УДК 514.764.2

Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях*

П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Application of Symbolic Computation Packages for Investigation of Algebraic Ricci Solitons in Homogeneous (Pseudo)Riemannian Manifolds

P.N. Klepikov, E.D. Rodionov

Altai State University (Barnaul, Russia)

Изучение различных обобщений многообразий Эйнштейна является актуальной задачей современной дифференциальной геометрии. Например, изучению солитонов Риччи посвящены работы многих математиков.

Множество важных результатов удается получить при изучении солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях (однородные солитоны Риччи). В частности, в случае римановой метрики изучение однородных солитонов Риччи сводится к исследованию алгебраических солитонов Риччи.

В то же время, если размерность однородного многообразия достаточно мала, то представляется возможным использовать системы компьютерной математики для изучения однородных и алгебраических солитонов Риччи, что позволяет оптимизировать вычислительную часть исследования.

В данной работе приводится математическая модель, позволяющая записать уравнение алгебраического солитона Риччи на однородном (псевдо)римановом многообразии через алгебру Ли группы изометрий и алгебру Ли подгруппы изотропии. Данная математическая модель позволяет получить полную классификацию алгебраических солитонов Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах.

Ключевые слова: пакеты символьных вычислений, однородные (псевдо)римановы многообразия, алгебраические солитоны Риччи.

The study of various generalizations of Einstein manifolds is an actual problem of modern differential geometry. For example, papers of many mathematicians are devoted to studying Ricci solitons. Many important results are obtained by studying Ricci solitons in homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds (homogeneous Ricci solitons). In particular, in the case of a Riemannian metric, the study of homogeneous Ricci solitons reduces to the study of the algebraic Ricci solitons. At the same time, if the dimension of a homogeneous manifold is sufficiently low, it is possible to use computer mathematics systems for studying homogeneous and algebraic Ricci solitons to optimize the computational part of the study. In this paper, we present a mathematical model that enables the development of the equation of the algebraic Ricci soliton in a homogeneous (pseudo)Riemannian manifold through the Lie algebra of isometry group and the Lie algebra of isotropy subgroup. This mathematical model makes it possible to obtain a complete classification of algebraic Ricci solitons in four–dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds.

Key words: symbolic computation packages, homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds, algebraic Ricci solitons.

DOI 10.14258/izvasu(2017)4-19

1. Введение, определения и постановка задачи. В последнее время изучаются различные обобщения многообразий Эйштейна, одним из которых являются солитоны Риччи, впервые рассмотрены Р. Гамильтоном в работе [1].

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g, \tag{1}$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048мол_а).

где r — тензор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X. $(G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово пространство, удовлетворяющее (1), называется *однородным солитоном Риччи*.

Изучению однородных солитонов Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой посвящены работы многих математиков. Например, в работах [2–4] рассматриваются однородные солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Однородные солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой изучались в [5–9]. Локально однородные (псевдо)римановы многообразия, которые являются однородными инвариантными солитонами Риччи, исследованы в работе [10]. В случае однородных римановых пространств изучение однородных солитонов Риччи сводится к исследованию алгебраических солитонов Риччи (см. [11]).

Определение 2. Однородное (псевдо)риманово многообразие $(M = G/H, g)$ называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если в $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (где $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп G и H соответственно) выполняется уравнение

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D_{\mathfrak{m}}, \tag{2}$$

где $\rho \colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ — оператор Риччи; $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа; Id — тождественный оператор на $\mathfrak{m}$; $D_{\mathfrak{m}}$ — ограничение некоторого оператора дифференцирования $D \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ на $\mathfrak{m}$.

Алгебраические солитоны Риччи были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [12]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай однородных (псевдо)римановых многообразий (см. [13]).

Если размерность однородного (псевдо)риманова пространства достаточно мала, то для изучения алгебраических солитонов Риччи становится возможным применить системы символьных вычислений. Целью данной работы является разработка математической модели, а также компьютерной программы для изучения алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях конечных размерностей.

Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G, через $\mathfrak{h}$ подалгебру изотропии, а через $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (необязательно редуктивное) дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ однозначно определяет представление изотропии $\psi \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\psi_X(Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}}$. Инвариантной (псевдо)римановой метрике на G/H соответствует невырожденная билинейная форма g на $\mathfrak{m}$, такая, что

$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \tag{3}$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Эта форма однозначно определяет связность Леви–Чивита $\nabla \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом

$$\nabla_X(Y_{\mathfrak{m}}) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + v(X, Y),$$

где отображение $v \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} &2g(v(X, Y), Z_{\mathfrak{m}}) = \\ &\qquad = g(X_{\mathfrak{m}}, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + g(Y_{\mathfrak{m}}, [Z, X]_{\mathfrak{m}}). \end{aligned}$$

Тензору кривизны связности ∇ соответствует отображение $R \colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, такое, что

$$R(X, Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X,Y]}.$$

Тензор Риччи r и оператор Риччи ρ определяются формулами

$$\begin{gathered} r(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(X, Z)Y), \\ g(\rho(X), Y) = r(X, Y). \end{gathered}$$

2. Основной алгоритм. Пусть, как и ранее, $(M = G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — (необязательно редуктивное) дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, $h = \dim \mathfrak{h}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$\begin{gathered} [u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k, \\ [h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k, \end{gathered}$$

где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

С помощью массива структурных констант $\bar{c}_{ij}^k$ и равенства (3) можно определить вид метрического тензора g, сооответствующего инвариантной (псевдо)римановой метрике на G/H. Для этого вычислим представление изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)_j^k = (\psi(e_i))_j^k = \bar{c}_{ij}^k.$$

Пусть теперь g_{ij} — произвольная симметричная невырожденная матрица размера $m \times m$. Запишем систему уравнений

$$(\psi_i)^t \cdot g + g \cdot \psi_i = 0. \tag{4}$$

Решая (4) относительно компонент матрицы g, получим искомый вид метрического тензора.

Далее, с помощью уже известных структурных констант и матрицы метрического тензора, вычислим компоненты связности Леви–Чивита ∇:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + g^{sk}c_{sj}^l g_{il} + g^{sk}c_{si}^l g_{jl}\right);$$
$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2}g^{sk}\bar{c}_{is}^l g_{jl},$$

где $\nabla_{u_i}u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i}u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и оператора Риччи ρ:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l\Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l\Gamma_{il}^p + c_{ij}^l\Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l\bar{\Gamma}_{lk}^p\right)g_{ps},$$
$$\rho_i^l = R_{ijks}g^{js}g^{kl}.$$

Общий вид матриц дифференцирований D в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно найти как решение системы линейных уравнений:

$$D\left([X,Y]\right) = \left[D\left(X\right),Y\right] + \left[X, D\left(Y\right)\right],$$

где $X, Y \in \{e_1, e_2, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — базисные векторы в $\mathfrak{g}$.

Отметим, что подобные математические модели для метрических групп Ли приводились в работах [14–17], а для однородных (псевдо)римановых пространств — в работах [18, 19].

3. Пример вычислений. В качестве примера рассмотрим случай $1.1^2.1$ в классификации четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий [20]. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ задается следующими соотношениями:

$$[e_1,u_1] = u_3,\quad [e_1,u_3] = -u_1,\quad [u_1,u_3] = -u_2,$$
$$[u_1,u_4] = u_1,\quad [u_2,u_4] = 2u_2,\quad [u_3,u_4] = u_3,$$

причем $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\left(e_1\right)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right)$.

Представление изотропии имеет вид

$$\psi\left(e_1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему уравнений (4), получим вид метрического тензора:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24}\\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0\\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

Данный метрический тензор может имеет любую сигнатуру в зависимости от значений параметров, и из его невыроженности следует $\alpha_{33}\left(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2\right) \neq 0$.

Далее вычислим вид матриц оператора Риччи ρ и проекций операторов дифференцирований $D_{\mathfrak{m}}$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\alpha_{22}\left(\gamma-16\alpha_{33}^2\right)}{2\alpha_{33}^2\gamma} & 0 & \frac{\alpha_{24}\left(\gamma-4\alpha_{33}^2\right)}{2\alpha_{33}^2\gamma}\\ 0 & 0 & \eta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6\alpha_{22}}{\gamma} \end{pmatrix},$$

$$D_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0\\ \beta_1 & 2\beta_2 & 0 & 0\\ -\beta_3 & 0 & \beta_2 & \beta_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где β_1, β_2 и β_3 — действительные параметры, $\gamma = \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2$, $\eta = -\frac{\alpha_{22}\left(\gamma+8\alpha_{33}^2\right)}{2\alpha_{33}^2\gamma}$. Система уравнений (2) примет вид

$$\beta_3 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \Lambda\alpha_{24} = 0;$$
$$\Lambda\alpha_{24} - \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} = 0;$$
$$\Lambda\alpha_{44} + \frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = 0;$$
$$\Lambda\alpha_{22} + 2\beta_2 - \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 16\alpha_{33}^2)}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} = 0;$$
$$\Lambda\alpha_{33} + \beta_2 + \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)} = 0.$$

Данная система имеет единственное решение:

$$\Lambda = -\frac{6}{\alpha_{44}^2},\ \alpha_{22} = \frac{8\alpha_{33}^3}{4\alpha_{33}^2 + \alpha_{44}^2},\ \alpha_{24} = 0,$$
$$\beta_2 = \frac{24\alpha_{33}^3 - 16\alpha_{33}^2\alpha_{44} + 2\alpha_{33}\alpha_{44}^2 - 4\alpha_{44}^3}{\alpha_{44}^2(4\alpha_{33}^2 + \alpha_{44}^2)};$$
$$\beta_1 = 0,\ \beta_3 = 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово пространство* $1.1^2.1$ *является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда инвариантная метрика* g *имеет вид*

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{8\alpha_{33}^3}{4\alpha_{33}^2+\alpha_{44}^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

Причем алгебраический солитон Риччи обязательно является растягивающимся ($\Lambda < 0$), *и метрика* g *может иметь либо сигнатуру* $(+,+,+,+)$ *(риманова метрика), либо сигнатуру* $(+,+,+,-)$ *(лоренцева метрика).*

4. Заключение. В результате проведенных исследований построена математическая модель, которая позволяет получить полную классификацию алгебраических солитонов Риччи на четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах.

Библиографический список

1. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. — 1988. — Vol. 71. DOI: 10.1090/conm/071/954419.

2. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — Vol. 14(2). DOI: 10.1515/advgeom-2013-0031.

3. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-21.

4. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2015. — Т. 465, № 3. DOI: 10.7868/S0869565215330051.

5. Brozos–Vazquez M., Calvaruso G., Garcia-Rio E., Gavino–Fernandez S. Three–dimensional Lorentzian homogeneous Ricci solitons // arXiv.org. — 2009. — arXiv:0911.1247.

6. Batat W., Onda K. Algebraic Ricci Solitons of three–dimensional Lorentzian Lie groups // arXiv.org. — 2012. — arXiv:1112.2455.

7. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2016. — № 1(89). DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-22.

8. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля // ДАН. — 2017. — Т. 472, № 5. DOI:10.7868/S0869565217050048.

9. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с недиагонализируемым оператором Риччи // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2017. — № 1(93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-16.

10. Calvaruso G., Fino A. Four–dimensional pseudo–Riemannian homogeneous Ricci solitons // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2015. — Vol. 12, No. 05. DOI: 10.1142/S0219887815500565.

11. Jablonski M. Homogeneous Ricci solitons are algebraic // Geometry & Topology. — 2014. — Vol. 18. DOI: 10.2140/gt.2014.18.2477.

12. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Math. Ann. — 2001. — Vol. 319, No. 4. DOI: 10.1007/PL00004456.

13. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo–Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica. — 2014. — Vol. 144, No. 1. DOI: 10.1007/s10474-014-0426-0.

14. Гладунова О.П. Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Вестник Алтайского гос. пед. ун-та. — 2006. — № 6–2.

15. Гладунова О.П. Применение пакетов аналитических расчетов для вычисления основных геометрических характеристик риманова многообразия // Сборник научных статей международной школы–семинара “Ломоносовские чтения на Алтае”, Барнаул, 20–23 ноября, 2012. — Барнаул, 2012.

16. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — № 1/1(77).

17. Пастухова С.В., Хромова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию сигнатур операторов кривизны левоинваринтных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов международной научной конференции (пос. Цей, 12–18 июля 2015 г.). — Владикавказ, 2015.

18. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo–riemannian four–manifolds // Tohoku Math. J. — 2014. — Vol. 66.

19. Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2017. — № 1(93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-28.

20. Komrakov B.B. Einstein–Maxwell equation on four–dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. — 2001. — Vol. 8.