УДК 517.95 + 556.342.2 + 539.217

Локальная разрешимость в классе непрерывных функций задачи о движении жидкости в деформируемой пористой среде *

А.А. Папин, М.А. Токарева

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On local Solvability of the Problem of Fluid Motion in a Deformable Porous Medium in the Class of Continuous Functions

A.A. Papin, M.A. Tokareva

Altai State University (Barnaul, Russia)

Процесс фильтрации вязкой жидкости в деформируемой пористой среде, обладающей преимущественно вязкими свойствами, описывается системой уравнений, которая включает в себя уравнения сохранения массы для жидкой фазы и пороупругого скелета, закон сохранения импульса в форме закона Дарси, учитывающего движение твердого скелета, закон сохранения импульса системы в целом и уравнение для эффективного давления и пористости в форме реологического закона типа Максвела. Если плотности жидкости и пороупругого скелета берутся постоянными, то система является замкнутой, а в одномерном случае в переменных Лагранжа сводится к одному нелинейному уравнению для функции пористости. Данная работа посвящена математическому обоснованию предложенной модели. Доказаны две теоремы о локальной разрешимости задачи фильтрации жидкости в пороупругой среде. Приводится краткий обзор по теме работы, даются постановка задачи и формулировка основных результатов статьи. Установлена локальная теорема существования гладкого решения начально-краевой задачи в классе непрерывных функций (теорема 1). Установлена локальная разрешимость задачи в гельдеровских классах (теорема 2). Теорема 1 доказана на основе теоремы Гильберта для краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, а теорема 2 – на основе теоремы Тихонова – Шаудера о неподвижной точке. Основным моментом является доказательство физического принципа максимума для пористости.

Ключевые слова: фильтрация, пороупругость, магма, закон Дарси, глобальная разрешимость.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-25

The process of viscous fluid filtration in a deformable porous medium with mainly viscous properties is described by a system of equations that includes the equation of mass conservation for the liquid phase and the poroelastic skeleton, the law of momentum conservation in the form of Darcy law that considers the motion of the solid skeleton, the law of momentum conservation for the system as a whole, and the equation for effective pressure and porosity in the form of Maxwell's rheological law. When liquid density and the poroelastic skeleton are taken to be constant, the system is closed and it reduces to one nonlinear equation of the porosity function in the Lagrange variables for the one-dimensional case. This paper is devoted to the mathematical justification of the proposed model. Two theorems on the local solvability of the problem of fluid filtration in a poroelastic medium are proved. Paragraph 1 provides an overview of the work. In paragraph 2, we state the problem and formulate the main results of the paper. In paragraph 3, we establish a local existence theorem for a smooth solution of an initial-boundary value problem in the class of continuous functions (theorem 1). In paragraph 4, we establish the local solvability of the problem in Holder classes (theorem 2). Theorem 1 is proved on the basis of the Hilbert theorem for the boundary value problem for an ordinary differential equation of the second order, and Theorem 2 is proved on the basis of the Tikhonov-Schauder theorem on a fixed point. The main point is the proof of the physical maximum principle for porosity.

Key words: filtration; poroelasticity; magma; Darcy law; global solvability.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №16-08-00291, №17-41-220314.

Введение. Задачи математического моделирования фильтрации жидкости в пороупругих средах представляют особый интерес в связи с их широким использованием в различных областях исследований. Данные модели находят применение при описании различных процессов, например: движение нефти и газа в деформируемой пористой среде, движение грунтовых вод, магмы, процесс деформирования льда [1–8]. Во всех этих моделях возникают отличительные характеристики, которые делают невозможным единый подход к моделированию этих процессов, поэтому в настоящее время существует много различных моделей пороупругих сред. Все эти модели являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении их использования для решения конкретных задач. Вопросы обоснования моделей фильтрации в деформируемой пористой среде исследованы только в отдельных модельных случаях [9–13].

1. Постановка задачи. В работе рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. В предположении, что пороупругая среда обладает преимущественно вязкими свойствами, данный процесс может быть описан следующим нелинейным уравнением для пористости ϕ [14, 15]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x\partial t}-g(\rho_{tot}+\rho_f)\right)\right), \tag{1}$$

которое решается в области $(x,t)\in Q_T=Q\times(0,T), \Omega=(0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$\phi|_{t=0}=\phi^0;$$

$$\left(k(\phi)\left((1-\phi)\tfrac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x\partial t}-g(\rho_{tot}+\rho_f)\right)\right)\Big|_{x=0,1}=0, \tag{2}$$

где функция $G(\phi)$ определяется равенством $dG/d\phi=\xi(\phi)/(1-\phi)$; $\rho_{tot}=(1-\phi)\rho_s+\phi\rho_f$ – общая плотность, ρ_f,ρ_s – постоянные плотности жидкой и твердой фаз соответственно; g – плотность массовых сил, $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации, $\xi(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости (заданные функции).

Близкие по структуре уравнения рассматриваются в монографии [16].

Определение 1. Решением задачи (1)–(2) называется функция ϕ, $(\phi,\phi_t)\in C(Q_T)\cap C^2(\Omega)$, $0<\phi<1$, удовлетворяющая уравнению (1) и начальным и граничным условиям (2), как непрерывная в $\bar{Q}_T$ функция.

Теорема 1. Пусть данные задачи (1)–(2) подчиняются следующим условиям: 1) функции $k(\phi),\xi(\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi\in(0,1)$ и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2}\le k(\phi)\le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4};$$

$$\frac{1}{\xi(\phi)}=a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1};$$

$$0<R_1\le a_0(\phi)\le R_2<\infty,$$

где $k_0,\alpha_i,R_i, i=1,2$ – положительные постоянные, $q_1,...,q_4$ – фиксированные вещественные числа; 2) функция $g(x)$, начальная функция $\phi^0(x)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости $g\in C^1(\bar{Q}_T)\cap C^1(\Omega)$, $\phi^0\in C^2(\bar{\Omega})$, и неравенствам $0<m_0\le\phi^0(x)\le M_0<1$, $|g(x,t)|\le g_0<\infty$, $x\in\bar{\Omega}$, где m_0,M_0,g_0 – известные положительные константы. Тогда задача (1)–(2) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение t_0 такое, что $\phi,\phi_t\in C(Q_{t_0})\cap C^2(\Omega)$. Более того, $0<\phi(x,t)<1$ в $\bar{Q}_{t_0}$.

Определение 2. Решением задачи (1)–(2) называется функция $\phi\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, такая, что $0<\phi<1$. Эта функция удовлетворяет уравнению (1) и начальным и граничным условиям (2) как непрерывная в $\bar{Q}_T$ функция.

Теорема 2. Пусть дополнительно к условиям теоремы 1 функция g и начальная функция ϕ^0 удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$g\in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T),\quad \phi^0\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T),$$

а также неравенствам

$$0<m_0\le\phi^0(x)\le M_0<1, |g(x,t)|\le g_2<\infty, x\in\bar{\Omega},$$

где m_0,M_0 – известные положительные константы. Тогда задача (1)–(2) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение t_0 такое, что

$$\phi(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T).$$

Более того, $0<\phi(x,t)<1$ в $\bar{Q}_{t_0}$.

2. Локальная разрешимость в непрерывных классах. Положим $z=\partial G/\partial t$ и вместо уравнения (1) с условиями (2) рассмотрим начально-краевую задачу для системы относительно функций G,z :

$$z=\frac{\partial G}{\partial t}, G|_{t=0}=G^0(x); \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{z}{d(G)}-\tfrac{\partial}{\partial x}\left(a(G)\tfrac{\partial z}{\partial x}-b(G)\right)=0;\\ \left(a(G)\tfrac{\partial z}{\partial x}-b(G)\right)\big|_{x=0,x=1}=0,\end{gathered} \tag{4}$$

где $d(G)=(1-\phi(G))\xi(\phi(G)), a(G)=k(\phi(G))(1-\phi(G)), b(G)=k(\phi(G))g((1-\phi(G))\rho_s+(1+\phi(G))\rho_f), G(m_0)\le G^0(x)\le G(M_0)$.

Поскольку $0<m_0\le\phi^0(x)\le M_0<1$ и $G(m_0)\le G^0(x)\le G(M_0)$, то из (3) при выполнении неравенства $\max_{(x,t)\in Q_t}|z(x,t)|\le c_0$ имеем, что найдется значение t_0, такое, что для всех $t \le t_0$ справедливы оценки вида

$$G_1(m_0) = G(m_0) - c_0 t_0 \le G(x,t) \le$$
$$\le G(M_0) + c_0 t_0 = G_2(M_0);$$
$$0 < G^{-1}(G_1(m_0)) \le \phi(x,t) \le \tag{5}$$
$$\le G^{-1}(G_2(M_0)) < 1.$$

Пусть $G_0(x,t)$ – непрерывная по x и t функция, удовлетворяющая неравенству (5) и имеющая непрерывную по x, t производную $\partial G_0/\partial x$. Подставляя эту функцию в коэффициенты уравнения и условий (4), приходим к линейной задаче, в которой $a > 0$, $b > 0$ и $d > 0$. Решение этой задачи единственно. Существование следует из теоремы Гильберта [17, с. 334] для обыкновенных линейных уравнений второго порядка. Переменная t играет роль параметра. Тем самым $(z, z_x, z_{xx}) \in C(Q_{t_0})$. После нахождения $z(x,t)$ можно найти из (3) новое значение $G(x,t)$, удовлетворяющее (5).

Для доказательства разрешимости задачи (3)–(4) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть $z^i(x,t)$ и $G^i(x,t)$ – решение задачи

$$\frac{\partial G^{i+1}}{\partial t} = z^{i+1}, G^{i+1}(x,0) = G^0(x); \tag{6}$$

$$\frac{z^{i+1}}{d(G^i)} - \frac{\partial}{\partial x}(a(G^i)\frac{\partial z^{i+1}}{\partial x} - b(G^i)) = 0;$$
$$(a(G^i)\frac{\partial z^{i+1}}{\partial x} - b(G^i)) \mid_{x=0,x=1} = 0, \tag{7}$$

где $i = 0, 1, 2, ...$ Подставляя на первом шаге $G^0(x)$ в (7), находим $z^1(x,t)$. После этого из (6) находим $G^1(x,t)$ и т.д. При каждом i существует единственное решение $z^i(x,t)$ и $G^i(x,t)$, удовлетворяющее (5). Докажем, что $z^i(x,t)$ и $G^i(x,t)$ фундаментальны в $C(Q_{t_0})$. Для этого сначала получим равномерные по i оценки. При $i = 0$ коэффициенты (6) – (7) удовлетворяют условиям

$$d_1 \le d(G^0) \le d_2, h_1 \le a(G^0) \le h_2, |b(G^0)| \le b_2, \tag{8}$$

где d_1, d_2, h_1, h_2, b_2 зависят с учетом неравенства (5) только от m_1, M_1 и фиксированных ρ_s, ρ_f, g_0, K_0.

Умножая (6) на z^1 и интегрируя по $x \in [0,1]$, с учетом (7) получим

$$\int_0^1 (\frac{1}{d(G^0)}|z^1|^2 + \frac{1}{2}a(G^0)|z_x^1|^2)dx \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int_0^1 |b(G^0)|^2 \frac{1}{a(G^0)}dx.$$

Поэтому

$$\int_0^1 (|z^1|^2 + |z_x^1|^2)dx \le c_1(m_0, M_0) = \frac{b_2}{\min\{1, d_1/2\}}.$$

Для функции $v(x) = z^2(x) - \int_0^1 z^2(x)dx$ имеем $\int_0^1 v(x)dx = 0$. Поэтому $v(x) = \int_a^x v_\xi d\xi$, $v(a) = 0$.

Следовательно,

$$(\max_{(x,t)\in Q_t} z^1)^2 \le (\int_0^1 z^2 dx +$$
$$+2(\int_0^1 z^2 dx)^{1/2}(\int_0^1 z_x^2 dx)^{1/2}) \le 3c_1(m_0, M_0).$$

Из (6) имеем

$$|G^1(x,t) - G^0(x)| = |\int_0^1 z^t(x,t)dx| \le \sqrt{3c_1(m_0, M_0)t}.$$

Берем в (5) $c_0 = \sqrt{3c_1}$ и для достаточно малого t_0 приходим к неравенству (5) $G_1(m_0) \le G^1(x,t) \le G_2(M_0)$. В терминах ϕ имеем $0 < m_1 \equiv G^{-1}(G_1(m_0)) \le \phi \le G^{-1}(G_2(M_0)) \le M_1 < 1$. Условия (15) для d, a, b изменяются следующим образом: нужно заменить m_0, M_0 на m_1, M_1, т.е. $d_1^1 \le d(G^1) \le d_2^1$, $h_1^1 \le a(G^1) \le h_2^1$, $|b(G^1)| \le b_2^1$. Теперь берем G^1 и снова подставляем в (7). Получим

$$(\max_{(x,t)\in Q_t} z^2)^2 \le 3c_2(m_1, M_1).$$

Наконец, в (5) берем $c_0 = \sqrt{3c_2(m_1, M_1)}$ и для достаточно малого t_0^1 приходим к неравенству $G_1(m_0) \le G^2(x,t) \le G_2(M_0)$. Чтобы t_0^1 не менялось, нужно на первом шаге взять в (15) вместо m_0, M_0 соответственно m_1, M_1. Повторяя процесс, получим, что $\max_{(x,t)} |z^i|$ оценивается одной и той же постоянной, следовательно, в (5) выбирается одно и то же t_0. Итак, $\max_{(x,t)} |z^i(x,t)| \le c_0(m_1, M_1)$, $m_1 \le G^i(x,t) \le M_1$. После этого из (7) сначала получим $|z_x^i(x,t)| \le c_3$ и, следовательно, $|G_x^i| \le c_4$,. Значит, $|z_{xx}^i| \le c_5$ равномерно по i. Положим $y^{i+1} = z^{i+1} - z^i, \omega^{i+1} = G^{i+1} - G^i$. Из (6) – (7) выводим

$$\frac{\partial \omega^{i+1}}{\partial t} = y^{i+1}, \quad \omega^{i+1}|_{t=0} = 0; \tag{9}$$

$$\frac{y^{i+1}}{d(G^i)} + A_1\omega^i - \frac{\partial}{\partial x}(a y_x^{i+1} + A_2\omega^i) = 0;$$
$$(a y_x^{i+1} + A_2\omega^i)|_{x=0,x=1} = 0, \tag{10}$$

где коэффициенты A_1, A_2 легко восстанавливаются и являются ограниченными. Имеем из (10) следующее неравенство:

$$\int_0^1 (|y^{i+1}|^2 + |y_x^{i+1}|^2)dx \le c_6 \int_0^1 |\omega^i|^2 dx \le c_6 \max_x |\omega^i|^2. \tag{11}$$

Из (9) следует, что

$$\max_x |\omega^{i+1}| \le c_7 \int_0^t \max_x |y^{i+1}| d\tau.$$

С учетом последнего неравенства для функции $v^i(t) = \max_x |y^i(x,t)|^2$ получим $v^{i+1}(t) \le c_8 \int_0^t v^i(\tau) d\tau$. Следовательно [18], $v^i(t) \le (c_8 T)^i v^0 / i! \to 0$ при $i \to \infty$. После этого легко устанавливается, что последовательности z^i, G^i являются фундаментальными в $C(Q_{t_0})$ и имеют пределы $z(x,t) \in C(Q_{t_0})$ и $G(x,t) \in C(Q_{t_0})$. Фундаментальными являются также последовательности z_x^i, z_{xx}^i, G_t^i. Переходя в (9), (10) к пределу при $i \to \infty$ получим, что предельные функции удовлетворяют задаче (3), (4). Теорема доказана.

3. Локальная разрешимость в гельдеровских классах. Разрешимость в малом устанавливается с помощью теоремы Тихонова–Шаудера о неподвижной точке [19].

Положим $\omega(x,t) = G(\phi) - G(\phi^0)$. Представим уравнения (3),(4) в виде

$$z = \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \omega|_{t=0} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{z}{d(\omega)} - \frac{\partial}{\partial x}(a(\omega)\frac{\partial z}{\partial x} - b(\omega)) = 0, \tag{13}$$

$$(a(\omega)\frac{\partial z}{\partial x} - b(\omega))\ |_{x=0,x=1} = 0. \tag{14}$$

В качестве банахова пространства выберем пространство $C^{2+\zeta,1+\gamma}(\overline{Q}_{t_0})$, где ζ – любое число из отрезка $(0,\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, γ – любое число из отрезка $(0,\beta)$, $\beta \in [0,1)$. Положим

$$V = \{\bar\omega \in C^{2+\alpha,1+\beta}(\bar{Q}_{t_0}) | \bar\omega|_{t=0} = 0,$$

$$0 < \frac{m^0}{2} \le \phi(\bar\omega) \le \frac{M^0+1}{2} < \infty,$$

$|\bar\omega|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}} \le K_1, |\bar\omega|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{T_0}} \le K_1 + K_2\}$,

где K_1 – произвольная положительная постоянная, а положительная постоянная K_2 будет указана позже. Построим оператор Λ, отображающий V в V. Пусть $\bar\omega \in V$. Используя (4), определим функцию z как решение задачи:

$$\begin{gathered} \tfrac{z}{d(\bar\omega)} - (a(\bar\omega) z_x - b(\bar\omega))_x = 0, \\ (a(\bar\omega) z_x - b(\bar\omega))\ |_{x=0,1} = 0; \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$0 < d_1 = \frac{1-M_0}{a_0 M_0^{\alpha_1}(1-m_0)^{\alpha_2 - 1}} \le d(\bar\omega) \le$$

$$\le \frac{1-m_0}{a_0 m_0^{\alpha_1}(1-M_0)^{\alpha_2-1}} = d_2,$$

$$0 < h_1 = k_0^{-1} m_0^{q_1}(1-M_0)^{q_2+1} \le a(\bar\omega) \le$$

$$\le k_0 M_0^{q_3}(1-m_0)^{q_4+1} = h_2,$$

$$|b(\bar\omega)| \le k_0 M_0^{q_3}(1-m_0)^{q_4} g_0((1-m_0)\rho_s +$$

$$+(1+M_0)\rho_f) = b_2.$$

Уравнение для z является равномерно эллиптическим. Поскольку $d(\bar\omega) > 0$, то задача (15) имеет единственное классическое решение. Доказательство существования полностью следует технике, изложенной в [20, с. 144, 177]. Тогда для решения задачи (15) имеет место шаудеровская оценка:

$$|z|_{2+\alpha,\Omega} \le N_1(K_1, m_0, M_0).$$

Покажем непрерывность функции z по переменной t.

Положим $u = (z(x,t_2) - z(x,t_1))(t_2-t_1)^{\beta}$. Поскольку функции $z(x,t_i), (i=1,2)$ являются решением уравнения (15), то функция u удовлетворяет равенству

$$a(\bar\omega(x,t_2))u_{xx} + a_x(\bar\omega(x,t_2))u_x - \frac{1}{d(\bar\omega(x,t_2))} =$$

$$= (z_{xx}(\bar\omega(x,t_1))(a(\bar\omega(x,t_1)) - a(\bar\omega(x,t_2))) +$$

$$+ z_x(\bar\omega(x,t_1))(a(\bar\omega(x,t_1)) - a(\bar\omega(x,t_2))) + z(\bar\omega(x,t_1))\cdot$$

$$\cdot(\frac{1}{d(\bar\omega(x,t_1))} - \frac{1}{d(\bar\omega(x,t_2))}) +$$

$$+ b_x(\bar\omega(x,t_2)) - b_x(\bar\omega(x,t_1)))(t_2-t_1)^{-\beta}.$$

Откуда следует, что функция u ограничена, поэтому имеем $|z|_{2+\alpha,\beta,Q_{t_0}} \le N_2(K_1, m_0, M_1)$.

По найденному z из уравнения (12) найдем ω:

$$\omega = \int_0^t z d\tau,$$

и, следовательно,

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}} \le N_3(1 + t|z_{xx}|_{\alpha,\beta,Q_{t_0}}),$$

где постоянная $N_3 = N_3(K_1, m_0, M_0)$.

Положим $N_4 = \max\{N_1, N_3\}$. Выберем K_2 таким образом, чтобы $N_4 \le (K_1+K_2)/2$. Тогда при $t_0 = 2(K_1+K_2)^{-1}$ получаем оценку

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}} \le K_1 + K_2.$$

Из представления для функции ω имеем $|\omega|_{0,Q_{t_0}} \le N_5 t_0$. Используя для ω неравенство вида [19, с. 35]

$$|u|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}} \le C|u|^c_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}} |u|^{1-c}_{0,Q_{t_0}},$$

$$c = (1+\alpha)(2+\alpha)^{-1},$$

выводим, что существует достаточно малое значение t_0, зависящее от K_1 и K_2, такое, что справедлива оценка $|\omega|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}} \le K_1$.

Таким образом, оператор Λ отображает множество V в себя при достаточно малых t_0. Используя полученные выше оценки, легко доказать непрерывность оператора Λ в норме пространства $C^{2+\zeta,1+\gamma}(\overline{Q}_{t_0})$. Согласно теореме Тихонова–Шаудера существует неподвижная точка $\omega \in V$ оператора Λ. Единственность решения задачи (1)–(2) доказывается стандартным образом.

Имеем $\phi \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0})$.

Теорема 2 доказана.

Заключение. В работе доказана локальная разрешимость начально-краевой задачи одномерного движения жидкости в пороупругой среде в классе непрерывных функций.

Библиографический список

1. Fowler A. Mathematical Geoscience // Interdisciplinary Applied Mathematics. — 2011 — 36.

2. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. Акад. наук СССР. — 1944. — Т. VIII, №4.

3. Золотарев П.П. Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом // Инженерный журнал. — 1964. — Т. IV.

4. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. — 1956. — Т. XX.

5. Бочаров О.Б. О фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в сжимаемом пласте // Динамика сплошной среды / СО АН СССР, Ин-т гидродинамики. — 1981. — Вып. 50.

6. Vedernikov V.V., Nikolaevskii V.N. Mechanics equations for porous medium saturated by a two-phase liquid // Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza. — 1978. — No. 5.

7. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2014. — № 2.

8. Rudyak V.Ya., Bocharov O.B., Seryakov A.V. Hierarchical sequence of models and deformation peculiarities of porous media saturated with fluids // Proceedings of the XLI Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2013), July 1-6, — St-Petersburg, 2013.

9. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein M.I. Degenerate dispersive equations arising in the stady of magma dynamics // Nonlinearity. — 2007. — V. 20.

10. Abourabia A.M., Hassan K.M., Morad A.M. Analytical solutions of the magma equations for rocks in a grnular matrix // Chaos Solutions Fract. — 2009. — V. 42.

11. Geng Y., Zhang L. Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equation // Applied Mathematics and computation. — 2010. — V. 217.

12. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic medium // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. — 2015. — Т. 8, № 4.

13. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-28.

14. Папин А.А., Токарева М.А. О разрешимости в целом начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение магмы // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2017. — №1(93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-22.

15. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series 722 (2016) 012037. Doi:10.1088/1742-6596/722/1/012037.

16. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. — Новосибирск, 1983.

17. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М., 1981.

18. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации — Барнаул, 2009.

19. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

20. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М., 1973.