УДК 515.16

О солитонах Риччи на 2-симметрических четырёхмерных лоренцевых многообразиях *

Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов, И.В. Эрнст

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Ricci Solitons on 2-Symmetric Four-Dimensional Lorentzian Manifolds

D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, I.V. Ernst

Altai State University (Barnaul, Russia)

Важным обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях являются солитоны Риччи, которые впервые были рассмотрены Р. Гамильтоном. Задача нахождения солитонов Риччи является достаточно сложной, поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на размерность, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи. Одним из важных примеров такого рода ограничений являются 2-симметрические лоренцевы многообразия. Они изучены в работах А.С. Галаева, Д.В. Алексеевского и J.M. Senovilla. 2-симметрические локально неразложимые лоренцевы многообразия обладают параллельным распределением изотропных прямых, т.е. являются многообразиями Уокера. Такие многообразия обладают специальной системой координат, в которой уравнение солитона Риччи допускает локальное разрешение. В настоящей статье рассмотрено уравнение солитона Риччи на 2-симметрических локально неразложимых лоренцевых многообразиях. К. Онда и В. Батат исследовали солитоны Риччи на четырёхмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях и доказали локальную разрешимость уравнения солитона Риччи на таких многообразиях. В данной работе найдено общее решение уравнения солитона Риччи на четырёхмерных 2-симметрических локально неразложимых лоренцевых многообразиях.

Ключевые слова: солитоны Риччи, многообразия Уокера, лоренцевы многообразия.

An important generalization of Einstein metrics on a (pseudo) Riemannian manifolds are Ricci solitons first discussed by R. Hamilton. The problem of finding Ricci solitons is quite difficult, so we assume the restriction of one of the following: the structure of the manifold, the dimension, the class of metrics, or a class of vector fields, participating in the Ricci soliton equation. The most important examples of such restrictions are 2-symmetric Lorentzian manifolds investigated by A.S. Galaaev, D.V. Alekseevskii, and J.M. Senovilla. 2-Symmetric locally indecomposable Lorentzian manifolds have parallel null-distribution, i.e. they are Walker manifolds. These manifolds have a special coordinate system, which allows us to solve Ricci soliton equation locally. In this paper, we investigate the Ricci soliton equation on 2-symmetric locally indecomposable Lorentzian manifolds. K. Onda and B. Batat investigated Ricci solitons on the four-dimensional 2-symmetric Lorentzian manifolds. Local solvability of the Ricci soliton equation on such manifolds was proven. In this paper, we obtain general solution of the Ricci soliton equation on four-dimensional 2-symmetric locally indecomposable Lorentzian manifolds.

Key words: Ricci soliton, Walker manifold, Lorentzian manifold.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-23

1. Введение. Уравнение солитона Риччи является обобщением уравнения Эйнштейна, и впервые данный термин был введен Р. Гамильтоном в работе [1]. Позднее солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков (см., например, обзор [2]). В общем случае задача исследования и классификации солитонов Риччи является достаточно сложной, и поэтому она рас-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

сматривается при некоторых ограничениях на многообразие. К числу многообразий с такими ограничениями относятся 2-симметрические лоренцевы многообразия, которые были исследованы Д.В. Алексеевским и А.С. Галаевым (см. [3]). Классификация 2-симметрических многообразий была получена группой математиков O.F. Blanco, M. Sanchez, J.M. Senovilla (см. [4]). В этих работах независимо доказано, что на любом 2-симметрическом лоренцевом многообразии существует параллельное изотропное распределение. Таким образом, 2-симметрические многообразия являются многообразиями Уокера. Позднее К. Онда и В. Батат в работе [5] исследовали солитоны Риччи на четырёхмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях, и доказали локальную разрешимость уравнения солитона Риччи на таких многообразиях. В данной работе описано общее решение уравнения солитона Риччи на четырёхмерных 2-симметрических локально неразложимых лоренцевых многообразиях.

2. Основные определения. *Псевдоримановым многообразием* называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется *лоренцевым многообразием.*

Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – псевдориманово многообразие размерности n, ∇ – соответствующая связность Леви-Чивита. Тензор кривизны опеределим как $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ и тензор Риччи как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$, где X, Y, Z, V – гладкие векторные поля на $\mathcal{M}$.

Определение. Полное псевдориманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если существует гладкое векторное поле $\mathcal{X}$, удовлетворяющее уравнению

$$\pounds_{\mathcal{X}} g + r = \lambda g, \tag{1}$$

где r – тензор Риччи; $\lambda \in \mathrm{R}$ – некоторая константа, $\pounds_{\mathcal{X}} g$ производная Ли метрики g в направлении поля $\mathcal{X}$.

Число λ называется константой солитона. При $\lambda > 0, \lambda = 0$ или $\lambda < 0$ солитон называют сжимающимся, стабильным или расширяющимся соответственно.

Определение. Гладкое распределение $\mathcal{D}$ на $\mathcal{M}$ называется *параллельным*, если для любых векторных полей $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{TM}$ имеем $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$

Определение. Псевдориманово многообразие, допускающее гладкое параллельное распределение изотропных векторов, называется *многообразием Уокера* (см. [6, 7]).

Определение. Пусть R – тензор кривизны метрики g. Если

$$\nabla R \neq 0, \nabla^2 R = 0,$$

то $(\mathcal{M}, g)$ называется *2-симметрическим псевдоримановым многообразием.*

3. Система координат. Уравнение солитона Риччи. Рассмотрим лоренцево локально неразложимое 2-симметрическое многообразие Уокера $(\mathcal{M}, g)$. Следующая теорема А. С. Галаева и Д. В. Алексеевского позволяет выбрать систему локальных координат на $\mathcal{M}$:

Теорема (см. [3]). *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – локально неразложимое лоренцево многообразие Уокера размерности $n+2$. Тогда $(\mathcal{M}, g)$ является 2-симметрическим тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $v, x^1, \ldots, x^n$, и такие, что*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij}) x^i x^j (du)^2, \tag{2}$$

где H_{ij} – ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$; F_{ij} – симметричная вещественная матрица.

В размерности 4 получаем локальную систему координат (v, x, y, u) на многообразии $\mathcal{M}$. Обозначим:

$x = x^1, y = x^2$

$$A = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \\ F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix},$$

$$\phi(x, y, u) = \sum (H_{ij}u + F_{ij}) x^i x^j.$$

Пусть в координатах (v, x, y, u) векторное поле $\mathcal{X}$ имеет вид $\mathcal{X} = (K, L, M, N)$, где K, L, M, N – гладкие функции на $\mathcal{M}$. Запишем уравнение солитона Риччи в системе координат (v, x, y, u):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} N_v & = & 0 \\ N_x + L_v & = & 0 \\ N_y + M_v & = & 0 \\ N_u + K_v & = & \lambda \\ 2L_x & = & \lambda \\ M_x + L_y & = & 0 \\ \varphi(x,y,u)N_x + L_u + K_x & = & 0 \\ 2M_y & = & \lambda \\ \varphi(x,y,u)N_y + M_u + K_y & = & 0 \\ -\frac{1}{2}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + 2N_u\varphi + & & \\ +2K_u + L\varphi_x + M\varphi_y + N\varphi_u & = & \lambda\varphi \end{array} \right. \tag{3}$$

4. Решения уравнения солитона Риччи

Теорема. *Уравнение солитона Риччи (1) локально разрешимо в классе 2-симметрических лоренцевых многообразий размерности 4 для любой* *константы λ. Искомое векторное поле имеет вид $\mathcal{X}=(K,L,M,N)$:*

Если ранг матрицы A равен двум и $H_{11}\neq H_{22}$ или $F_{11}\neq F_{22}$, то

$$K=\lambda v-\eta'(u)x-\beta'(u)y+\gamma(u), L=\frac{\lambda}{2}x+\eta(u),$$

$$M=\frac{\lambda}{2}y+\beta(u), N=0,$$

где $\gamma(u)=\frac{(H_{11}+H_{22})u^2}{4}+\frac{(F_{11}+F_{22})u}{2}+\gamma_0$, функции η и β являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \eta''(u) &=& \eta(u)(H_{11}u+F_{11})+F_{12}\beta(u) \\ \beta''(u) &=& \beta(u)(H_{22}u+F_{22})+F_{12}\eta(u) \end{cases}$$

Если ранг матрицы A равен двум и $H_{11}=H_{22}$ и $F_{11}=F_{22}$, то

$$K=\lambda v-\eta'(u)x-\beta'(u)y+\gamma;$$

$$L=\frac{\lambda}{2}x-cy+\eta(u);$$

$$M=\frac{\lambda}{2}y+cx+\beta(u);$$

$$N=0, F_{12}c=0$$

и выполнены уравнения

$$H_{11}\eta(u)u+F_{11}\eta(u)+F_{12}\beta(u)-\eta''(u)=0;$$
$$H_{11}\beta(u)u+F_{11}\beta(u)+F_{12}\eta(u)-\beta''(u)=0.$$

Если ранг матрицы A равен одному ($H_{22}=F_{12}=F_{22}=0$), то

$$K=\lambda v-\eta'(u)x-\beta_1 y+\frac{1}{2}(H_{11}u+F_{11});$$

$$L=\frac{\lambda}{2}x+\eta(u);$$

$$M=\frac{\lambda}{2}y+\beta_1 u+\beta_2, N=0,$$

где $(H_{11}u+F_{11})\eta(u)-\eta''(u)=0$.

Схема доказательства:

Запишем уравнение солитона Риччи в локальных координатах (v,x,y,u) (см. система 1).

Уравнения 5 и 8 интегрируются:

$$L(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}x+L_1(v,y,u);$$

$$M(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}y+M_1(v,x,u).$$

Подставим полученные выражения в уравнение 6:

$$(M_1)_x(v,x,u)+(L_1)_y(v,y,u)=0.$$

Отсюда видно, что $(M_1)_x(v,x,u)$ не зависит от x, а $(L_1)_y(v,y,u)$ не зависит от y. Поэтому функция M_1 линейна по x, а L_1 линейна по y:

$$M(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}y+f_1(v,u)x+f_2(v,u);$$

$$L(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}x-f_1(v,u)y+f_3(v,u).$$

Уравнения (12.5), (12.6), (12.8) выполнены.

Из уравнений 2 и 3 выразим N_x и N_y:

$$N_x=-L_v=(f_1)_v y-(f_3)_v;$$

$$N_y=-M_v=-(f_1)_v x-(f_2)_v$$

Так как $N_v=0$ (из уравнения 1), то $(f_2)_v,(f_3)_v$ не зависят от v:

$$f_2(v,u)=v\alpha(u)+\beta(u), f_3(v,u)=v\mu(u)+\eta(u).$$

Продифференцируем уравнение 2 по y, а уравнение 3 по x. Поскольку $N_{xy}=N_{yx}$, получим:

$$N_{xy}-N_{yx}=L_{vy}-M_{vx}=-2(f_1)_v=0.$$

Получили следующее:

$$f_1(v,u)=f_1(u);$$

$$M(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}y+f_1(u)x+v\alpha(u)+\beta(u);$$

$$L(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}x-f_1(u)y+v\mu(u)+\eta(u);$$

$$N(v,x,y,u)=-\mu(u)x-\alpha(u)y+\omega(u).$$

Это гарантирует выполнение уравнений 1, 2, 3, 5, 6, 8.

Продифференцируем уравнение 4 по x, а уравнение 7 по v. Разность полученных выражений равна

$$-2\mu'(u)=0.$$

Поэтому $\mu(u)=\mu$. Аналогично, дифференцируя уравнение 4 по y, уравнение 9 по v, получим $\alpha(u)=\alpha$.

Продифференцируем теперь уравнение 7 по y, а уравнение 9 по x. Запишем разность полученных выражений:

$$\begin{array}{rcl} -\mu(H_{22}\,yu+F_{22}\,y+F_{12}\,x)+ & & \\ +\alpha(H_{11}\,xu+F_{11}\,x+F_{12}\,y)-f_1'(u) &=& 0. \end{array}$$

Это равенство выполнено для всех x,y, поэтому $f_1(u)=c$ – константа, также выполнены соотношения:

$$\begin{cases} H_{11}\alpha &=& 0 \\ H_{22}\mu &=& 0 \\ F_{11}\alpha-F_{12}\mu &=& 0 \\ F_{12}\alpha-F_{22}\mu &=& 0 \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда ранг матрицы СЛАУ (4) относительно α,μ равен 2. Тогда $\alpha=\mu=0$.

Из уравнений 4, 7 и 9 находим частные производные функции K:

$$K_x=-L_u=-\eta'(u), K_y=-M_u=-\beta'(u);$$

$$K_v = \lambda - N_u = \lambda - \omega'(u).$$

Откуда находим вид K:

$$K(v,x,y,u) = (\lambda - \omega'(u))v - \eta'(u)x - \beta'(u)y + \gamma(u).$$

Выполнены все уравнения за исключением последнего. Перепишем это уравнение с новыми функциями:

$$\begin{aligned}&-\tfrac{1}{2}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}) + 2\omega'(u)\varphi - \\ &-2v\omega''(u) - 2x\eta''(u) - 2y\beta''(u) - \lambda\varphi \\ &+(\tfrac{1}{2}\lambda x - cy + \eta(u))\varphi_x + (\tfrac{1}{2}\lambda y + cx + \beta(u))\varphi_y + \\ &+\omega(u)\varphi_u + 2\gamma'(u) = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Это уравнение является многочленом от переменных v,x,y с коэффициентами, зависящими только от u. Поэтому эти коэффициенты нулевые.

Коэффициент при v равен $\omega''(u) = 0$. Откуда $\omega(u) = c_1 u + c_0$.

Коэффициенты при x^2 и y^2 равны:

$$6H_{11}c_1u + 4F_{11}c_1 + 4F_{12}c + 2H_{11}c_0 = 0;$$

$$6H_{22}c_1u + 4F_{22}c_1 - 4F_{12}c + 2H_{22}c_0 = 0,$$

отсюда $c_1 = 0$, поскольку H_{ii} не могут быть одновременно нулевыми. В итоге $\omega(u) = \omega$.

Запишем коэффициент при xy:

$$-2H_{11}cu + 2H_{22}cu - 2F_{11}c + 2F_{22}c = 0.$$

Рассмотрим два случая:

$H_{11} \neq H_{22}$ **или** $F_{11} \neq F_{22}$ Тогда $c = 0$. Вновь собрав коэффициенты при x^2 и y^2 , получим

$$2\omega H_{11} = 0, 2\omega H_{22} = 0.$$

Отсюда $\omega = 0$.

Теперь уравнение (5) содержит только коэффициенты при степени 1 по x,y и свободный член. Запишем их:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \eta(u)(H_{11}u + F_{11}) + F_{12}\beta(u) - \eta''(u) &=& 0 \\ \beta(u)(H_{22}u + F_{22}) + F_{12}\eta(u) - \beta''(u) &=& 0 \\ -H_{11}u - H_{22}u - F_{11} - F_{22} + 2\gamma'(u) &=& 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

Третье уравнение интегрируется: Оставшиеся уравнения составляют систему линейных дифференциальных уравнений, разрешенную относительно производных. Поэтому они разрешимы.

Таким образом, найдены все векторные поля X при условии, что матрица системы (4) имеет ранг 2 и $H_{11} \neq H_{22}$:

$$\begin{array}{rcl} K &=& \lambda v - x\eta'(u) - y\beta'(u) + \gamma(u) \\ L &=& \frac{\lambda x}{2} + \eta(u) \\ M &=& \frac{\lambda y}{2} + \beta(u) \\ N &=& 0, \end{array} \tag{7}$$

где $\gamma(u) = \frac{(H_{11}+H_{22})u^2}{4} + \frac{(F_{11}+F_{22})u}{2} + \gamma_0$, функции η и β являются решениями системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} \eta''(u) &=& \eta(u)(H_{11}u + F_{11}) + F_{12}\beta(u) \\ \beta''(u) &=& \beta(u)(H_{22}u + F_{22}) + F_{12}\eta(u) \end{array}\right.$$

$H_{11} = H_{22}$**,** $F_{11} = F_{22}$ Пусть теперь $H_{11} = H_{22}$ и $F_{11} = F_{22}$. Заметим, что тогда матрица системы (4) имеет ранг 2. Запишем коэффициенты последнего уравнения при x^2 и y^2:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4F_{12}c + 2H_{11}\omega &=& 0 \\ -4F_{12}c + 2H_{11}\omega &=& 0 \end{array}\right.$$

$H_{11} \neq 0$ поэтому $\omega = 0$, $F_{12}c = 0$. Запишем оставшиеся коэффициенты последнего уравнения:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\gamma'(u) &=& 0 \\ H_{11}\eta(u)u + F_{11}\eta(u) + F_{12}\beta(u) - \eta''(u) &=& 0 \\ H_{11}\beta(u)u + F_{11}\beta(u) + F_{12}\eta(u) - \beta''(u) &=& 0 \end{array}\right.$$

Второе и третье уравнения этой системы совпадают с уравнениями из системы (6) при $H_{11} = H_{22}$, $F_{11} = F_{22}$, поэтому они разрешимы.

Рассмотрим случай, когда ранг матрицы A равен 1. Тогда, без ограничения общности, полагаем:

$$H_{22} = F_{12} = F_{22} = \alpha = 0.$$

Запишем все уравнения, кроме последнего:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \omega'(u) + K_v &=& \lambda \\ -\mu(H_{11}u + F_{11})x^2 + \eta'(u) + K_x &=& 0 \\ \beta'(u) + K_y &=& 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

Отсюда $K(v,x,y,u) = (\lambda - \omega'(u))v + \frac{\mu}{3}(H_{11}u + F_{11})x^3 - \eta'(u)x - \beta'(u)y + \gamma(u)$. Продифференцируем последнее уравнение по x и по y:

$$-2c(H_{11}u + F_{11}) = 0,$$

а также по x и по v:

$$2\mu(H_{11}u + F_{11}) = 0.$$

Получим, что $\mu = c = 0$. Запишем коэффициенты при переменных v,x,y в последнем уравнении:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2(H_{11}u + F_{11})\omega'(u) + H_{11}\omega(u) &=& 0 \\ (H_{11}u + F_{11})\eta(u) - \eta''(u) &=& 0 \\ -2\beta''(u) &=& 0 \\ -2\omega''(u) &=& 0 \\ H_{11}u + F_{11} - 2\gamma(u) &=& 0 \end{array}\right.$$

Из первого и четвертого уравнений следует, что $\omega(u) = 0$. Второе уравнение разрешимо, остальные уравнения интегрируются непосредственно. Система (3) решена.

5. Заключение. В результате проведенных исследований найдено общее решение уравнения солитона Риччи на четырёхмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Данные результаты продолжают исследования К. Онды и В. Батата по существованию солитонов Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях.

Библиографический список

1. Hamilton R. S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. – 1988. – V. 71.

2. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. – 2010. – V. 11.

3. Alekseevsky D.V., Galaev A.S. Two-symmetric Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. – 2011. – V. 61, N. 12.

4. Blanco O.F., Sanchez M., Senovilla J.M. Complete classification of second order symmetric spacetimes // J. Phys. Conf. Ser. – 2010.

5. Onda K., Batat W. Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds // Journal of Geometry. – 2014. – V. 105. – Issue 3.

6. Brozos-Vazquez M., Garcia-Rio E., Gavino-Fernandez S. Locally conformally flat lorentzian gradient Ricci soliton // Journal of Geometric Analysis. – 2013. – V. 23, N 3.

7. Walker A.G. Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes // Quart. J. Math. – Oxford, 1950. – V. 1, N 2.