УДК 551.345 + 539.3

Модель изотермической внутренней эрозии в деформируемом грунте *

А.А. Папин, А.Н. Сибин, К.А. Шишмарев

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Model of Isothermal Internal Erosion in Deformable Soil

A.A. Papin, A.N. Sibin, K.A. Shishmarev

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается математическая модель изотермической внутренней эрозии в пороупругой среде. При достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы и закон Дарси для воды, воздуха и подвижных твердых частиц. Движение твердого скелета моделируется уравнением сохранения массы с учетом фазового перехода «твердый скелет – подвижные частицы», законом сохранения импульса системы в целом и уравнением для эффективного давления и пористости в форме реологического закона типа Максвела. Дается постановка задачи и краткий обзор моделей внутренней суффозии, описаны гипотезы, которые определяют интенсивность фазового перехода. Проводится преобразование возникшей системы уравнений составного типа. В результате преобразований для насыщенности водной фазы возникает вырождающееся на решении параболическое уравнение, для специальным образом подобранного «приведенного давления» – эллиптическое уравнение и уравнения первого порядка для пористости и скорости грунта. Имеется аналогия с классической моделью Маскета – Леверетта двухфазной фильтрации.

Ключевые слова: многофазная фильтрация, пороупругая среда, суффозия, фазовый переход, насыщенность, эффективное давление.

In this paper, a mathematical model of isothermal internal erosion in a poroelastic medium is considered. Removal of moving solid particles from a flow region happens after achieving a certain value of a filtration rate. The equations of mass conservation and Darcy law for water, air and moving solids are taken as constitutive equations of the mathematical model. The motion of the solid skeleton is modeled by the equation of mass conservation with "solid skeleton-moving particles"phase transition, the law of momentum conservation for the entire system, and an equation for effective pressure and porosity in the form of Maxwell's rheological law. In section 1, a statement of the problem is given and a brief review of internal suffusion models is presented. In section 2, the hypotheses determining intensity of the phase transition are described. In section 3, development of the composite type system is discussed. A degenerate parabolic equation for the saturation of water phase, an elliptic equation for a so-called "reduced pressure and a first-order equation for the porosity and velocity of soil are the development results. It is shown that there is a similarity with the classical Musket-Leverett model of two-phase filtration.

Key words: multiphase flow, poroelastic medium, suffusion, phase transition, saturation, effective pressure.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-24

1. Постановка задачи. Изучаются математические вопросы моделирования процессов напорной фильтрации подземных вод и внутренней суффозии. Грунт рассматривается как многофазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды (i = 1), воздуха (i = 2) и подвижных твердых частиц (i = 3). Доля пор в грунте (i = 4) определяется пористостью $\phi = (V_1 + V_2 + +V_3)/V$, где $V = V_1 + V_2 + V_3 + +V_3$ – общий объем грунта, V_1, V_2, V_3, V_4 – соответственно объемы воды, воздуха, подвижных твердых частиц и скелета грунта.

Уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазового перехода имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3 \vec{u}_3) = \dot{m}, \qquad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-41-220314.

$$\frac{\partial \rho_4}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_4 \vec{u}_4) = -\dot{m}, \qquad (3)$$

где $\dot{m}$ – интенсивность фазового перехода (суффозионный поток); $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, , \vec{u}_4$ – соответственно истинные скорости воды, воздуха, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\rho_1 = \phi s_1 \rho_1^0$, $\rho_2 = \phi s_2 \rho_2^0$, $\rho_3 = \phi s_3 \rho_3^0$, $\rho_4 = (1-\phi)\rho_4^0$ – приведенные плотности воды, воздуха, подвижных твердых частиц грунта и скелета; $s_1 = V_1/(V_1 + V_2 + V_3), s_2 = V_2/(V_1 + V_2 + V_3), s_3 = V_3/(V_1 + V_2 + V_3)$, – концентрации воды (насыщенность), воздуха и подвижных твердых частиц в порах ($s_1 + s_2 + s_3 = 1$); $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0, \rho_4^0$ – истинные плотности воды, воздуха, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ – оператор градиента, $x = (x_1, x_2, x_3)$. В рассматриваемом случае $\rho_3^0 = \rho_4^0$, так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта.

Уравнения сохранения импульса для воды и подвижных твердых частиц грунта берем в виде [3–6]

$$s_i \phi(\vec{u}_i - \vec{u}_4) = -K_0(\phi) \frac{\overline{k}_{0i}}{\mu_i} (\bigtriangledown p_i + \rho_i^0 \vec{g}),\ i = 1, 2, 3;$$
$$p_3 - p_1 = P_1(s_1, s_2), \quad p_2 - p_3 = P_2(s_1, s_2). \qquad (4)$$

Здесь $K_0(\phi)$ – симметрический тензор фильтрации пористой среды; $\overline{k}_{0i}$ – относительные фазовые проницаемости ($\overline{k}_{0i} = \overline{k}_{0i}(s_i) \geq 0, \overline{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0$, $0 \leq s_i \leq 1$); μ_i – коэффициенты динамической вязкости; $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести; p_i – давления фаз, P_1, P_2 – заданные функции.

Система уравнений (1)–(4) относительно характеристик $\vec{u}_i$, p_i и s_i несмешивающихся жидкостей, движущихся в недеформируемой пористой среде, в изотермическом случае (температура в потоке постоянна) замыкается либо предположением о несжимаемости жидкостей, т.е. $\rho_i^0 = const$, либо условием $\rho_i^0 = \rho_i^0(p_i)$.

Пример 1. Пусть $s_2 = 0$, $s = s_1$, тогда $1 - s = s_3$. Разность фазовых давлений удовлетворяет соотношению вида [7]

$$p_3 - p_1 = p_c(s, x) \geq 0, \qquad (5)$$

где p_c – заданная функция обладающая свойствами [8, 9]

$$p_c(x, s) = p_0(x) j(s), \quad p_0(x) > 0, \quad j(s) \geq 0;$$
$$j(0) = 0, \quad j(1) = 1, \quad \frac{\partial j}{\partial s} < 0;$$

Система (1)–(4), (5) в случае неподвижного грунта ($\vec{u}_4 = 0$) и постоянных истинных плотностей ρ_i^0 сводится к эллиптико-параболической системе и уравнению кинетики вида [10, 11, 12]

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 a \bigtriangledown s - b\vec{v} + \vec{F});$$
$$\nabla \cdot \vec{v} = 0;$$
$$\rho_3^0 \frac{\partial (1-\phi)}{\partial t} = -\dot{m};$$
$$-\vec{v} = K_0(\phi) k(s) \bigtriangledown p + \vec{f}.$$

Здесь искомыми являются функции s, p, ϕ и $\vec{v}$; функции a, b, $\vec{F}$, k, $\dot{m}$, $\vec{f}$ – заданные функции.

Принципиальным моментом является учет сжимаемости пористой среды. Следуя [13–15], дополним систему (1)–(4) реологическим уравнением для пористости и условием равновесия "системы в целом":

$$\nabla \cdot \vec{u}_4 = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta_t(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_4 \cdot \nabla p_e); \qquad (6)$$

$$\nabla \cdot ((1-\phi)\eta(\frac{\partial \vec{u}_4}{\partial \vec{x}} + (\frac{\partial \vec{u}_4}{\partial \vec{x}})^*)) - \nabla p_{tot} + \rho_{tot}\vec{g} = 0, \qquad (7)$$

где $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление; $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление; $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3$, $p_s = p_4$ – соответственно давления жидкой и твердой фаз; $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_4^0 + \phi(s_1\rho_1^0 + s_2\rho_2^0 + s_3\rho_4^0)$ – общая плотность; $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ – коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости грунта есть заданные функции (модельные зависимости: $\frac{1}{\xi(\phi)} = \phi^m/\nu, \beta_t(\phi) = \phi^b \beta_\phi$, где $b = 1/2$, $m \in [0, 2]$, $n = 3$, μ, ν, β_ϕ – положительные параметры пороупругой среды [13, 14]).

Система (1)–(7) записана в эйлеровых координатах $\vec{x} \in R^3$, $t \in [0, T]$. Истинные плотности ρ_i^0 принимаются постоянными. Поскольку $\sum_{i=1}^{3} s_i = 1$, то неизвестными являются 19 скалярных величин: s_1, s_2, s_3, ϕ, p_1, p_2, p_3, p_4, $3\vec{u_1}$, $3\vec{u_2}$, $3\vec{u_3}$, $3\vec{u_4}$. Для их определения служат также 19 скалярных уравнений: четыре уравнения неразрывности (1) - (3), девять уравнений закона Дарси (4), два уравнения для скачка давлений, реологическое соотношение (6), три уравнения равновесия (7).

2. Интенсивность фазового перехода. На основе обработки экспериментальных данных были предложены различные формулы для интенсивности фазового перехода. В работе [2]

$$\dot{m}_{er} = \rho_3^0 \lambda (1-\phi) s_3 ||\vec{v}_3||. \qquad (8)$$

где λ – определяемая экспериментально функция (отвечает за устойчивость грунта суффозионному воздействию); $\vec{v}_3 = \phi s_3(\vec{u}_3 - \vec{u}_4)$ – поток подвижных частиц грунта.

Обобщение формулы (8) предложено в серии работ [2, 5, 16]

$$\dot{m} = \dot{m}_{er} - \dot{m}_{dep}, \qquad (9)$$

где $\dot{m}_{er}$ поток твердых частиц (процесс суффозии), $\dot{m}_{dep}$ поток осевших твердых частиц (процесс кольматации).

Для определения $\dot{m}_{dep}$ в работе [2] предлагается использовать соотношение

$$\dot{m}_{dep} = \rho_3^0 \lambda (1-\phi) \frac{s_3^2}{s_{cr}} ||\vec{v}_3||. \qquad (10)$$

Здесь s_{cr} – критическое значение концентрации подвижных твердых частиц грунта при достижении которой ($s_3 = s_{cr}$) процессы суффозии и кольматации уравновешивают друг друга. Подставив (8) и (10) в (9), получим соотношение [2]

$$\dot{m} = \rho_3^0 \lambda (1-\phi)\phi(s_3 - \frac{s_3^2}{s_{cr}})||\vec{v}_3||.$$

В работе [17] проведен анализ экспериментальных данных, из которого следует, что суффозионный процесс начинается после достижения скоростью фильтрации критического значения v_k. Также из обработки результатов экспериментов получено соотношение для определения критической скорости фильтрации воды

$$v_k = 4.2\phi \sqrt[9]{g\nu^7} \frac{1}{\sqrt[3]{37.21 \frac{\nu K_0}{\phi g}}},$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости воды; g – модуль ускорения силы тяжести.

В работе [16] для $\dot{m}$ используется зависимость

$$\dot{m} = \begin{cases} \lambda \rho_3^0 (1-\phi) s_3 \phi |\vec{v}_3 - \vec{v}_k|, |\vec{v}_3| \geq |\vec{v}_k| \\ 0, |\vec{v}_3| < |\vec{v}_k|. \end{cases}$$

В работах S. Bonelli (см. например, [18, с. 187]) движение воды, подвижных частиц и отрыв частиц от скелета моделируется на основе подходов, развитых в задачах с неизвестной границей. Вода и подвижные частицы грунта рассматриваются как однородная смесь (несжимаемая вязкая жидкость со стандартной реологией), которая движется со скоростью $\vec{u}$ и имеет плотность $\rho = \phi\rho_1^0 + (1-\phi)\rho_3^0$. Неизвестная граница Γ между областями, занятыми смесью и твердым скелетом, определяется из уравнения переноса вида

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla \psi = 0,$$

где функция ψ имеет следующие свойства: $\psi = 0$ на Γ, $\psi > 0$ в твердом скелете, а в области фильтрации $\psi < 0$; $\vec{c} = c_\Gamma \vec{n}$, $\vec{n}$ – вектор нормали к границе Γ. Скорость движения последней равна

$$c_\Gamma = \begin{cases} k_d(\tau - \tau_c), \tau \geq \tau_c; \\ 0, \tau < \tau_c, \end{cases}$$

где k_d – коэффициент пропорциональности; τ– модуль касательного напряжения

$$\tau = \sqrt{(T\vec{n})^2 - (\vec{n}T\vec{n})^2},$$

τ_c – критическое значение касательного напряжения при достижении которого начинается суффозионный процесс.

Тензор напряжений и тензор скоростей деформации имеют вид

$$T = -PI + 2\mu_w D(\vec{u});$$

$$D(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\bigtriangledown\vec{u} + (\bigtriangledown\vec{u})^T).$$

В данном подходе интенсивность фазового перехода определяется формулой

$$\dot{m} = \rho(c_\Gamma - \vec{u}\cdot\vec{n}).$$

В работе [10] рассматривалось двухфазное течение (вода ($i = 1$), подвижные частицы ($i = 2$), $s_1 + s_2 = 1$) и использовалось следующее соотношение для определения суффозионного потока

$$\dot{m} = \delta(s)R(\phi)max\{|\vec{v}_1| - v_k, 0\}. \qquad (11)$$

Здесь

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, \quad s \geq 1; \\ 1-s, \quad 0 < s < 1; \\ 1, \quad s \leq 0. \end{cases}$$

$$R(\phi) = \begin{cases} 1, \quad \phi \geq 1; \\ \phi(1-\phi), \quad 0 < s < 1; \\ 0, \quad \phi \leq 0. \end{cases}$$

Пример 2. Пусть $s_2 = 0$, $s = s_1$, тогда $1-s = s_3$. Для простоты изложения рассмотрим двухфазное течение воды ($i = 1$), подвижных частиц ($i = 2$) в деформируемом скелете ($i = 3$) при наличии (5) и при постоянных истинных плотностях.

Преобразуем систему (1)–(7) [19]. Поделив уравнения (1)–(4) на истинные плотности и сложив полученные равенства, получим соотношение

$$\nabla \cdot (\phi(s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2) + (1-\phi)\vec{u}_3) = 0,$$

которое приводится к виду

$$\nabla \cdot (\phi s_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + \phi s_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_3) + \vec{u}_3) = 0.$$

Положим

$$\vec{v} = \phi s_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + \phi s_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_3), \quad k_{0i} = \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}.$$

Используя (4) и (5), получим следующее представление для $\vec{v}$

$$-\vec{v} = K_0(\phi)(k_{01}(\bigtriangledown p_1 + \rho_1^0\vec{g}) +$$

$$+ k_{02}(\bigtriangledown(p_1 + p_c) + \rho_2^0\vec{g})) =$$

$$= K_0(\phi)k(s) \bigtriangledown p + \vec{f},$$

где "приведенное"давление p определяется равенством

$$p = p_1 - \int\limits_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi.$$

Здесь также введены обозначения:

$$k(s) = k_{01} + k_{02},$$

$$\vec{f} = K_0(k_{02} \bigtriangledown_x p_c + k \int\limits_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \bigtriangledown_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi +$$
$$+ (k_{01}\rho_1^0 + k_{02}\rho_2^0)\vec{g}),$$

а символ $\bigtriangledown_x$ применяется только по переменной $\vec{x}$, входящей явно, например

$$\bigtriangledown_x p_c(s, x) = \left(\frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_1}, \frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_2}, \frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_3} \right).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (K_0(\phi)k(s) \bigtriangledown p + \vec{f}). \quad (12)$$

С учетом введенного давления p для $\vec{v}_1 \equiv s_1\phi\vec{u}_1$ имеем

$$\vec{v}_1 = s_1\phi(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + s_1\phi\vec{u}_3 =$$
$$= -K_0 a \bigtriangledown s - K_0 k_{01} \bigtriangledown p - \vec{f}_0 + s_1\phi\vec{u}_3,$$

где

$$a = -\frac{k_{01}k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad \frac{\partial p_c}{\partial s} \leq 0,$$

$$\vec{f}_0 = K_0 k_{01} (\int\limits_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \bigtriangledown_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \rho_1^0 \vec{g}).$$

Тем самым уравнение неразрывности для первой фазы можно представить в виде

$$\frac{\partial \phi s_1}{\partial t} - \nabla \cdot (K_0 a \bigtriangledown s + K_0 k_{01} \bigtriangledown p + \vec{f}_0) +$$
$$+ \nabla \cdot (\phi s_1 \vec{u}_3) = 0. \quad (13)$$

Система (12), (13)служит для определения s, p (при заданных ϕ, $div\vec{u}_3$). Давления p_e, p_{tot}, p_f и p связаны равенствами:

$$p_f \equiv s_1 p_1 + s_2 p_2 = p + G_c + s_2 p_e,$$
$$G_c = \int\limits_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi, \quad (14)$$

$$p_e \equiv p_{tot} - p_f = p_{tot} - p - (G_c + s_2 p_c), \quad (15)$$

$$p_{tot} \equiv \phi p_f + (1-\phi)p_s = \phi(p + G_c + s_2 p_c) +$$
$$+ (1-\phi)p_s, \quad (16)$$

С учетом p_{tot} для p_e получим

$$p_e = (1-\phi)(p_s - p - G_c - s_2 p_c). \quad (17)$$

Формулы (14)–(17)дают представление p_e, p_{tot}, p_f через p. Обратная связь:

$$p = p_{tot} - p_e - (G_c + s_2 p_c), \quad (18)$$

или

$$-p = \frac{1}{1-\phi} p_e - p_s + (G_c + s_2 p_c). \quad (19)$$

В силу (7) и (14) имеем

$$\nabla p = \rho_{tot}\vec{g} - \nabla p_e - \nabla(G_c + s_2 p_c).$$

С учетом (18), (19) для $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ получим

$$-\vec{v} = K_0(\phi)k(s)(\rho_{tot}\vec{g} - \bigtriangledown p_e - \nabla(G_c + s_2 p_c)) + \vec{f},$$

$$\vec{v}_1 = -K_0 a \bigtriangledown s - \vec{f}_0 + s_1\phi\vec{u}_3 -$$
$$-K_0 k_{01} \bigtriangledown (\rho_{tot}\vec{g} - \nabla p_e - \nabla(G_c + s_2 p_c)).$$

Наконец, p_{tot} через p_e выражается следующим образом:

$$p_{tot} = p_c - \frac{\phi}{1-\phi} p_e.$$

Уравнение (3) представим в виде

$$\frac{\partial \ln(1-\phi)}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla \ln(1-\phi) = -\nabla \cdot \vec{u}_3 - \frac{\dot{m}}{\rho_3^0(1-\phi)} \equiv \Phi(\vec{x}, t), \quad (20)$$

$$\phi|_{t=0} = \phi^0(\vec{x})$$

и будем рассматривать относительно $(1-\phi)$ при заданном поле скоростей $\vec{u}_3$ и $\dot{m}$. Характеристики этого уравнения определяются задачей Коши

$$\frac{\partial \vec{y}(\tau, t, \vec{x})}{\partial \tau} = \vec{u}_3(\vec{y}(\tau, t, \vec{x}), \tau), \quad \vec{y}|_{\tau=t} = \vec{x}.$$

Если $\Phi(\vec{x}, t)$ – достаточно гладкая функция (например, $\Phi(\vec{x}, t) \in W_q^{1,1}(Q_T)$, $\vec{u}_3(\vec{x}, t) \in W_q^{2,1}(Q_T)$, $q > n$, $\phi^0 \in [m_0, M_0]$, $m_0 > 0$, $M_0 < 1$, $\nabla\phi^0(\vec{x}) \in L_q(\Omega)$), то справедливо следующее представление [20]:

$$(1 - \phi(\vec{x}, t)) = (1 - \phi^0(\vec{y}(0, t, \vec{x}))) \cdot$$
$$\exp(\int\limits_0^t \Phi(\vec{y}(\tau, t, \vec{x}), \tau) d\tau).$$

Опишем схему решения системы (1)–(7). На первом шаге зададим ϕ и $\vec{u}_3$. Из системы (12), (13) находим s, p; уравнение (6) при заданных ϕ и $\vec{u}_3$ дает p_e; из (14) находим p_f, а из (15) – p_{tot}; из (16) определяем p_s; на этом шаге вычисляется $\vec{v}_1$ и, следовательно, $\dot{m}$. Второй шаг: из (20) по найденным ранее ϕ, $\dot{m}$ вычисляем "новое"ϕ и ρ_{tot}, p_{tot} (со "старыми"p_f, p_s и "новым"ϕ) и находим из (7) "новое"значение $\vec{u}_3$. После этого процесс повторяется.

Заключение. В работе построена новая модель изотермического суффозионного выноса твердых частиц с учетом пороупругих свойств грунта.

Библиографический список

1. Vardoulakis I. Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. — 2006.

2. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou R. Hydro-Mechanical Aspects of the Sand Production Problem // Transport in Porous Media 22, 1996.

3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М., 1987. — Ч. 1.

4. Варченко А.Н., Зазовский А.Ф. Трехфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей // Итоги науки и техники. Серия: Комплексные и специальные разделы механики. — М., 1991. — Т. 4.

5. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou R. Sand Erosion in Axial Flow Conditions // Transport in Porous Media 45, 2001.

6. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gas - fluidized beds. Journal of Applied Phisics // Journal of Applied Phisics, Vol. 46, № 10. — 1975.

7. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. — М., 1971.

8. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

9. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 3.

10. Папин А.А., Вайгант В.А., Сибин А.Н. Математическая модель неизотермической внутренней эрозии // Известия Алтайского гос. ун-та, — 2015. — № 1/1. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.1-16.

11. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-25.

12. Papin A.A., Sibin A.N. Model isothermal internal erosion of soil // Journal of physics: Conference Series 722 (2016) 012034.

13. Connolly J. A. D., Podladchikov Y. Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. — 1998. — Vol. 11.

14. Connolly J. A. D., Podladchikov Y. Y. Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins // Tectonophysics. — 2000. — Vol. 324.

15. Tantserev E., Cristophe Y. Galerne, Podladchikov Y. Multiphase flow in multi-component porous visco-elastic media // The Fourth Biot Conference on Poromechanics. — 2009.

16. Wang J., Walters D. A., Settari A., Wan R. G. Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects // 1st Heavy Oil Conference. — 2006.

17. Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. — Л., 1983.

18. Bonelli S. Erosion of Geomaterials. UK, 2012.

19. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-24.

20. Солонников В. А. О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. — 1976. — Т. 56.