УДК 539.3

Расчет упругих конструкций с применением скорректированных условий прочности

А.Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск, Россия)

Calculation of Elastic Structures Using the Adjusted Strength Conditions

A.D. Matveev

Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch of the RAS (Krasnoyarsk, Russia)

Для коэффициентов запаса некоторых упругих конструкций и деталей заданы ограничения (условия прочности), т.е. значения коэффициентов запаса таких конструкций лежат в заданном диапазоне. Ограничения задаются для коэффициентов запаса, которые отвечают аналитическим решениям задач теории упругости, сформулированных для конструкций. Построение аналитических решений для большинства конструкций, особенно сложной формы, связано с большими трудностями. Для ряда конструкций широко применяют приближенные подходы решения задач упругости, например технические теории деформирования однородных и композитных пластин, балок и оболочек. Технические теории, построенные на основе гипотез, порождают приближенные (технические) решения с неустранимой погрешностью, точное значение которой определить сложно. В статических расчетах конструкций на прочность при заданном малом диапазоне для коэффициентов запаса применение технических (сопроматовских) решений затруднительно. В данной работе для коэффициента запаса, который отвечает приближенному решению задачи упругости, предложены скорректированные условия прочности, учитывающие погрешность напряжений. Показано, что из выполнения скорректированных условий прочности для коэффициента запаса конструкции, который отвечает приближенному решению, следует выполнение заданных условий прочности для коэффициента запаса данной конструкции, который отвечает точному решению. Для предлагаемых скорректированных условий прочности определяется класс приближенных решений, с помощью которых можно выполнить заданные условия прочности.

Ключевые слова: упругость, коэффициент запаса, погрешность напряжений, скорректированные условия прочности.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-21

As is known, the constraints (strength conditions) for the safety factor of elastic structures and design details of a particular class are established, i.e. the safety factor values of such structures should be within the given range. It should be noted that the constraints are set for the safety factors corresponding to analytical solutions of elasticity problems represented for the structures. Developing the analytical solutions for most structures, especially irregular shape ones, is associated with some difficulties. Approximate approaches to solve the elasticity problems, e.g. the technical deformation theories of homogeneous and composite plates, beams, and shells, are widely used for a great number of structures. Technical theories based on the hypotheses give rise to approximate (technical) solutions with an irreducible error, with the exact value being difficult to be determined. Application of technical solutions (by Theory of Strength of Materials) for the safety factors in static analysis on the structural strength at a specified small range is difficult. In this paper, the adjusted (specified) strength conditions for the structural safety factor corresponding to the approximate solution of the elasticity problem have been proposed. It has been shown that, to fulfill the specified strength conditions for the safety factor of the given structure corresponding to an exact solution, the adjusted strength conditions for the structural safety factor corresponding to an approximate solution are required. Adjusted strength conditions make it possible to determine the set of approximate solutions, whereby meeting the specified strength conditions.

Key words: elasticity, safety factor, stress error, adjusted strength conditions.

Введение. Как известно [1–7], для коэффициентов запаса прочности упругих конструкций определенного класса (например, авиационных) принимают ограничения вида

$$n_a \le n_0 \le n_b\,, \qquad (1)$$

где величины n_a, n_b заданы, $n_a \ge 1$; n_0 – коэффициент запаса прочности конструкции, отвечающий точному решению задачи теории упругости (сформулированной для данной конструкции).

Считают, что конструкция не разрушается при эксплуатации и спроектирована рационально с точки зрения запаса прочности, если ее коэффициент запаса n_0 удовлетворяет заданным условиям прочности вида (1). В общем случае (например, для тел сложной формы) построить аналитические решения задач теории упругости [8, с. 40] очень трудно. Однако представляется возможным строить приближенные решения (например, с помощью метода конечных элементов [9, с. 255; 10, с. 169]) с заданной оценкой погрешности для напряжений. Следует отметить, что при проектировании ряда конструкций (например, конструкций минимального веса) нарушение заданных условий (1) недопустимо. Существующие условия прочности не учитывают погрешность приближенных решений, что порождает трудности при выполнении условий прочности (1) для коэффициента n_0.

В данной работе показан расчет на прочность упругих конструкций с учетом оценки погрешности для максимальных эквивалентных напряжений. Предложены скорректированные условия прочности, при построении которых используется оценка погрешности приближенных решений, определяемая на основе заданных условий прочности (1). Достоинство предлагаемых условий прочности состоит в том, что их выполнение для коэффициента запаса n_r конструкции, который отвечает приближенному решению, обеспечивает выполнение заданных условий (1) для коэффициента n_0. Скорректированные условия прочности позволяют определить класс приближенных решений, которые позволяют выполнить заданные условия прочности. Приведены примеры заданных условий прочности, которые можно выполнить с помощью технических (сопроматовских) решений, и условий прочности, для выполнения которых необходимо использовать приближенные решения с малой погрешностью.

1. **Условия прочности, учитывающие погрешность напряжений.** При расчете на прочность ряда конструкций возникает необходимость строить приближенные решения с малой погрешностью. Это связано с тем, что для коэффициентов запаса упругих конструкций и деталей определенного класса (например, авиационной и ракетной техники) задаются определенные ограничения, т.е. условия прочности вида (1). В настоящее время для коэффициента запаса прочности n_r конструкции, который отвечает приближенному решению задачи теории упругости, также используют условия прочности вида (1), т. е.

$$n_a \le n_r \le n_b\,. \qquad (2)$$

Отметим, что поскольку $n_r \ne n_0$, то при малом $\Delta n = n_b - n_a$ из выполнения для коэффициента n_r условий (2) не всегда следует выполнение условий прочности (1) для коэффициента n_0. На практике большинство конструкций и деталей состоят из пластичных материалов, для определения эквивалентных напряжений которых широко используют четвертую теорию прочности [1, с. 167]. В данной работе при статическом нагружении рассматриваются упругие конструкции, состоящие из пластичных материалов. При расчете конструкций на прочность с применением приближенных решений задач теории упругости предлагается использовать скорректированные исходные условия прочности (1), которые представлены в следующей теореме.

Теорема. Пусть для конструкции заданы условия прочности (1) и определено максимальное эквивалентное напряжение σ_r, отвечающее приближенному решению задачи теории упругости. Пусть

$$|\delta| \le \delta_p < C_p = \frac{\Delta n}{n_a + n_b}\,, \qquad (3)$$

где $\Delta n = n_b - n_a$, $n_b > n_a \ge 1$, n_a, n_b — заданы; δ — относительная погрешность для напряжения σ_r, определяемая по формуле

$$\delta = \frac{\sigma_r - \sigma_0}{\sigma_0}\,, \qquad (4)$$

где σ_0 — максимальное эквивалентное напряжение конструкции, отвечающее точному решению задачи теории упругости; эквивалентные напряжения определяются по 4-й теории прочности; δ_p — оценка для погрешности δ.

Пусть коэффициент запаса n_r конструкции, отвечающий приближенному решению, удовлетворяет скорректированным условиям прочности вида

$$\frac{n_a}{1-\delta_p} \le n_r \le \frac{n_b}{1+\delta_p}\,, \qquad (5)$$

где $n_r = \sigma_T / \sigma_r$, σ_T – предел текучести [1, с. 150; 3, с. 79].

Тогда коэффициент запаса n_0 конструкции, отвечающий точному решению, удовлетворяет заданным условиям прочности (1), где $n_0 = \sigma_T / \sigma_0$.

Доказательство

Из (4) следует $\sigma_r = (1+\delta)\,\sigma_0$. Отсюда получаем

$$n_0 = (1+\delta) n_r\,. \qquad (6)$$

Отметим, что так как $n_b > n_a \geq 1$, то в (3) $C_p < 1$.

Пусть δ_0 такое, что $\delta_0 = |\delta|$. Тогда в силу (3) имеем соотношения

$$0 \leq \delta_0 = |\delta| \leq \delta_p < 1. \quad (7)$$

Принимая в (6) последовательно $\delta = -\delta_0$, $\delta = \delta_0$, введем коэффициенты

$$n_1^r = (1-\delta_0)n_r,\ n_2^r = (1+\delta_0)n_r. \quad (8)$$

Тогда в силу (6), (8) получаем

$$n_0 = n_1^r \quad \text{или} \quad n_0 = n_2^r. \quad (9)$$

Введем коэффициенты n_1^p, n_2^p по формулам

$$n_1^p = (1-\delta_p)n_r, \quad n_2^p = (1+\delta_p)n_r. \quad (10)$$

В силу того, что $0 \leq \delta_p < 1$, $n_r > 0$, из (10) следует

$$n_2^p \geq n_1^p. \quad (11)$$

Пусть для коэффициента n_r выполняются условия прочности (5), т.е.

$$n_a \leq (1-\delta_p)n_r, \quad (1+\delta_p)n_r \leq n_b.$$

Тогда для коэффициентов n_1^p, n_2^p с учетом (11) выполняются неравенства

$$n_a \leq n_1^p \leq n_2^p \leq n_b. \quad (12)$$

Из (8), (10) с учетом (7) следуют неравенства

$$n_1^p \leq n_1^r, \quad n_2^r \leq n_2^p.$$

Отсюда согласно (7) $n_1^r \leq n_2^r$ получаем

$$n_1^p \leq n_1^r \leq n_2^r \leq n_2^p. \quad (13)$$

Тогда в силу (12), (13) выполняются неравенства

$$n_a \leq n_1^r \leq n_2^r \leq n_b. \quad (14)$$

Из (14) с учетом (9) следует выполнение заданных условий прочности (1) для коэффициента запаса n_0. Ограничения на параметр δ_p находим из предположения существования условий прочности (5), т. е. пусть

$$\frac{n_a}{1-\delta_p} \leq \frac{n_b}{1+\delta_p}. \quad (15)$$

Откуда следует

$$\delta_p < C_p = \frac{\Delta n}{n_a + n_b}. \quad (16)$$

Отметим, что поскольку $n_b > n_a \geq 1$, то из (16) следует $0 < C_p < 1$. Если $\delta_p = C_p$, то в этом случае $n_r = (n_a + n_b)/2$, что трудно выполнить на практике. Итак, при $\delta_p < C_p$ возможно выполнение заданных условий прочности (1) для коэффициента n_0 с применением скорректированных условий прочности (5) и приближенного решения, которое порождает для эквивалентного напряжения σ_r такую относительную погрешность δ, что $|\delta| \leq \delta_p$. Теорема доказана.

Из теоремы следуют следующие *выводы*.

1. Для выполнения заданных условий прочности (1) для коэффициента n_0 нет необходимости использовать только аналитические решения задач теории упругости.

2. В расчетах конструкций на прочность можно использовать определенный класс приближенных решений.

3. Из (3) следует, что если Δn мало, то $|\delta|$ малая величина, т.е. в этом случае возникает необходимость строить приближенные решения с малой погрешностью.

Замечание 1. При расчете на прочность конструкций и деталей, состоящих из хрупких материалов, можно использовать скорректированные условия прочности (5). В этом случае σ_r — эквивалентное напряжение, определяемое по 1-й (2-й) теории прочности; σ_T — временное сопротивление [1, с. 150; 3, с. 79].

Замечание 2. Скорректированные условия прочности (5) можно применять при расчете конструкций и деталей, которые испытывают переменные напряжения симметричного цикла. В этом случае σ_T — предел выносливости детали; σ_r — амплитуда действующих переменных напряжений [2, с. 42].

В данной работе процедура нахождения оценки погрешности напряжений отличается от процедуры, изложенной в работе [11].

2. **Примеры заданных и скорректированных условий прочности**

2.1. Для коэффициентов запаса прочности большого класса конструкций, состоящих из пластичных материалов, используют условия [3, с. 84]

$$1{,}5 \leq n_0 \leq 2{,}5. \quad (17)$$

В данном случае $n_a = 1{,}5$, $n_b = 2{,}5$, $\Delta n = 1$. По формуле (3) находим $C_p = 25\%$. Пусть $\delta_p = 20\%$. Скорректированные условия прочности (при $\delta_p = 20\%$) для исходных условий (22) согласно (5) принимают вид

$$1{,}875 \leq n_r \leq 2{,}08. \quad (18)$$

Для выполнения заданных условий прочности (17) можно использовать приближенные, в частности, технические (сопроматовские) решения, порождающие напряжения с относительной погрешностью $|\delta|$

меньше 20%. Отметим, что если коэффициент запаса n_r, отвечающий приближенному решению задачи теории упругости, удовлетворяет скорректированным условиям прочности (18), то коэффициент n_0, который отвечает точному решению, удовлетворяет заданным условия прочности (17).

2.2. Для сосудов и аппаратов, работающих под давлением [4, с. 73], применяют условия прочности

$$1,5 \le n_0 \le 4\,. \qquad (19)$$

Для условий прочности (19) в силу (3) имеем $C_p = 45\%$. При расчете на прочность таких конструкций можно использовать приближенные напряжения, относительная погрешность δ для напряжений которых удовлетворяет условию $|\delta| \le \delta_p = 30\%$. В этом случае скорректированные условия прочности согласно (19), (5) имеют вид

$$2,14 \le n_r \le 3,08\,. \qquad (20)$$

В расчетах можно использовать технические (сопроматовские) решения, которые порождают для напряжений относительную погрешность δ, что $|\delta| = 15\% \div 30\%$. Важно отметить, что в данном случае нет необходимости строить приближенные решения точнее технических (сопроматовских).

2.3. Для ряда заданных условий прочности (1) величина $\Delta n = n_b - n_a$ мала, $\Delta n = 0,1 \div 0,3$. Например, для несущих элементов конструкций одноковшовых экскаваторов [3, с. 84] применяют условия прочности

$$1,2 \le n_0 \le 1,4\,. \qquad (21)$$

Используя (3) для заданных условий прочности (21), получаем $C_p = 7,6\%$. В расчетах можно применять решения, которые порождают напряжения с погрешностью δ не более 5%, т. е. $|\delta| \le 5\%$. Для $\delta_p = 5\%$ скорректированные условия прочности в силу (21), (5) принимают вид

$$1,26 \le n_r \le 1,33\,. \qquad (22)$$

Применение технических (сопроматовских) решений в этом случае затруднительно. Для выполнения условий прочности (21) возникает необходимость строить численные решения с малой погрешностью (не больше 5% для напряжений).

Заключение. При расчете упругих конструкций с применением приближенных решений задач теории упругости предлагается использовать скорректированные условия прочности, которые построены на основе заданных условий прочности и учитывают погрешность приближенных решений. Скорректированные условия прочности определяют такой класс приближенных решений задач упругости (сформулированных для конструкций), с помощью которых можно выполнить заданные условия прочности. Показано, что для выполнения заданных условий прочности для ряда конструкций и деталей, которые широко применяются на практике, можно применять сопроматовские (технические) решения.

Библиографический список

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев, 1975.
2. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. — М., 1993.
3. Москвичев В.В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. — Новосибирск, 2002.
4. Доронин С.В., Лепихин А.М., Москвичев В.В., Шокин Ю.И. Моделирование прочности и разрушения несущих конструкций технических систем. — Новосибирск, 2005.
5. Волков Д.П. Динамика и прочность одноковшовых экскаваторов. — М., 1965.
6. Моссаковский В.И., Макаренков А.Г., Никитин П.И. и др. Прочность ракетных конструкций. — М., 1990.
7. Хеллан К. Введение в механику разрушения / пер. с англ. под ред. Е.М. Морозова. — М., 1988.
8. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. — М., 1982.
9. Норри Д., Фриз Ж. де. Введение в метод конечных элементов / пер. с англ. под ред. Г.И. Марчука. — М., 1981.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / пер. с англ. под ред. Б.Е. Победри. — М., 1975.
11. Матвеев А.Д. Анализ прочности конструкций с учетом погрешности для напряжений // Деп. В ВИНИТИ №923-В2005.