

Трехмерные композитные многосеточные конечные элементы оболочечного типа

А.Д. Матвеев¹, А.Н. Гришанов²

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск, Россия),

²Новосибирский государственный технический университет (Новосибирск, Россия)

Three-Dimensional Composite Multigrid Finite Shell-Type Elements

A.D. Matveev¹, A.N. Grishanov²

¹Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch of the RAS (Krasnoyarsk, Russia)

²Novosibirsk State Technical University (Novosibirsk, Russia)

Предложены процедуры построения криволинейных трехмерных композитных многосеточных конечных элементов (МнКЭ) оболочечного типа для расчета напряженного состояния упругих цилиндрических оболочек, имеющих неоднородную (микронеоднородную) структуру и статическое нагружение. МнКЭ проектируются в локальных декартовых системах координат на основе мелких (базовых) разбиений (моделей) оболочек. При построении МнКЭ (без увеличения их размерности) можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения оболочек, что позволяет в рамках микроподхода учитывать их неоднородную и микронеоднородную структуру, сложную форму, сложный характер нагружений и закреплений. Напряженно-деформированное состояние в МнКЭ описывается соотношениями трехмерной теории упругости (без введения дополнительных упрощающих гипотез). Перемещения аппроксимируются степенными и лагранжевыми полиномами различных порядков, которые учитывают смещения МнКЭ как жесткого целого. Лагранжевые полиномы эффективно используются при проектировании МнКЭ оболочечного типа. Предлагаемые МнКЭ образуют дискретные модели малой размерности (в $10^3 \div 10^6$ раз меньше размерностей базовых моделей) и порождают приближенные решения, которые быстро сходятся к точным, что дает возможность строить при небольших временных затратах решения с малой погрешностью. Для верификации МнКЭ используется известный численный метод. Разработаны и численно исследованы трехсеточные конечные элементы (ТрКЭ) оболочечного типа. Приведен пример расчета многослойной оболочки с применением разработанных ТрКЭ и базовой модели, которая имеет около 1,4 миллиарда узловых неизвестных метода конечных элементов.

Ключевые слова: упругость, оболочки, композиты, криволинейные композитные многосеточные конечные элементы.

Procedures for developing curvilinear three-dimensional composite multigrid finite elements (MFE) of a shell-like type for calculating the stress state of elastic cylindrical shells having an inhomogeneous (microinhomogeneous) structure and static loading have been proposed. MFE are developed in local Cartesian coordinate systems on the basis of small (basic) shell partitions (models). When constructing MFE (without increasing their dimensionality), arbitrarily small basic shell partitions can be used. Thus, it is possible to take into account their inhomogeneous and microinhomogeneous structure, irregular shape, complex nature of loading and fastening within the micro-approach. The stress-strain state in MFE is described by the formulas of the three-dimensional theory of elasticity (without introducing any additional simplifying hypotheses). The displacements are approximated by power and Lagrange polynomials of various orders, which take into account the displacements of the MFE as a rigid whole. Lagrangian polynomials are effectively used while developing shell-type elements. The proposed MFE yield the small dimensional discrete models ($10^3 \div 10^6$ times less than the dimensions of the reference models) and generate some approximate solutions that quickly converge to exact ones, which enable the construction of solutions with a high accuracy for a short time. A known numerical method is used to verify the MFE. Three-grid finite elements of a shell-like type have been developed and numerically studied. An example of a multilayer shell calculation using the developed three-grid finite elements and a reference model that has about 1.4 billion nodal unknowns of finite element method has been given.

Key words: elasticity, shells, composites, curvilinear composite multigrid finite elements.

Введение. В основе технических теорий композитных цилиндрических оболочек лежат гипотезы, накладывающие определенные ограничения на поля перемещений, деформаций и напряжений [1, 2]. Это порождает неустранимую погрешность в решениях и ограничивает области применений этих теорий. Метод конечных элементов (МКЭ) [3, с. 169; 4, с. 255] широко используется при исследовании напряженно-деформированного состояния упругих оболочек [5–8]. Построение криволинейных конечных элементов (КЭ) при расчете оболочек встречает различные трудности [5, с. 19], в частности, связанные с учетом смещений КЭ как жесткого целого. Расчет композитных цилиндрических оболочек с применением КЭ в постановке трехмерной задачи теории упругости [9, с. 40] с учетом их структуры приводит к построению базовых разбиений очень высокой размерности, для которых применение программ расчета ANSYS, NASTRAN и др. [5, с. 7] затруднительно. В работах [10, 11] проведен расчет композитных цилиндрических панелей и оболочек с помощью МнКЭ, построенных с применением для аппроксимации перемещений только степенных полиномов 1-го, 2-го и 3-го порядков.

В данной работе изложены процедуры построения трехмерных композитных (однородных) многосеточных конечных элементов (МнКЭ) оболочечного типа с применением полиномов Лагранжа для расчета напряженного деформированного состояния линейно упругих композитных цилиндрических оболочек. Разработаны и численно исследованы трехсеточные оболочечные КЭ. Для верификации разработанных КЭ используется известный численный метод [4, с. 175]. Расчеты показывают, что реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей требует небольших временных затрат и в $10^3 \div 10^6$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовых моделей.

1. Композитные криволинейные двухсеточные КЭ.

Отметим, что в расчетах конструкций с применением МнКЭ используются последовательности базовых $\{R_n^0\}$ и многосеточных $\{R_n\}$ дискретных моделей оболочки. Базовая модель R_n^0 оболочки состоит из однородных односеточных КЭ V_e^n 1-го порядка с характерными размерами $h_{zn}^e \times h_{yn}^e \times h_{xn}^e$ (рис. 1), где e — порядковый номер КЭ V_e^n , n — порядковый номер базовой модели R_n^0 , α_{en} — угол раствора КЭ V_e^n , cd — ось оболочки. Процедура построения КЭ V_e^n в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ подробно изложена в работе [10]. Процедуру построения криволинейных композитных двухсеточных КЭ (ДвКЭ) с применением лагранжевых полиномов покажем на примере ДвКЭ W_a^n 3-го порядка размерами $9h_{zn}^e \times 9h_{yn}^e \times 9h_{xn}^e$ (рис. 2), расположенного в локальной декартовой системе координат $O_2x_2y_2z_2$, a — порядковый номер КЭ W_a^n , n — порядковый номер многосеточной модели R_n . Пусть между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ связи идеальны.

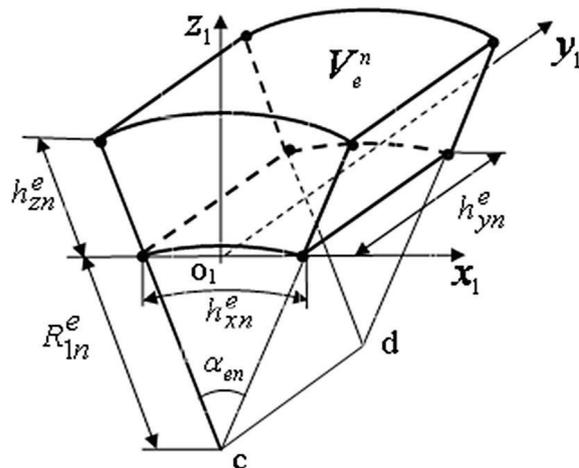


Рис. 1. Однородный КЭ V_e^n

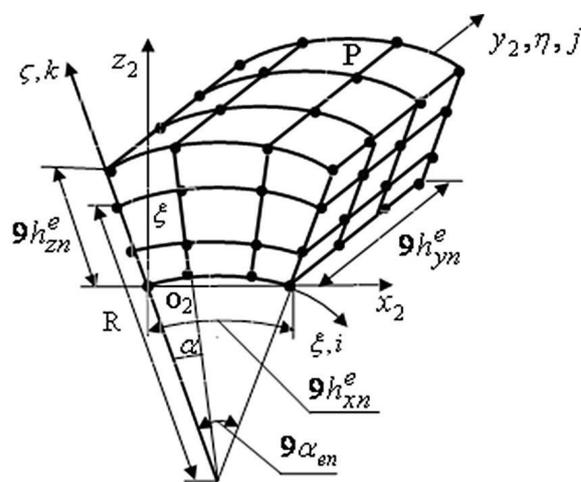


Рис. 2. ДвКЭ W_a^n

Базовое разбиение КЭ W_a^n состоит из КЭ V_e^n (рис. 1), которые учитывают в ДвКЭ неоднородную и микронеоднородную структуры, сложный характер нагружения и закрепления. Функционал полной потенциальной энергии Π_a^n для базового разбиения КЭ W_a^n запишем в виде

$$\Pi_a^n = \sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e - \delta_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (1)$$

где $[K_e]$ — матрица жесткости; \mathbf{P}_e , δ_e — векторы узловых сил и перемещений КЭ V_e^n , которые отвечают системе координат $O_2x_2y_2z_2$; M — общее число КЭ V_e^n ; T — транспонирование.

Рассмотрим построение полиномов Лагранжа в локальной криволинейной системе координат $O_2\xi\eta\zeta$ на узловой сетке КЭ W_a^n (рис. 2). Пусть узел $P(i, j, k)$ имеет координаты ξ_i, η_j, ζ_k , на рисунке 2 $i = j = 3, k = 4$. Заметим, что $y = \eta, z = \zeta$. Принимаем

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta. \quad (2)$$

Базисную функцию N_{ijk} для узла $P(i, j, k)$ в системе координат $O_2x_2y_2z_2$ с помощью полиномов Лагранжа $L_i(x)$, $L_j(y)$, $L_k(z)$ [4, с. 187] запишем в виде

$$N_{ijk}(x, y, z) = L_i(x)L_j(y)L_k(z), \quad (3)$$

где $L_i(x) = \prod_{n=1, n \neq i}^{n_1} \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$, $L_j(y) = \prod_{n=1, n \neq j}^{n_2} \frac{y - y_n}{y_j - y_n}$,

$$L_k(z) = \prod_{n=1, n \neq k}^{n_3} \frac{z - z_n}{z_k - z_n}$$

x_i, y_j, z_k — координаты узла $P(i, j, k)$ в системе координат $O_2x_2y_2z_2$.

Для точки с координатой ξ , лежащей на цилиндрической поверхности радиуса R , имеем $\xi = \alpha R$, α — угол для координаты ξ (рис. 2). Учитывая (2) и соотношения вида $\xi = \alpha R$, $\xi_i = \alpha_i R$ в (3), получаем $N_{ijk}(\alpha, \eta, \zeta) = L_i(\alpha)L_j(\eta)L_k(\zeta)$, где $L_i(\alpha)$, $L_j(\eta)$, $L_k(\zeta)$ — полиномы Лагранжа, имеющие следующий вид:

$$L_i(\alpha) = \prod_{n=1, n \neq i}^{n_1} \frac{\alpha - \alpha_n}{\alpha_i - \alpha_n}, \quad L_j(\eta) = \prod_{n=1, n \neq j}^{n_2} \frac{\eta - \eta_n}{\eta_j - \eta_n},$$

$$L_k(\zeta) = \prod_{n=1, n \neq k}^{n_3} \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta_k - \zeta_n}. \quad (4)$$

В расчетах удобно использовать полиномы Лагранжа (4). Функции перемещений u_a, v_a, w_a КЭ W_a^n , построенных с помощью полиномов Лагранжа (4), представим в форме

$$u_a = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_{\beta} q_{\beta}^u, \quad v_a = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_{\beta} q_{\beta}^v, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_{\beta} q_{\beta}^w, \quad (5)$$

где $q_{\beta}^u, q_{\beta}^v, q_{\beta}^w, N_{\beta}$ — перемещения и функция формы β -го узла узловой сетки КЭ W_a^n , $n_0 = n_1 n_2 n_3$, в рассматриваемом случае $n_0 = 64$ (рис. 2).

Порядок КЭ W_a^n определяется порядком полинома, построенного на его узловой сетке. Используя (5), вектор узловых перемещений δ_e КЭ V_e^n выражаем через вектор узловых перемещений δ_a КЭ W_a^n в системе координат $O_2x_2y_2z_2$

$$\delta_e = [A_e^a] \delta_a, \quad (6)$$

где $[A_e^a]$ — прямоугольная матрица, $e = 1, \dots, M$. Подставляя (6) в (1) и следуя принципу минимума полной потенциальной энергии для КЭ W_a^n , т.е. $\partial \Pi_a^n(\delta_a) / \partial \delta_a = 0$, получаем соотношение $[K_a] \delta_a = F_a$, которое отвечает равновесному состоянию КЭ W_a^n ,

$$[K_a] = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T [K_e] [A_e^a], \quad F_a = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T P_e. \quad (7)$$

где $[K_a]$ — матрица жесткости, F_a — вектор узловых сил КЭ W_a^n .

Замечание 1. В силу (6) размерность вектора δ_a (т.е. размерность КЭ W_a^n) не зависит от общего числа M КЭ V_e^n , представляющего КЭ W_a^n . Следовательно, можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения, что позволяет учитывать неоднородную и микронеоднородную структуру в КЭ W_a^n .

Пусть найден вектор δ_a . По формулам (6) находим векторы δ_e перемещений КЭ V_e^n ($e = 1, \dots, M$) в системе координат $O_2x_2y_2z_2$. Затем, используя векторы δ_e , определяем векторы перемещений δ_e^l КЭ V_e^n в локальной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (см. рис. 1). Используя δ_e^l , вычисляем напряжения в КЭ V_e^n , $e = 1, \dots, M$.

2. Композитные трехсеточные КЭ оболочечно-го типа. Процедуру построения композитных криволинейных трехсеточных КЭ (ТрКЭ) с применением полиномов Лагранжа рассмотрим на примере ТрКЭ G_p^n оболочечного типа, расположенного в локальной декартовой системе координат $O_3x_3y_3z_3$ и имеющего характерные размеры $81h_{xn}^e \times 81h_{yn}^e \times 9h_{zn}^e$ (рис. 3), p — порядковый номер КЭ G_p^n , n — порядковый номер многосеточной модели R_n . Область КЭ G_p^n состоит из ДвКЭ W_a^n , где $a = 1, \dots, N$, в данном случае $N = 81$. Узлы крупных сеток КЭ W_a^n образуют мелкую сетку КЭ G_p^n , на которой определяем крупную сетку H_p КЭ G_p^n . На рисунке 3 узлы сетки H_p (32 узла) отмечены точками. Полную потенциальную энергию Π_p^n КЭ G_p^n запишем в виде

$$\Pi_p^n = \sum_{a=1}^N \left(\frac{1}{2} (\delta_a)^T [K_a] \delta_a - (\delta_a)^T P_a \right), \quad (9)$$

где $[K_a]$ — матрица жесткости и P_a, δ_a — векторы узловых сил и перемещений КЭ W_a^n , отвечающие системе координат $O_3x_3y_3z_3$, $a = 1, \dots, N$.

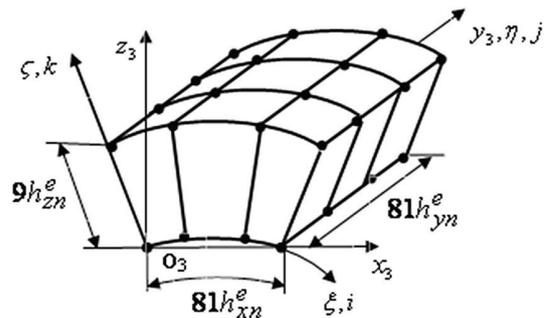


Рис. 3. Оболочечный КЭ G_p^n

Функции перемещений u_p, v_p, w_p КЭ G_p^n , построенные на крупной сетке H_p с помощью полиномов Лагранжа, представим в форме

$$u_p = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_{\beta} q_{\beta}^u, \quad v_p = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_{\beta} q_{\beta}^v, \quad w_p = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_{\beta} q_{\beta}^w, \quad (10)$$

где $q_{\beta}^u, q_{\beta}^v, q_{\beta}^w, N_{\beta}$ — перемещения и функция формы β -го узла узловой сетки КЭ G_p^n , $n_0 = n_1 n_2 n_3$, в рассматриваемом случае $n_0 = 32$ (рис. 3).

Используя функции (10), узловые перемещения вектора δ_a КЭ W_a^n выражаем через узловые перемещения вектора δ_p крупной сетки КЭ G_p^n . В результате получим равенство

$$\delta_a = [A_a^p] \delta_p, \quad (11)$$

где $[A_a^p]$ – прямоугольная матрица, $a = 1, \dots, N$.

Используя (11) в (9) и минимизируя функционал $\Pi_p^n(\delta_p)$ по перемещениям δ_p , для КЭ G_p^n получаем соотношение $[K_p] \delta_p = F_p$, которое отвечает его равновесному состоянию,

$$\text{где } [K_p] = \sum_{a=1}^N [A_a^p]^T [K_a] [A_a^p], \quad F_p = \sum_{a=1}^N [A_a^p]^T P_a, \quad (12)$$

$[K_p]$ – матрица жесткости, F_p – вектор узловых сил ТрКЭ G_p^n .

Замечание 2. Согласно равенству (11) размерность вектора δ_p (т.е. размерность ТрКЭ G_p^n) не зависит от общего числа ДвКЭ W_a^n и в силу (6) от общего числа базовых КЭ V_e^n , составляющих ТрКЭ. Следовательно, разбиение ТрКЭ G_p^n на ДвКЭ W_a^n и односеточные КЭ V_e^n может быть сколь угодно мелким, что позволяет в рамках микроподхода учитывать сложную неоднородную структуру ТрКЭ.

Процедура определения напряжений в ТрКЭ аналогична процедуре определения напряжений в ДвКЭ. Используя ТрКЭ, по процедуре, аналогичной п. 2, строим 4-сеточные КЭ и m -сеточные КЭ [12], $m \geq 4$. Однородные МнКЭ проектируются по процедурам, аналогичным процедурам п.п. 1, 2.

3. Результаты численных экспериментов.

Рассмотрим в декартовой системе координат $Oxuz$ модельную задачу деформирования 9-слойной цилиндрической оболочки V_0 при локальном нагружении (рис. 4). Левый торец оболочки жестко закреплен, т.е. при $y = 0$ имеем $u = v = w = 0$.

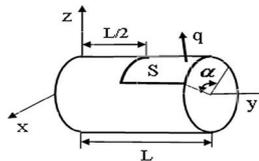


Рис. 4. Расчетная схема оболочки V_0

Внутренний радиус оболочки равен 200, толщина $h = 9$, длина $L = 650$. Слои (толщиной $h_c = h/9$) являются однородными изотропными телами. Модули Юнга девяти слоев (начиная с нижнего) равны: 1, 3, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50. Коэффициент Пуассона равен 0,3. На внешней поверхности S оболочки длиной $L/2$ и с углом раствора $\alpha = \pi/2$ (рис. 4), симметричной относительно плоскости Oyz , действует равномерно распределенная радиальная нагрузка $q = 0,01$. В расчетах используем половину оболочки. Базовая дискретная модель R_n^0 (половины оболочки) состоит из однородных КЭ V_e^n 1-го порядка (рис. 1) с характерными размерами $h_{xn}^e \times h_{yn}^e \times h_{zn}^e$, определяемыми по формулам

$$h_{xn}^e = h_{x1}^e / n, \quad h_{yn}^e = h_{y1}^e / n, \quad h_{zn}^e = h_{z1}^e / n, \quad n = 1, \dots, 8, \quad (13)$$

где $h_{x1}^e = \alpha_e R_{11}^e$, $h_{y1}^e = L/324$, $h_{z1}^e = h/9$, $\alpha_e = \pi/324$, R_{11}^e – размер для КЭ V_e^n при $n=1$.

Сетка базовой дискретной модели R_n^0 имеет размерность $m_n^1 \times m_n^2 \times m_n^3$,

$$\text{где } m_n^1 = 324n + 1, \quad m_n^2 = 324n + 1, \quad m_n^3 = 9n + 1, \quad n = 1, \dots, 8, \quad (14)$$

m_n^1 – размерность по круговой координате; m_n^2 – по оси Oy , m_n^3 – по оси Oz .

Многосеточная дискретная модель R_n состоит из ТрКЭ G_p^n оболочечного типа с характерными размерами $81h_{xn}^e \times 81h_{yn}^e \times 9h_{zn}^e$, рис. 3 (см. п. 2). Трехсеточные элементы G_p^n состоят из ДвКЭ W_a^n с характерными размерами $9h_{xn}^e \times 9h_{yn}^e \times 9h_{zn}^e$ (см. рис. 2, п. 1). Результаты расчетов даны в таблице 1, где w_n , σ_n – максимальные прогиб и эквивалентное напряжение многосеточной дискретной модели R_n (напряжения определяются по четвертой теории прочности). Значения $\delta_{\sigma,n}(\%)$, $\delta_{w,n}(\%)$ ($n \geq 2$) находим по формулам

$$\delta_{\sigma,n}(\%) = 100\% \times |\sigma_n - \sigma_{n-1}| / \sigma_n, \quad \delta_{w,n}(\%) = 100\% \times |w_n - w_{n-1}| / w_n. \quad (15)$$

Таблица 1

Максимальные прогибы и эквивалентные напряжения моделей R_n

R_n	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
w_n	148,62	196,91	208,64	213,48	215,90	217,27	218,14	218,71
$\delta_{w,n}(\%)$	–	24,52	5,62	2,27	1,12	0,63	0,40	0,26
σ_n	2,715	3,616	4,021	4,291	4,483	4,628	4,741	4,830
$\delta_{\sigma,n}(\%)$	–	24,92	10,07	6,29	4,28	3,13	2,38	1,84

Характер изменения величин $\delta_{w,n}(\%)$, $\delta_{\sigma,n}(\%)$ ($n = 2, \dots, 8$) демонстрирует быструю сходимость напряжений σ_n и перемещений w_n к точному решению. Поскольку величины $\delta_{w,8} = 0,0026$, $\delta_{\sigma,8} = 0,0184$ малы ($n = 8$), то считаем, что перемещение $w_8 = 218,71$ и напряжение $\sigma_8 = 4,83$ определены с малой погрешностью. Максимальные эквивалентные напряжения σ_n возникают в девятом слое оболочки при $x = 0$, в окрестности ее крепления, максимальные перемещения w_n — на свободном торце оболочки V_0 .

Размерность базовой дискретной модели R_8^0 (для половины оболочки) равна 1471532832 (более 1,4 млрд. неизвестных), ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ – 567873. Многосеточная модель R_8 имеет 249696 узловых неизвестных, ширина ленты СУ МКЭ равна 7863. Реализация МКЭ для многосеточной модели R_8 требует в 425 тыс. раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для модели R_8^0 . Построение решений для моделей $\{R_i\}_{i=1}^8$ на персональном однопроцессорном компьютере требует 4 часа 25 минут временных затрат.

4. Численный метод верификации КЭ. Для исследования сходимости приближенных решений, построенных с применением новых КЭ, широко используют известный численный метод [4, с. 175], краткая суть которого заключается в следующем. С помощью предлагаемых КЭ решается аналогичная (тестовая) задача с известным аналитическим (точным) решением u_0 . Пусть ошибка $\delta_h = \|u_0 - u_h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, где h — характерный размер КЭ, u_h — решение тестовой задачи, построенное с помощью предлагаемых КЭ. Тогда считают, что приближенные решения, построенные с помощью предлагаемых КЭ и для дру-

гих конкретных задач, аналогичных тестовой задаче, сходятся в пределе (при $h \rightarrow 0$) к точному решению.

Рассмотрим в качестве тестовой модельную осесимметричную задачу о деформировании девятислойной цилиндрической оболочки V_1 , которая имеет такие же размеры, условия закрепления и модули упругости, как и оболочка V_0 (см. п. 3). Пусть оболочка V_1 находится под действием осесимметричной радиальной равномерной нагрузки $q = 0,1$ при $y \geq L/2$. Как известно, последовательность решений (при $h \rightarrow 0$) осесимметричной задачи для данной оболочки, построенных по МКЭ с применением стандартных КЭ [3, с. 87], которые являются однородными кольцами с квадратным поперечным сечением, сходится к точному решению. Для дискретной модели Q_n оболочки, $n = 1, \dots, 8$, состоящей из стандартных КЭ, определяем максимальные прогиб w_n^0 и эквивалентное напряжение σ_n^0 . Для полученных w_n^0 , σ_n^0 находим погрешности $\delta_{w,n}^0(\%)$, $\delta_{\sigma,n}^0(\%)$ по формулам, аналогичным (15). Аналогичные параметры w_n^r , σ_n^r , $\delta_{w,n}^r(\%)$, $\delta_{\sigma,n}^r(\%)$ для осесимметричной задачи определяем с помощью КЭ G_p^n (см. п. 3), используя для половины оболочки V_1 законы измельчения (13), (14) базовых моделей. Значения погрешностей $\delta_{w,n}^0(\%)$, $\delta_{\sigma,n}^0(\%)$, $\delta_{w,n}^r(\%)$, $\delta_{\sigma,n}^r(\%)$ показывают быструю сходимость напряжений σ_n^0 , σ_n^r и перемещений w_n^0 , w_n^r к точным решениям (см. табл. 2, 3). В силу малости величин $\delta_{w,8}^0 = 0,000000044$, $\delta_{\sigma,8}^0 = 0,000087$, $\delta_{w,8}^r = 0,0000017$, $\delta_{\sigma,8}^r = 0,0000439$ прогибы и напряжения при $n = 8$ считаем точным решением. Для стандартных КЭ получаем $w_8^0 = 25,775620$, $\sigma_8^0 = 6,087667$, для ТрКЭ — $w_8^r = 25,777645$, $\sigma_8^r = 6,087704$.

Таблица 2

Максимальные прогибы и эквивалентные напряжения моделей Q_n

n	Размерность модели Q_n	w_n^0	$\delta_{w,n}^0(\%)$	σ_n^0	$\delta_{\sigma,n}^0(\%)$
2	1297 × 19	25,775620842	0,0023632	6,0766437388	0,2352582
4	2593 × 37	25,775488560	0,0001529	6,0839633054	0,0403152
6	3889 × 55	25,775452136	0,0000553	6,0864290250	0,0162303
8	5185 × 73	25,775440899	0,0000044	6,0876676879	0,0087283

Таблица 3

Максимальные прогибы и эквивалентные напряжения многосеточных моделей, состоящих из ТрКЭ

n	w_n^r	$\delta_{w,n}^r(\%)$	σ_n^r	$\delta_{\sigma,n}^r(\%)$
2	25,974091346	1,5732658	6,1216614786	1,0042443
4	25,796347946	0,1717619	6,0860925957	0,0414311
6	25,781094987	0,0052265	6,0862833577	0,0185614
8	25,777645991	0,0001745	6,0877048793	0,0043964

Относительные погрешности

$$\delta_w(\%) = 100\% \times |w_s^0 - w_s^r| / w_s^0,$$

$$\delta_\sigma(\%) = 100\% \times |\sigma_s^0 - \sigma_s^r| / \sigma_s^0$$

соответственно равны 0,00061 и 0,00132%.

На основе полученных результатов можно сделать вывод, что предлагаемые ТрКЭ G_p^n порождают решения σ_n^r , w_n^r , которые в пределе (при $n \rightarrow \infty$) стремятся к точному решению данной осесимметричной задачи. Тогда, следуя методу верификации, можно

считать, что приближенные решения, построенные для задачи п. 3 с применением ТрКЭ G_p^n , при $n \rightarrow \infty$ сходятся к точному решению.

Заключение. Предложены многосеточные конечные элементы оболочечного типа для расчета напряженного состояния упругих композитных цилиндрических оболочек. Разработаны и численно исследованы трехсеточные КЭ оболочечного типа. Пример расчета многослойной оболочки с применением предложенных КЭ показывает высокую эффективность их применения.

Библиографический список

1. Болотин В.В., Новиков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. — М., 1980.
2. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. — М., 2008.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М., 1975.
4. Норри Д., Фриз Ж. де. Введение в метод конечных элементов. — М., 1981.
5. Голованов А.И., Тюленева О.И., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. — М., 2006.
6. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Шубович А.А. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке при различных вариантах интерполяции перемещений. — Волгоград, 2013.
7. Киселев А.П. Расчет тонких оболочек на прочность в трехмерной постановке без упрощающих гипотез // Известия вузов. Строительство. — 2008. — № 1.
8. Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З. Расчет многослойных оболочек вращения и пластин с использованием объемных конечных элементов // Известия вузов. Строительство. — 2010. — № 1.
9. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. — М., 1982.
10. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Одно- и двухсеточное криволинейные элементы трехмерных цилиндрических панелей и оболочек // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014. — № 1/1. DOI:10.14258/izvasu(2014)1.1-19.
11. Матвеев А.Д., Гришанов А.Н. Многосеточные криволинейные элементы в трехмерном анализе цилиндрических композитных панелей с полостями и отверстиями // Ученые записки Казанского гос. ун-та. — 2014. — Т. 156, кн. 4.
12. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных элементов с микронеоднородной структурой // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : тезисы докладов XXIII Всероссийской конференции (Барнаул, 26–28 июня 2013 г.). — Новосибирск, 2013.