анализ и его приложения. — 1992. — Т. 26. — Вып. 1.

9. Седых В.Д. Теорема о четырёх вершинах плоской кривой и её обобщения // Соросовский образовательный журнал. — 2000. — Т. 6. — № 9.

10. Uribe-Vargas R. On 4-flattening Theorems and the Curves of Charateodory, Barner and Segre // Journal of Geometry. — 2003. — Т. 77.