УДК 514.77

Исследование операторов кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях с применением пакетов символьных вычислений*

С.В. Клепикова, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Investigation of Curvature Operators on Three-Dimensional Locally Homogeneous Lorentzian Manifolds with Application of Symbolic Computations Packages

S.V. Klepikova, O.P. Khromova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Изучение свойств операторов кривизны представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного (псевдо)риманова многообразия. Одной из актуальных задач в этом направлении является задача о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по заданному оператору кривизны.

Задача о предписанных значениях оператора Риччи на 3-мерных локально однородных римановых пространствах была решена О. Ковальским и С. Никшевич. Аналогичные результаты для операторов одномерной и секционной кривизны были получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой.

В случае трехмерных локально однородных лоренцевых многообразий известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского, в которой исследуется задача о существовании трехмерного локально однородного лоренцева многообразия с заданным оператором Риччи. Задача о существовании трехмерной группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и предписанным оператором одномерной или секционной кривизны ранее была решена авторами.

Данная работа продолжает исследования авторов в случае трехмерных локально однородных лоренцевых многообразий. В ней с помощью пакетов символьных вычислений решена задача о существовании трехмерного локально однородного лоренцева многообразия с предписанным оператором одномерной или секционной кривизны.

Ключевые слова: пакеты символьных вычислений, локально однородные лоренцевы многообразия, операторы кривизны.

The study of the properties of curvature operators is interesting for understanding the geometrical and topological structure of a homogeneous (pseudo)Riemannian manifold. One of the actual problems in this area is the problem of restoring (pseudo)Riemannian manifolds with respect to a prescribed curvature operator. The problem of prescribed values of the Ricci operator on 3–dimensional locally homogeneous Riemannian manifolds have been solved by O. Kowalski and S. Nikcevic. Similar results for the one-dimensional and sectional curvature operators have been obtained by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov and O.P. Khromova. The research of G. Calvaruso and O. Kowalski is known fo the case of a three-dimensional locally homogeneous Lorentzian manifold. There, the problem of existence of a three–dimensional locally homogeneous Lorentzian manifold with a prescribed Ricci operator is studied. The problem of existence of a three–dimensional Lie group with a left-invariant Lorentzian metric and prescribed one-dimensional or sectional curvature operator has been previously solved by the authors.

This paper continues the authors' investigations for the case of three-dimensional locally homogeneous Lorentzian manifolds. With the help of symbolic computation packages, the problem of the existence of a three-dimensional locally homogeneous Lorentzian manifold with the prescribed one-dimensional or sectional curvature operator is solved.

Key words: symbolic computation packages, locally homogeneous Lorentzian manifolds, curvature operators.

DOI DOI 10.14258/izvasu(2017)4-20

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048мол_а).

1. Введение, определения и постановка задачи. Актуальным направлением в исследовании операторов кривизны является задача о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по заданному оператору кривизны. Локально однородные римановы пространства с предписанными значениями спектра оператора Риччи были исследованы О. Ковальским и С. Никшевич [1]. В случае лоренцевых метрик на трехмерных локально однородных пространствах известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского [2], в которой исследуется задача о существовании локально однородного лоренцева пространства с заданным оператором Риччи.

Кроме случая локально однородных пространств, также исследовался вопрос о собственных значениях оператора Риччи в случае трехмерных кривизно однородных пространств (см., например, [3–5]).

Пусть (M, g) — n-мерное (псевдо)риманово многообразие, ∇ — связность Леви-Чивита. Тензор кривизны R, тензор Риччи r, оператор Риччи ρ и скалярную кривизну sc определим равенствами

$$R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z;$$
$$r(X,Y) = \operatorname{tr}(Z \mapsto R(X,Z)Y);$$
$$g(\rho(X),Y) = r(X,Y), \quad sc = \operatorname{tr}(\rho).$$

При исследовании (псевдо)римановых многообразий важную роль играет *оператор одномерной кривизны* $\mathcal{A}$, определяемый формулой

$$\mathcal{A} = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{sc}{2(n-1)}\mathrm{Id}\right),$$

где Id — тождественный оператор.

(Псевдо)риманова метрика g индуцирует метрический тензор $\tilde{g}$ на расслоении $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\tilde{g}(X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2) = \det(g(X_i, Y_j)).$$

Тензор кривизны R в любой точке многообразия можно рассматривать как оператор $\mathcal{K}\colon \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$, называемый *оператором секционной кривизны* и определяемый равенством

$$\tilde{g}(X \wedge Y, \mathcal{K}(Z \wedge T)) = R(X,Y,Z,T).$$

В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой известны работы [6,7] о восстановлении данных групп Ли по заданным собственным значениям операторов одномерной или секционной кривизны.

В отличие от случая римановой метрики, где всегда существует ортонормированный базис, в котором матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ диагональны, в лоренцевом случае могут возникнуть различные случаи известные как *типы Сегре* и представляющие собой список размерностей жордановых блоков при записи матрицы соответствующего оператора в каноническом базисе (см. [8]). Поэтому в случае псевдоримановой метрики необходимо задавать не только сами собственные значения соответствующего оператора, но и его тип Сегре. В трехмерном случае возможны следующие варианты: $\{111\}$, $\{1z\bar{z}\}$, $\{12\}$, $\{3\}$.

Изучение операторов кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых пространствах базируется на следующем факте.

Теорема 1 [9]. *Пусть (M, g) — трехмерное связное, односвязное, полное локально однородное пространство с инвариантной лоренцевой метрикой. Тогда либо (M, g) локально симметрическое пространство, либо изометрично трехмерной группе Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.*

Трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и предписанными операторами одномерной и секционной кривизны изучались в работах [10–12]. Поэтому данная работа посвящена изучению случая трехмерных локально симметрических пространств, которое основано на следующем утверждении.

Теорема 2 [9]. *Связное, односвязное трехмерное локально симметрическое лоренцево пространство – это*

1) *либо лоренцево пространство постоянной секционной кривизны $\mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{S}^3_1$ или $\mathbb{H}^3_1$ (нулевой, положительной и отрицательной соответственно);*
2) *либо прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2_1$, $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2_1$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ или $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$;*
3) *либо пространство с лоренцевой метрикой g, которое допускает локальную систему координат (u_1, u_2, u_3) такую, что метрический тензор имеет вид*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(u_2,u_3) \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $f(u_2, u_3) = u_2^2\alpha + u_2\beta(u_3) + \xi(u_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, β, ξ — произвольные гладкие функции.

Основной целью данной работы является описание математической модели, а также ее реализация в среде пакета символьных вычислений, что позволит изучить вопрос о восстановлении трехмерного связного и односвязного локально симметрического лоренцева пространства по предписанным операторам одномерной или секционной кривизны.

2. Основной алгоритм. Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять компоненты матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ с помощью известного метрического тензора g_{ij} в локальной системе координат $\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{\partial}{\partial u_3}\right)$ на трехмерном (псевдо)римановом многообразии.

Первым шагом будет вычисление компонент связности Леви-Чивита ∇:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s} \right),$$

где $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial u_k}$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и оператора одномерной кривизны $\mathcal{A}$:

$$R_{ijkt} = g_{il} \left(\frac{\partial \Gamma^l_{tj}}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial u_t} + \Gamma^l_{ks}\Gamma^s_{tj} - \Gamma^l_{ts}\Gamma^s_{kj} \right);$$

$$\mathcal{A}^l_i = \frac{1}{n-2} \left(R_{ijks} g^{js} g^{kl} - \frac{R_{tjks} g^{js} g^{tk} \delta^l_i}{2(n-1)} \right),$$

где δ^l_i — дельта Кронекера.

Далее вычислим индуцированный метрический тензор $\tilde{g}$ на расслоении $\Lambda^2 M$ и матрицу оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$:

$$\tilde{g}_{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad \tilde{g}_{12} = \begin{vmatrix} g_{23} & g_{21} \\ g_{33} & g_{31} \end{vmatrix},$$

$$\tilde{g}_{13} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}, \quad \tilde{g}_{22} = \begin{vmatrix} g_{33} & g_{31} \\ g_{13} & g_{11} \end{vmatrix},$$

$$\tilde{g}_{23} = \begin{vmatrix} g_{31} & g_{32} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix}, \quad \tilde{g}_{33} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},$$

$$\|\tilde{g}^{ij}\| = \|\tilde{g}_{ij}\|^{-1},$$

$$K_{11} = R_{2323},\ K_{12} = R_{2331},\ K_{13} = R_{2312},$$

$$K_{22} = R_{3131},\ K_{23} = R_{3112},\ K_{33} = R_{1212},$$

$$\mathcal{K}^j_i = K_{ik} \tilde{g}^{kj}.$$

Реализация данной математической модели в среде пакета символьных вычислений позволяет получить матрицы операторов одномерной и секционной кривизны, если известен метрический тензор в некоторой локальной системе координат.

3. Операторы одномерной и секционной кривизны на трехмерных локально симметрических лоренцевых многообразиях. Теорема 2 позволяет разбить задачу изучения операторов кривизны на трехмерных локально симметрических лоренцевых многообразиях на три подзадачи. В то же время очевидно, что для лоренцевых пространств постоянной секционной кривизны $\mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{S}^3_1$ и $\mathbb{H}^3_1$ операторы одномерной и секционной кривизны диагонализируемы (а значит, имеют тип Сегре $\{111\}$) имеют три равных собственных значения (равные нулю, положительные и отрицательные соответственно).

В случае прямых произведений (случай 2 теоремы 2) оператор $\mathcal{A}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с двумя равными и третьим нулевым собственными значениями, а оператор $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с двумя нулевыми и третьим ненулевым собственными значениями.

Следовательно, интерес представляет только случай 3, в котором метрический тензор в локальной системе координат имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(u_2, u_3) \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $f(u_2, u_3) = u_2^2\alpha + u_2\beta(u_3) + \xi(u_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, β, ξ — произвольные гладкие функции.

Индуцированный метрический тензор $\tilde{g}$ на расслоении $\Lambda^2 M$ имеет вид

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \varepsilon f(u_2, u_3) & 0 & -\varepsilon \\ 0 & -1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью вышеописанной математической модели вычислим матрицы операторов одномерной $\mathcal{A}$ и секционной $\mathcal{K}$ кривизны:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\varepsilon} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ имеют либо тип Сегре $\{111\}$ с нулевыми собственными значениями при $\alpha = 0$, либо тип Сегре $\{12\}$ с собственными значениями, равными нулю, при $\alpha \neq 0$. Таким образом, справедливы утверждения.

Теорема 3. *Трехмерное связное, односвязное локально симметрическое лоренцево пространство с оператором одномерной кривизны $\mathcal{A}$ существует в том и только том случае, если*

1) *либо $\mathcal{A}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с равными собственными значениями;*
2) *либо $\mathcal{A}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с двумя равными и третьим нулевым собственными значениями;*
3) *либо $\mathcal{A}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с нулевыми собственными значениями.*

Теорема 4. *Трехмерное связное, односвязное локально симметрическое лоренцево пространство с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует в том и только том случае, если*

1) *либо $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с равными собственными значениями;*
2) *либо $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с двумя нулевыми собственными значениями;*
3) *либо $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с нулевыми собственными значениями.*

4. Заключение. Результатом данной работы является доказательство теорем 3 и 4, что дополняет результаты работ [10–12] (в которых изучался случай метрических групп Ли) о восстановлении трехмерного связного и односвязного локально однородного лоренцева пространства по предписанному оператору одномерной или секционной кривизны.

Библиографический список

1. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3–manifolds // Geom. Dedicata. — 1996. — No. 1. DOI: 10.1007/BF00240002.

2. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3–manifolds // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — V. 7(1). DOI: 10.2478/s11533-008-0061-5.

3. Kowalski O. Nonhomogeneous Riemannian 3–manifolds with distinct constant Ricci eigenvalues // Nagoya Math. J. — 1993. — V. 132.

4. Bueken P. On curvature homogeneous three–dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 1997. — V. 22.

5. Calvaruso G. Pseudo–Riemannian 3–manifolds with prescribed distinct constant Ricci eigenvalues // Diff. Geom. Appl. — 2008. — V. 26. DOI: 10.1016/j.difgeo.2007.11.031.

6. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2013. — Т. 450, DOI: 10.7868/S0869565213140077.

7. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О вычислении спектра оператора кривизны конформно (полу)плоских римановых метрик // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — № 1–2(77). DOI: 10.14258/izvasu(2013)1.2-04.

8. Bueken P., Djorić M. Three–dimensional Lorentz metrics and curvature homogeneity of order one // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2000. — V. 18. DOI: 10.1023/A:1006612120550.

9. Calvaruso G. Homogeneous structures on three–dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — V. 57. DOI: 10.1016/j.geomphys.2006.10.005.

10. Клепиков П.Н. О допустимых значениях спектра оператора одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сб. тр. Всеросс. конф., Барнаул, 24–26 ноября, 2015. — Барнаул, 2015.

11. Клепиков П.Н., Клепикова С.В., Хромова О.П. О спектре операторов одномерной кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2016. — № 1(89). DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-21.

12. Клепикова С.В., Хромова О.П. Об операторе секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2017. — № 1(93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-17.